LEHRBUCH

DER PRAKTISCHEN PHYSIK

VON

FRIEDRICH KOHLRAUSCH

ELFTE, STARK VERMEHRTE AUFLAGE
DES LEITFADENS DER PRAKTISCHEN PHYSIK
28. BIS 34. TAUSEND

MIT 400 FIGUREN IM TEXT



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1910

4652

MEINEM VATER

RUDOLF KOHLRAUSCH

GEBOREN 6. NOVEMBER 1809
GESTORBEN 8. MÄRZ 1858

DEM BEGRÜNDER EXAKTER ELEKTROMETRIE

GEWIDMET

ZU SEINEM 100. GEBURTSTAGE

Aus dem Vorwort zur 2. Auflage
des Leitfadens der praktischen Physik, 1872.

Die Aufgaben, welche der praktischen Physik gestellt werden können, lassen sich in vier Punkte zusammenfassen. Zunächst steht erfahrungsgemäß fest, daß ein Teil der physikalischen Lehren, vorzugsweise der quantitative, durch bloßes Hören nicht begriffen wird, wogegen oft die einmalige Anwendung eines Satzes genügt, um den Schüler mit ihm vertraut zu machen. Zweitens gibt es eine Reihe von Aufgaben, deren Ausführung dem Chemiker, Mineralogen, Mediziner, Pharmazeuten oder Techniker bekannt sein soll. Die Vorlesung, wenn sie überhaupt auf eine solche Aufgabe eingeht, kann diese nur in prinzipieller Weise behandeln; von hier aber bis zur praktischen Ausführung ist noch ein weiter Schritt. Der Stand der Kenntnisse in diesen Dingen macht denn auch den bisherigen Mangel an praktischem Unterricht fühlbar genug: die Scheu vor den einfachsten physikalischen Aufgaben ist eben so bekannt, wie erschreckend groß.

Sodann aber liegt für die Physik selbst das Bedürfnis einer Vorschule für die experimentelle wissenschaftliche Forschung vor. Unterrichtsgegenstand kann freilich die eigentliche Forschung nur in sehr beschränktem Maße sein, wohl aber fordern die Pflicht und das eigene Interesse von der Physik, daß sie den künftigen Physiker mit seinem, ich möchte sagen wissenschaftlichen Handwerkszeug vertraut macht.

Die genannten drei Disziplinen sind es in erster Linie, welche das Buch ins Auge faßt, indem es Vorschriften zur Ausführung physikalischer Messungen gibt und dabei diejenigen bevorzugt, welche als Anwendungen außerhalb der Physik oder als Elemente wissenschaftlicher Untersuchung eine besondere Bedeutung haben. Soll auch die vierte Aufgabe, nämlich die Heranbildung physikalischer Lehrer hereingezogen werden, so glaube ich, daß auch diese Übungen am besten durch eine passende Auswahl der instrumentellen Mittel mit messenden Aufgaben zu verbinden sind; wer sich in den quantitativen Aufgaben einige Gewandtheit erworben hat, wird auch die Vorlesungsversuche ohne Schwierigkeit bewältigen.

Inhalt und Umfang einer Anleitung zur physikalischen Arbeit werden vor allem durch die Grenze der Genauigkeit bestimmt, bis zu welcher die Aufgaben durchgeführt werden sollen. Ich habe die Grenze inne zu halten gesucht, bei welcher die vernachlässigten Korrektionen

mindestens nicht größer sind, als die Beobachtungsfehler bei den gewöhnlich gebrauchten Instrumenten und bei mittlerer Geschicklichkeit im Beobachten.

An bestimmte Instrumente schließen sich die Anleitungen, wo es [illegible] nicht an; nur bei einigen neueren oder weniger bekannten [illegible] ist eine Ausnahme gemacht worden.

Zum Verständnis der magnetischen und elektrischen absoluten [illegible] eine übersichtliche Literatur fehlt, auf welche aber [illegible] Physik das größte Gewicht legen muß, wird im Anhang [illegible] Darlegung des absoluten Maßsystems gegeben.

[illegible] größeren Teil neu berechneten Tabellen dürften manche [illegible] nützlich sein. Ich habe mich bemüht, sie auf das [illegible] material zu gründen.

Aus den Vorworten zur 9. und 10. Auflage,

der ersten und zweiten des Lehrbuchs, 1901 und 1905.

Sätze in [ ] sind neu eingefügt.

[illegible] Worte, zu einer Zeit geschrieben, da der Verfasser [illegible] der Aufgabe beschäftigte, einen praktisch-physikalischen An- [illegible], für den man damals noch kein Muster fand, [illegible] Programm der physikalischen Übungen immer noch [illegible] zutreffen.

Die erste Ausgabe des Leitfadens hatte aus einigen zusammengehefteten Bogen bestanden, gedruckt zu dem Zwecke, das Lehren und Lernen bei den Aufgaben zu erleichtern, die ich in dem Maße wie die [illegible] damals vorhandenen Mittel es gestatteten, nach und nach in das Übungslaboratorium einführte.

In den späteren Auflagen weicht der Inhalt von dem ursprünglichen Programm ab, insofern zunehmend für wissenschaftliche Zwecke [zum Teil von außen angeregt] Gegenstände eingereiht wurden, die [illegible] zum Unterricht zu rechnen sind. Die vorliegende Ausgabe [illegible] in dieser Richtung noch weniger Einschränkung auf als [illegible], da inzwischen für die Zwecke des elementaren Praktikums der kleine Leitfaden erschienen ist.

Auch [illegible] Fachstudierenden der Mathematik, physikalischen [illegible] der Elektrotechnik und der Physik selbst wird mancher [illegible] bei der Arbeit die größere Ausgabe zu gebrauchen [illegible] vielleicht durch Lektüre manches kennen zu lernen, was in [illegible] des Praktikums nicht eingeschlossen ist.

[illegible] der Gesichtspunkte, nach denen die Übungsaufgaben [illegible] werden, darf auf das, dem kleinen Leitfaden beigegebene [illegible] verwiesen werden, dessen Inhalt ich auch bei wiederholtem [illegible] zwischen intellektuellem und unmittelbar praktischem Nutzen für richtig halte. Dem entsprechend wird, wenn auch viele Aufgaben

durch ihren Anschluß an moderne Hilfsmittel der Messung bestimmter gefaßt worden sind, als nach dem früher in dem Buche herrschenden Gebrauch, möglichst immer die allgemeine Methode als Kernpunkt festgehalten. Dies rechtfertigt sich aber nicht nur durch die Zwecke des Unterrichts. Denn wenn man die Entwicklung der vereinfachenden, auch wohl eleganten Methoden näher verfolgt, die wir der Ausbreitung physikalischer Messung in andere Kreise, besonders in die elektrotechnischen verdanken, so zeigt sich da doch manches vergänglich. Bei dem die praktischen Anwendungen in unserer Zeit beherrschenden raschen Stoffwechsel kommen häufig Gegenstände, die man als veraltet angesehen hat, unerwartet wieder zu moderner Geltung. Schon aus diesem Grunde ist aus dem Buche manches momentan als veraltet erscheinende nicht gestrichen worden [z. B. Aufgaben, die ein ungestörtes erdmagnetisches Feld verlangen, welches heute vielen Laboratorien versagt ist. Ich halte für wahrscheinlich, daß die vagabundierenden Erdströme, die doch zahlreiche Lebensinteressen schädigen, nur eine Episode in der technischen Entwicklung darstellen]. Außerdem aber verbieten ja den meisten Unterrichtsinstituten ihre Mittel, sich immer dem Neuesten anzuschließen — eine Einschränkung, die auch ihre Vorteile hat, denn sie erschwert, daß manches nützliche der Vergessenheit anheimfällt.

Für jüngere Leser mögen hier einige von den ausgiebigsten Quellen genannt werden, die zum Aufsuchen physikalischer Literatur dienen können. Wenn der Name des Verfassers gegeben ist, so findet man die Aufsätze bis 1900 am bequemsten in Poggendorff-Oettingen's Handwörterbuch. Ist die Zeit des Erscheinens ungefähr bekannt, so dienen die „Beiblätter zu den Annalen", die „Science Abstracts" der London Physical Society oder, bei weitem am bequemsten, die „Fortschritte der Physik" der Deutschen Physikalischen Gesellschaft zum Nachschlagen und meist zugleich zur Orientierung über den Inhalt. [Der Bericht über die Fortschritte eines Jahres wird unter der jetzigen Redaktion so beschleunigt, daß er im folgenden September abgeschlossen vorliegt. Die inzwischen erschienene Literatur findet man in dem systematisch geordneten mit den Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft verbundenen halbmonatlichen Literaturverzeichnis.] Für physikalisch-chemische Arbeiten seit 1894 wird oft das zuletzt von Danneel herausgegebene „Jahrbuch der Elektrochemie" gute Dienste leisten. Als vollständige Literaturquelle, auch für die zur Physik im entfernteren Verwandtschaftsgrade stehenden Wissenschaften dient der, freilich durch seinen Preis in der Verbreitung schwer geschädigte „International Catalogue of scientific Literature".

In elektrischen Fragen dürfte G. Wiedemann's Elektrizitätslehre am reichhaltigsten sein und, bis 1896, meistens genügen [über fernere, besonders auch elektrotechnische Literatur siehe S. 409]; in optischen oft das wertvolle Werk von Dufet, welches die ersten Bände des von

der Société Française de Physique herausgegebenen Recueil de Donnees numériques de Physique bildet, für Spektroskopie das Handbuch von Kayser. Als Nachschlagewerke allgemeinen Inhalts sind natürlich das von Winkelmann herausgegebene Handbuch; ferner nach mancher Richtung die Rapports au Congrès de Physique (1900), von den Lehrbüchern der Physik wohl besonders diejenigen von Wüllner, Pouillet-Müller-Pfaundler [illegible], namentlich auch bezüglich der russischen Literatur, [illegible] zu nennen; als Fundgrube für das unermeßlich anschwellende Zahlenmaterial bis 1905 die Landolt-Börnstein-Meyerhoffer'schen physikalisch-chemischen Tabellen. Für instrumentelles lehrreich sind die Preisverzeichnisse mancher Firmen.

Der Leitfaden darf, glaube ich, für sich in Anspruch nehmen, [illegible] lange Zeit allein eine handliche Zusammenstellung kritisch ausgewählter physikalischer Zahlen gebracht zu haben. Auch diesmal ist dieser erheblich vergrößerte Teil des Inhaltes [in der 11. Auflage unter möglichster Berücksichtigung auch der Literatur der ersten Hälfte von 1905] mit besonderer Sorgfalt behandelt worden. Immerhin möge der Leser um Hinweise auf etwaige Verstöße gebeten werden.

Zum Zwecke der Vervollständigung oder der Kontrole von Zahlen wären häufig die Quellen angegeben, doch ließ sich dies bei der Zerstreutheit der Arbeiten nicht durchführen. Es werde also in dieser Hinsicht auf die großen Sammelwerke, insbesondere auch auf die Literaturangaben in den Landolt-Börnstein'schen Tabellen verwiesen.

[Wie gebräuchlich sind sehr große oder sehr kleine Zahlen durch Multiplizieren mit Potenzen von 10 anschaulicher gemacht, wobei aber darauf gehalten wird, daß zusammenhängende Zahlenreihen einen [illegible] Exponenten erhalten. Bei dem in manchen Disziplinen jetzt [illegible] Wechseln des Exponenten geht die Übersicht verloren.]

Eine der schwierigsten Fragen ist: wie viele Stellen soll die Tabelle usw. angeben? Wenn man Jahre hindurch verpflichtet war, die Literatur der Konstantenbestimmungen zu verfolgen, so hat man sich überzeugt, daß die Versuchsfehler zum großen Teile nur langsam eingeschränkt werden. Es liegt nun freilich für den Verfasser wie für den Leser einer neuen Experimentalarbeit stets nahe, das Resultat, weil es die Fehlerquellen der früheren zu vermeiden sucht, für das zuverlässigste zu halten; aber nicht selten wird man hinterher eines Besseren belehrt.

Man umschifft die Klippen — und das ist in den alten Auflagen dieses Buches meist geschehen — dadurch, daß man die Zahlen nur bis zu den sicherstehenden Dezimalen wiedergibt. Für Zwecke des Unterrichts und technischer Anwendungen wird man so verfahren. Der Physiker wünscht aber oft mit Recht, auch von einer noch nicht feststehenden Dezimale den zur Zeit wahrscheinlichen Wert zu kennen. Diesem Bedürfnis gibt das Buch jetzt mehr als früher nach; natürlich unterliegen hierdurch die letzten Stellen nicht selten einer Schwankung.

Es ist begreiflich, daß man sich bestrebt, Verabredungen zu treffen, nach denen einem jeden Formelbuchstaben eindeutig angesehen werden kann, welche Größenart er darstellen soll. Die in Physik, Chemie, Elektrotechnik usw. vorkommenden Größenarten sind aber zahlreicher, als die zur Unterscheidung wirklich verfügbaren Zeichen. Denn daß man sich die Lizenz versagte, in einer Rechnung die Individuen derselben Größenart durch große und kleine, lateinische und griechische Buchstaben usw. zu unterscheiden, daß man also bezüglich dieser Unterscheidungen auf Indices angewiesen wäre, würde ja eine für den Schreiber, den Leser und den Setzer sehr lästige Beschränkung bedeuten.

Dies angenommen kann man leicht überschlagen, daß die Alphabete für eindeutige Bezeichnungen der Größenarten in diesem Buche nicht ausreichen. Gar so schlimm ist es aber auch kaum, wenn in verschiedenen Rechnungen der nämliche Buchstabe nicht immer dieselbe Größenart bezeichnet. Ein stillschweigender Usus hat die Willkür ohnehin stark eingeengt. Die im vorliegenden Buche gebrauchten Zeichen stimmen in der Tat bei den wichtigeren Größenarten schon in den früheren Auflagen mit den, z. B. von der Deutschen Physikalischen Gesellschaft gemachten Vorschlägen überein.

Zur 11. Auflage.

Jeder muß schließlich mit dem Geschick rechnen, daß seine Kräfte eine bisher gewohnte Arbeit nicht mehr leisten, und es wird kaum eine falsche Prognose sein, wenn ich, ungeachtet der vielseitigen und hingebenden Unterstützung, bei einer etwaigen künftigen Auflage jenen Zeitpunkt für den Verfasser als eingetreten erachte. Es empfiehlt sich deswegen, zur Sicherheit Abschied zu nehmen von dieser Arbeit, die sich zudem in vierzig Jahren, getrieben durch die Entwicklung des Unterrichts und der Forschung, so erweitert und zu einem starken Bruchteil der Lebenstätigkeit ausgewachsen hat, daß der Verfasser zweifelt, ob er sie mit dieser Aussicht unternommen haben würde.

Ein Rückblick auf die Entstehungszeit des Buches rechtfertigt sich bei dieser Gelegenheit; es ist aber interessanter, ihn, anstatt auf das Buch, auf die damals bestehenden Verhältnisse zu werfen, um so mehr, als die Anzahl der Kollegen, die jene Lage aus eigener Anschauung kennen, klein geworden ist. Auch für sie wird es — so wie für mich selbst — einer Abstraktion bedürfen, wenn sie sich den engen patriarchalischen Zustand wieder vergegenwärtigen wollen, der vor einem halben Jahrhundert im Betriebe der physikalischen Institute, oder wie man damals ganz bezeichnend zu sagen pflegte, Kabinette bestand.

Es gab deren soviele wie Hochschulen; nicht viel mehr als zwei Dutzend Professoren und ein Dutzend Assistenten mögen in Deutschland das Personal gebildet haben. Die Gesamtzahl der praktisch arbeitenden Schüler mag der Zahl der Professoren etwa gleichgekommen

[illegible] bestanden wesentlich aus älteren in- oder ausländischen Fach-[illegible] und verteilten sich auf wenige Plätze.

Einen systematischen praktischen Unterricht gab es wohl nur bei Neumann in Königsberg und Magnus in Berlin; etwas später auch in Heidelberg bei Kirchhoff. Noch weniger als der Unterricht waren die Arbeitsmittel organisiert: außer den für die besondere Untersuchung gebauten Instrumenten benutzte man die oft recht einseitig ausgestattete und selbst zu den gewöhnlichsten Messungen mit besseren Hilfsmitteln, z. B. sogar mit Wagen, oft mangelhaft versorgte Apparatensammlung [illegible] Wie bescheiden diese Ausrüstungen sein mußten, lassen [illegible] erraten, für die ein Durchschnitt von jährlich [illegible] Thalern sicher zu hoch angenommen ist; bei einer Berufung konnte [illegible] der Eintretende eigene Instrumente mitbringe.

[illegible] bestand aus einer kleinen Anzahl von [illegible] Physik, die für das, was der messende Physiker zu [illegible] Raum übrig hatten. Nach Methoden sowohl [illegible] Zahlenkonstanten hatte man in der Zeit-[illegible]. Diese Aufgabe war glücklicher Weise [illegible] vermöge der, man wird sagen dürfen in der [illegible] größeren physikalischen Organisation, [illegible] der Berliner Physikalischen Gesellschaft heraus-[illegible] der Physik", eines Werkes, dessen Einfluß auf [illegible] Physik man nicht genug rühmen kann. Uns Anfängern [illegible] dankenswerter, als die Literatur damals mehr als [illegible] allgemeineren Inhaltes zerstreut war.

[illegible] bestanden in Deutschland nur die Poggen-[illegible] Annalen der Physik und Chemie; und zwar wurde zu beiden [illegible] zugerechnet, was nur lose mit ihnen zusammen-[illegible] Abhandlungen, einschließlich der Übersetzungen [illegible] Aufsätze, füllten etwa die Hälfte der drei [illegible] Beiträge durch Inauguralabhandlungen gab es kaum.

[illegible] Jahren begannen sich die Früchte der genannten [illegible] Neumann, Magnus und Kirchhoff zu zeigen, und am [illegible] wurde in weiteren Kreisen das Bedürfnis [illegible] Organisation praktisch physikalischen Unter-[illegible] u. A. von meinen Lehrern und Freunden Wilhelm [illegible] die damals zu der Veröffentlichung der wie gesagt [illegible] Praktikanten verfaßten Anleitung rieten). [illegible] Zeit an datiert die Periode beschleunigten Wachs-[illegible] und in den Veranstaltungen praktischen [illegible] Physik und verwandte Wissenschaften; eine Periode, [illegible] durch Elektrotechnik, physikalische Chemie [illegible] durch die Gründung der großen, außerhalb des [illegible] nationalen Laboratorien, noch nicht abgelaufen [illegible] Zahl der mit Messungen beschäftigten Physiker [illegible] Institut wie die Physikalisch-Technische Reichsanstalt

nicht kleiner sein, als vor 50 Jahren die Gesamtzahl in Deutschland. Die Schüler der physikalischen Praktika in der Welt zählen nach vielen Tausenden; Hunderte von ihnen betreiben forschende Arbeit.

Wer die Literatur verfolgt, die sich auf physikalische Meßmethoden bezieht, hat fast täglich Fortschritte zu verzeichnen.

Während nun so der Stoff des Buches beschleunigt wächst, ist seinem Umfange (Volumen, Preis) durch die Aufgabe, auch dem Unterricht zu dienen, eine Grenze gesteckt, die gegenwärtig voll erreicht sein dürfte. Auf einen Raum, der nach Abzug der Erläuterungen, der 60 Tabellen und nahe 400 Figuren lange nicht die Hälfte des ganzen beträgt, ist der Text von etwa 800 Aufgaben zu verteilen, was zu unerbittlicher Sparsamkeit drängt, die als Tugend von jedermann gelobt, in ihrer Ausführung jedoch von wenigen geliebt wird. In der Tat widerstreitet sie häufig der Bequemlichkeit und, wenn der Ausdruck hier gestattet ist, der Schönheit; da wo Knappheit sich zur Enge steigert, kommt sogar die leichte Übersicht in Gefahr.

Kann man nun freilich zweifeln, ob z. B. die weitgehende Opulenz im Formelsatz und in Abbildungen, der man in manchen Büchern oder Zeitschriften begegnet, irgend einen Nutzen bringt, so muß zugegeben werden, daß bei uns, namentlich in den weniger für den Unterricht bestimmten Teilen, nach der umgekehrten Richtung ungebräuchlich weit gegangen wird. Dieselbe Sparsamkeit mit dem Raum war auch im Text geboten. Die Darstellung erstrebt in den für den Physiker bestimmten Teilen nur Verständlichkeit und scheut sich auch nicht, den Wohlklang und selbst strengere Stilvorschriften hinter das Bedürfnis der Kürze zurücktreten zu lassen. Mancher wird auch mit Recht die sehr zahlreichen Verweise auf andere Abschnitte lästig finden; es ließ sich aber nicht umgehen, gerade dieses für die Kürze ausgiebigste Mittel rücksichtslos zu benutzen.

Vielfach wird zur Begründung oder Ergänzung auf die Literatur verwiesen. Manche Gegenstände werden sogar durch einen bloßen solchen Hinweis erledigt. Meist erklärt sich dies durch die ganz spezielle oder eine in technische Anwendungen einschlagende Natur der Aufgabe, doch wird auch der Zufall hier mitgewirkt haben oder der Umstand, daß eine Aufgabe dem Verfasser fern lag.

Bei der Auswahl der Literatur sind selten Gesichtspunkte der Priorität bestimmend gewesen. Im historisch-didaktischen Interesse wird wohl einer Methode oder einem Instrument der Name des Entdeckers oder Erfinders beigefügt; im allgemeinen jedoch verfolgen die Hinweise (die, wenn sie vollständig sein sollten, allein ein Buch füllen würden) wesentlich die sachlichen Bedürfnisse des Nachschlagenden. So werden i. allg. die neueren Aufsätze bevorzugt, namentlich, wenn sie zugleich Zusammenstellungen der früheren Literatur geben. Nicht wenige Zitate in den letzten Abschnitten reichen bis in die allerneueste Zeit; gerade hier unterliegt das Kennenlernen freilich manchem Zufall, und wertvolles mag übersehen worden sein.

Angaben oder Vorschriften eines Autors nachzuprüfen ist bei der Fülle und Mannigfaltigkeit des Stoffes oft unmöglich. Diese Lage wird zuweilen verkannt, wenn nämlich bei der Kritik einer bisherigen Auffassung unserem Buche eine Verantwortung beigemessen wird, die an einer weiter zurückliegenden Stelle zu suchen ist.

Eine erfreulich zahlreiche Liste von Danksagungen an freundliche Mitarbeiter hat noch zu folgen. Vor allem an die Herren Holborn, Scheel, Grüneisen und F. A. Schulze, deren stetige aufopfernde Hilfe die Herausgabe begleitet hat und denen ferner die neue Auflage einen großen Teil der zahlreichen Vervollständigungen verdankt, namentlich die neuen Abschnitte aus Elastizität, Festigkeit und Schall, sowie die Behandlung der elektrischen Hochfrequenzschwingungskreise. Hervorzuheben sind hier auch die mancherlei wesentlichen Verbesserungen und Ergänzungen [illegible] in der Thermometrie hoher und tiefer Temperaturen [illegible] der Wärmestrahlung, in der Kalorimetrie [illegible] und [illegible] Zustandsbeschreibung: sodann vielfach in den [illegible] das ganze Buch hindurch ist ferner, im Text sowohl [illegible] in den Tabellen, das Zahlenmaterial vervollständigt und, wo [illegible] Forschungen angepaßt worden.

Wenn als Adressen, denen für die freundliche Bereitwilligkeit bei einem erbetenen Rat ein Dank gebührt, noch die Namen genannt werden: Diesselhorst, [illegible] Elster, W. Feußner, Flade, Hallwachs, [illegible] Kohlrausch, W. König, Lindeck, Nernst, Orlich, [illegible] Rubens, Schleiermacher, Voigt, Warburg, W. Wien, [illegible] geschieht dies einerseits mit Stolz auf die vielseitige [illegible] dem Buch, aber auch in dem Bewußtsein, daß keine [illegible] wurde, den Inhalt durch den Rat von maßgebender [illegible]. Betroffen werden hauptsächlich, außer Zahlenmaterial, [illegible] und namentlich den elektrischen Messungen; [illegible] der Kompensationsapparat, die Elektrometrie, Wechsel[illegible] die elektrochemischen und elektrotechnischen Abschnitte.

[illegible] um neue erdmagnetische Tabellen hat die Deutsche [illegible] bewährtem Entgegenkommen entsprochen. Die an[illegible] mittleren jährlichen Änderungen, ev. mit Hinzunahme der [illegible] früherer Auflagen, werden für eine Reihe von Jahren aus[illegible] die erdmagnetischen Elemente für einen Ort des mittleren [illegible] gewöhnlichen Zwecken genügend abzuleiten.

Eine besondere Stelle verdient der Dank an den alten Gönner des Leitfadens, meinen Freund Dorn, für den neuen Abschnitt über [illegible] Fundament der Naturwissenschaft, den jungen Riesen [illegible]. Dieses Kapitel halte ich, sicher übereinstimmend mit [illegible] für den willkommensten Zuwachs.

Marburg, im August 1909.

Inhalt.

Eine fette Ziffer bezeichnet einen neuen, ein * einen umgearbeiteten oder wesentlich ergänzten Abschnitt.

Elastizität und Schall.

Kapillarität. Reibung. Diffusion.

Licht- und Wärmestrahlung.

Magnetismus.

Elektrischer Strom.

Tabellen.

Tabellen.

Berichtigungen.

S. 127 Z. 24 u. 25. Statt 980,6 und 0,0026 genauer 980,62 und 0,00265.
S. 262 Z. 24 lies (Anh. 13a) statt (Anh. 13c).
S. 343 Z. 13 lies 4π statt 2π.
S. 361 Z. 12 lies $1-\alpha$ statt $\alpha-1$.
S. 410 Z. 8 lies 1907 statt 1901.
Tab. 12 setze neben Quecksilber 13,552.

Alphabetisches Verzeichnis.

Die römischen Zahlen bedeuten die Tabellen am Schluß.

Allgemeines über Messungen.

1. Beobachtungsfehler. Mittlerer und wahrscheinlicher Fehler.

Eine Größe messen heißt sie durch eine Zahl darstellen, welche angibt, wie oft die zugrunde gelegte Einheit in der gemessenen Größe enthalten ist.

Die durch Beobachtung gewonnene Zahl wird mit einem Fehler behaftet sein. Über die wahrscheinliche Fehlergrenze kann ein Urteil erstens aus der Übereinstimmung mehrerer Resultate und zweitens durch die Betrachtung der Methode abgeleitet werden.

Wenn eine Größe wiederholt gemessen worden ist und wenn, wie hier angenommen werden soll, die einzelnen Bestimmungen an sich denselben Grad von Zuverlässigkeit besitzen, so stellt bekanntlich das arithmetische Mittel den wahrscheinlichsten Wert dar.

Aus einer Reihe von Beobachtungen einzelne bloß deswegen auszuschließen, weil sie mit der Mehrzahl nicht übereinstimmen, ist im allgemeinen ungerechtfertigt. Der Wahrscheinlichkeit eines bei den abweichenden Zahlen begangenen größeren Fehlers wird durch das arithmetische Mittel selbst Rechnung getragen; denn als einzelne unter einer größeren Anzahl haben sie einen geringen Einfluß.

Die einzelnen Zahlen zeigen gegen ihr Mittel größere oder kleinere Differenzen, die „Fehler", aus deren Betrage die wahrscheinliche Genauigkeit der einzelnen Beobachtung oder des Resultates nach folgenden Regeln geschätzt wird. Man bildet die Summe der Fehlerquadrate (Tab. 51). Diese Summe gibt, durch die um 1 verminderte Anzahl der einzelnen Beobachtungen dividiert, das mittlere Fehlerquadrat; die Quadratwurzel hieraus ist der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtung. Dividiert man diesen durch die Quadratwurzel aus der Anzahl der Beobachtungen, so erhält man den sogenannten mittleren Fehler des Resultates.

Die Multiplikation des mittleren Fehlers mit 0,674 (nahe $\frac{2}{3}$) gibt den wahrscheinlichen Fehler, d. i. die Zahl, von der mit gleicher Wahrscheinlichkeit behauptet werden kann, der wirklich begangene Fehler sei kleiner, wie er sei größer als sie.

Bei einer sehr großen Anzahl von Bestimmungen ordne man die Fehler ohne Rücksicht auf ihr Vorzeichen nach der Größe. Dann gibt der in der Mitte liegende Wert nahe den wahrscheinlichen Fehler der Einzelbestimmung.

Den Umstand, daß ein durch Beobachtung gefundener Wert ebensowohl zu groß wie zu klein ausgefallen sein kann, deutet man durch ein dem Fehler vorgesetztes $\pm$ Zeichen an.

Bezeichnet man durch

n die Anzahl der einzelnen Bestimmungen,

$\Delta_1, \Delta_2 \ldots \Delta_n$ ihre Abweichungen vom Mittel,

S die Summe der Fehlerquadrate, d. h.

$$S = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2,$$

so ist also der mittlere Fehler

der einzelnen Messung des Mittelwertes

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\frac{S}{n-1}} \qquad \mathsf{E} = \pm \sqrt{\frac{S}{n(n-1)}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Die wahrscheinlichen Fehler betragen $\frac{2}{3}$ hiervon.

Die mutmaßliche Genauigkeit eines Mittelwertes wächst also mit der Wurzel aus der Anzahl der Beobachtungen.

Über die Fehlerrechnung in allgemeineren Fällen vgl. **2** und **3**[1]).

Beispiel. Die Dichtigkeit eines Körpers wurde zehnmal bestimmt:

Gefunden	Δ	Δ^2
9,662	— 0,0019	0,000004
9,673	+ 091	083
9,664	+ 001	000
9,659	— 049	024
9,677	+ 131	172
9,662	— 019	004
9,663	— 009	001
9,680	+ 161	259
9,645	— 189	357
9,654	— 0,0099	0,000098
Mittel 9,6639		$S = 0{,}001002$

Also mittlerer Fehler einer Messung: $\varepsilon = \sqrt{\frac{0{,}001002}{10-1}} = \pm 0{,}011$,

mittlerer Fehler des Mittelwertes: $\mathsf{E} = \pm 0{,}011/\sqrt{10} = \pm 0{,}0033$.

Die wahrscheinlichen Fehler betragen folglich $\pm 0{,}007$ bez. $\pm 0{,}0022$.

1) Fette Ziffern im Text sind Hinweise auf Paragraphen des Buches.

Die Zahl 0,007 bedeutet, daß der Fehler einer einzelnen Dichtigkeitsbestimmung dieses Körpers, mit denselben Instrumenten mit gleicher mittlerer Sorgfalt und Erfahrung ausgeführt wie die obigen, ebenso wahrscheinlich kleiner wie größer ist als 0,007; in den obigen Zahlen trifft dies zufällig genau zu.

Selbstverständlich wird durch diese Rechnung nur der Teil des Fehlers ausgedrückt, welcher durch die eigentliche Unsicherheit der Beobachtung entsteht, das heißt durch solche Beobachtungsfehler, die ebenso häufig einen zu großen wie einen zu kleinen Wert ergeben. Außerdem können einseitige Fehler vorhanden sein, die aus den Angaben der Instrumente oder auch daraus entstehen, daß der Beobachter sich vorwiegend nach einer bestimmten Richtung irrt. Solche Fehler müssen besonders ermittelt oder durch eine geeignete Kombination von Beobachtungen oder Abwechselung der Methoden eliminiert werden.

Die obigen Bestimmungen sind von verschiedenen Beobachtern mit verschiedenen Gewichtssätzen und Thermometern angestellt worden. Fehler der Wage von einseitiger Richtung sind nicht anzunehmen. Eine Quelle eines einseitigen Fehlers könnte aber z. B. durch nicht beachtete Luftbläschen am Körper entstanden sein, welche die Dichtigkeit immer zu klein erscheinen lassen.

„Gewicht“ einer Messung. Die Einzelresultate, aus denen ein Schlußresultat berechnet wird, sind nicht immer gleich zuverlässig. Diesen Umstand sucht man dadurch zu berücksichtigen, daß man den Einzelwerten ein verschiedenes „Gewicht“ beilegt, d. h. daß man sie bei der Mittelnahme einfach, doppelt oder dreifach usw. (Gewicht eins, zwei, drei usw.) in Rechnung setzt. Das arithmetische Mittel aus mehreren Resultaten r_1, r_2 etc., deren Gewichte $= p_1, p_2$ etc. sind, ist also

$$r = \frac{p_1 r_1 + p_2 r_2 + \cdots}{p_1 + p_2 + \cdots}.$$

Das Gewicht von Einzelresultaten, die schon aus mehreren gleichwertigen Beobachtungen abgeleitet worden waren, ist je gleich der Anzahl der benutzten Beobachtungen zu setzen, was ja auf das nämliche hinausführt, wie wenn man alle einzelnen Beobachtungen zum Mittel vereinigt.

Es können mannigfaltige Ursachen vorliegen, die den einzelnen Resultaten eine verschieden große Zuverlässigkeit erteilen und die zur Beilegung verschiedener Gewichte veranlassen; die

Beurteilung dieser Frage bleibt der Umsicht und der Gewissenhaftigkeit des Beobachters überlassen.

Aus dem mittleren Fehler ε eines Resultates folgt das Gewicht p des letzteren proportional $1/\varepsilon^2$.

Eingehenderes über Fehlerrechnung s. z. B. Gaufs, Abhandl. über Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ges. Werke Bd. IV, und deutsch von Börsch u. Simon, 1887; Weinstein, physik. Maßbestimmungen Bd. I, 1886; Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1903. Besonders Helmert, die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, 2. Aufl. 1907.

2. Beurteilung des Fehlers aus der Methode; Einfluß der Beobachtungsfehler auf das Resultat.

Im allgemeinen wird ein Resultat nicht direkt durch die Beobachtung gegeben, sondern es muß aus ihr oder auch aus mehreren Beobachtungen durch Rechnung ermittelt werden: beispielsweise ein Gewicht aus Ablesungen am Zeiger der Wage, eine Gasdichte aus einer Ausströmungszeit, eine elektrische Stromstärke aus einem Ausschlagswinkel, ein spezifisches Gewicht aus mehreren Wägungen, ein Elastizitätsmodul aus Längenmessungen. Hierbei entsteht die Aufgabe, den Fehler des Resultates zu kennen, welcher aus einem Fehler der beobachteten Größen entspringt.

Den Zweck dieser Fehlerrechnung kann, außer einer Schätzung der Genauigkeit des Resultates selbst, das Urteil über etwa gestattete Abkürzungen der Rechnung bilden, oder über die Frage, auf welchen Teil der Messung die größte Sorgfalt zu verwenden ist. Auch liegt es häufig in unserer Gewalt, die Verhältnisse eines Versuches in verschiedener Weise anzuordnen: die Fehlerrechnung läßt beurteilen, welche Anordnung den geringsten Einfluß der Beobachtungsfehler auf das Resultat bewirkt.

Aus solchen Betrachtungen folgt z. B. die Regel für die Bestimmung der erdmagnetischen Intensität, daß man die beiden Abstände des ablenkenden Magnets am günstigsten etwa im Verhältnis 1,4 nimmt (**73** II); daß die Messung einer elektrischen Stromstärke mit der Tangentenbussole den relativ genauesten Wert nicht bei einem möglichst großen Ausschlage, sondern bei etwa 45° liefert (vgl. **81** u. S. 6); daß die beiden Stromstärken, aus denen der Widerstand oder die Spannung einer galvanischen Säule bestimmt wird, etwa im Verhältnis 1 : 2 gewählt werden (**97** 1 u. **100** II 2); daß das log. Dekrement eines Schwingungszustandes bei einem Verhältnis

der beiden Schwingungsweiten ungefähr = 3 relativ am genauesten beobachtet wird (27). Dagegen wird für die genaue Bestimmung eines Lichtbrechungsverhältnisses der Prismenwinkel tunlichst groß gewählt usw.

I. Ein aus einer einzigen beobachteten Größe abgeleitetes Resultat. Das gesuchte Resultat (z. B. die Stromstärke) heiße z, die beobachtete Größe (der Ausschlagswinkel) heiße x. Es ist dann z als Funktion von x, d. h. durch irgendeinen mathematischen Ausdruck gegeben, in welchem x vorkommt. Nennen wir nun ξ den in x begangenen Fehler, so wird der hierdurch hervorgebrachte Fehler von z, welcher ζ heiße, dadurch gefunden, daß man in den Ausdruck, aus welchem z berechnet wird, $x + \xi$ anstatt x einsetzt. Dabei muß selbstverständlich der Fehler ξ in derselben Einheit ausgedrückt werden wie die Größe x selbst. Jetzt wird man ein von dem richtigen Werte z etwas verschiedenes Resultat finden: die Größe dieses Unterschiedes ist der Fehler ζ.

Vorausgesetzt, daß die Beobachtungsfehler relativ kleine Größen sind, lassen sich diese Rechnungen sehr vereinfachen. So beachte man folgende Regeln:

1. Es ist zur Bestimmung des Fehlers im Resultate erlaubt, für die beobachtete Größe, die oben x genannt wurde, einen genäherten Wert zu setzen, was deswegen von Bedeutung ist, weil man den fehlerfreien Wert ja nicht kennt.

2. Korrektionsglieder (4), welche in der Formel für das Resultat vorkommen, dürfen, insofern man nicht etwa ihren Einfluß selbst untersucht, bei der Fehlerrechnung vernachlässigt werden.

3. Der Fehler im Resultat, welcher aus einem Beobachtungsfehler entsteht, wächst im allgemeinen der Größe des letzteren proportional. Mit anderen Worten: der Fehler des Resultates, die oben durch ζ bezeichnete Differenz, läßt sich als ein Produkt darstellen, in dem der Fehler ξ der beobachteten Größe der eine Faktor ist.

4. Hieraus folgt auch, daß die Fehler des Resultates, welche aus gleich großen, aber im entgegengesetzten Sinne begangenen Fehlern einer Beobachtung hervorgehen würden, an Größe gleich sind, aber entgegengesetztes Vorzeichen haben.

Es kann vorkommen, daß der Resultatfehler nicht dem Beobachtungsfehler proportional ist, sondern z. B. dessen Quadrate oder auch dem Pro-

dukte mehrerer Fehler. Dann werden die Sätze unter 3 und 4, bez. auch unter 2 hinfällig.

Die Rechnung wird gekürzt mittels der für das Rechnen mit kleinen Größen geltenden Regeln. Diese lassen sich mit Hilfe der Differentialrechnung zusammenfassen. Ist nämlich ξ der in dem beobachteten Werte x begangene Fehler, so wird der Fehler ζ des Resultates z erhalten, indem man den Differentialquotienten der Funktion z nach x mit ξ multipliziert. Also

$$\zeta = \xi \cdot \frac{\partial z}{\partial x}. \qquad 1.$$

Meistens liefern die auf S. 9 u. 10 gegebenen Näherungsformeln das gewünschte ohne Differenzieren. Einige Beispiele sollen dies zeigen.

1. Beispiel: Eine Gasdichte z werde (**20** B) aus der Ausströmungszeit x einer Gasmenge abgeleitet mittels der Formel $z = Cx^2$, wo C eine für den Apparat bekannte Konstante bedeutet. Es fragt sich, um welche Größe ζ das Resultat falsch wird, wenn x um den relativ kleinen Wert ξ falsch beobachtet wird. Man hat also den Ansatz $z + \zeta = C(x + \xi)^2$. Für den Ausdruck rechts schreiben wir nach S. 9, 2

$$C(x+\xi)^2 = Cx^2\left(1+\frac{\xi}{x}\right)^2 = z\left(1+2\frac{\xi}{x}\right) = z + 2z\frac{\xi}{x}.$$

Der Fehler ζ ist also $\zeta = 2z\frac{\xi}{x}$, oder es ist $\frac{\zeta}{z} = 2\frac{\xi}{x}$.

Der in z auftretende relative Fehler ist also das Doppelte des in x begangenen relativen Fehlers.

Differentiation von $z = Cx^2$ gibt $\partial z/\partial x = 2Cx$, also den Fehler $\zeta = \xi \cdot 2Cx$, oder wie oben $\zeta/z = 2\xi/x$.

Am einfachsten erhält man relative Fehler oft durch „logarithmisches Differenzieren". Schreibt man statt $z = Cx^2$ $\lg z = \lg C + 2\lg x$ und differenziert diese Formel, so kommt $dz/z = 2dx/x$ ohne weiteres.

Jene Verdoppelung tritt immer auf, wenn das Resultat quadratisch von der beobachteten Größe abhängt, also z. B. bei dem aus einer Schallgeschwindigkeit abgeleiteten Elastizitätsmodul oder einer mit dem gewöhnlichen Photometer bestimmten Lichtstärke. Umgekehrt wirkt der relative Fehler der Beobachtung auf das Resultat halbiert ein, wenn dieses die Quadratwurzel der Beobachtung enthält, so daß eine solche Methode cet. par. viermal günstiger ist als die erstere.

2. Beispiel. Eine elektrische Stromstärke z werde aus dem Ablenkungswinkel x einer Tangentenbussole (**81**) nach der Formel $z = C \cdot \operatorname{tg} x$ bestimmt, wo C einen konstanten Faktor bedeutet. Wird ein Ablesefehler ξ begangen, so folgt der Fehler ζ in z aus

$$z + \zeta = C \cdot \operatorname{tg}(x + \xi) = C\left(\operatorname{tg} x + \frac{\xi}{\cos^2 x}\right)$$

nach der dritten Formel 10 (S. 10). Also ist

$$\zeta = C\frac{\xi}{\cos^2 x} = z\frac{\xi}{\sin x \cos x} = z\frac{2\xi}{\sin 2x}.$$

Differentiation gibt $\partial z/\partial x = C/\cos^2 x$, also $\zeta = \xi \cdot C/\cos^2 x$ etc. q. e. d.

Es ist also $2\xi/\sin 2x$ der in Bruchteilen von z ausgedrückte Fehler, welcher dem Ablesungsfehler ξ entspricht. Hieraus folgt, daß Winkel von ungefähr 45° am günstigsten sind, weil für $x = 45°$ der Nenner $\sin 2x$ seinen größten Wert Eins erhält.

II. Ein aus mehreren Beobachtungsdaten zusammengesetztes Resultat. Ein solches stellt sich in einem mathematischen Ausdruck dar, welcher die verschiedenen beobachteten Größen enthält. Von diesen können mehrere einen Fehler enthalten; den Einfluß des in einer Größe begangenen Fehlers findet man, seltene Ausnahmen vorbehalten, ohne Rücksicht auf die übrigen Fehler.

Allgemein findet man den Fehler ε in einem Resultate u, dessen Abhängigkeit von den beobachteten Größen $x, y \ldots$ dargestellt werde durch $u = f(x, y \ldots)$, wieder mittels der Näherungsformeln S. 9f. oder allgemein durch partielles Differenzieren. Sind nämlich $\xi, \eta \ldots$ die bei der Beobachtung von $x, y \ldots$ begangenen Einzelfehler, so wird der Fehler des Resultates

$$\varepsilon = \xi\frac{\partial f(x, y \ldots)}{\partial x} + \eta\frac{\partial f(x, y \ldots)}{\partial y} + \cdots \qquad 2.$$

Von vornherein ist nicht zu sagen, in welchem Sinne der Einzelfehler begangen wird; er kann mit gleicher Wahrscheinlichkeit das Resultat u zu klein oder zu groß machen. Der Gesamtfehler wird je nach dem zufälligen Zusammentreffen der Vorzeichen größer oder kleiner ausfallen. Sein größter Betrag wird erhalten, wenn man die möglichen Partialfehler von u sämtlich mit gleichem Vorzeichen nimmt. Den durch das Zusammenwirken im Mittel zu erwartenden Fehler findet man, indem man aus der Summe der Quadrate der Partialfehler die Wurzel zieht.

Bedeuten also $\pm[\varepsilon]$, bez. $\pm[\xi]$, $\pm[\eta] \ldots$ die mittleren Fehler des Resultates u, bez. der beobachteten Größen $x, y \ldots$, so gilt

$$[\varepsilon]^2 = [\xi]^2\left(\frac{\partial f(x, y \ldots)}{\partial x}\right)^2 + [\eta]^2\left(\frac{\partial f(x, y \ldots)}{\partial y}\right)^2 \ldots \qquad 3.$$

3. Beispiel. Dichtigkeitsbestimmung eines festen Körpers nach **15** B 3. Es sei m das Gewicht des Körpers in der Luft, m' sein Ge-

wicht im Wasser, so ist die Dichtigkeit $s = \frac{m}{m - m'}$. Hier entspricht s der oben u genannten Größe, m und m' dem x und y.

Die Fehler in m und in m' dürfen, da beide Beobachtungen voneinander unabhängig sind, einzeln betrachtet werden. Ist bei der Wägung in Luft $m + \mu$ anstatt des richtigen Gewichts m gefunden, so wird die Dichtigkeit erhalten $\frac{m + \mu}{m + \mu - m'}$ oder mit Anwendung der Formel 8, S. 9,

$$\frac{m}{m - m'} \frac{1 + \mu/m}{1 + \mu/(m - m')} = s\left(1 + \frac{\mu}{m} - \frac{\mu}{m - m'}\right) = s - \mu \frac{m'}{(m - m')^2}.$$

Der Fehler des Resultates ist also $\sigma = -\mu \cdot m'/(m - m')^2$.

Zweitens sei bei der Wägung im Wasser $m' + \mu'$ anstatt m' gefunden. Das fehlerhafte Resultat wird, ähnlich wie oben,

$$\frac{m}{m - (m' + \mu')} = \frac{m}{m - m'} \frac{1}{1 - \mu'/(m - m')} = s\left(1 + \frac{\mu'}{m - m'}\right).$$

Das Resultat würde also um $\sigma' = \mu' \cdot m/(m - m')^2$ zu groß ausfallen.

Der Gesamtfehler, welcher aus den beiden Beobachtungsfehlern μ und μ' zusammengesetzt ist, hat offenbar den größten Wert $\pm \frac{m'\mu + m\mu'}{(m - m')^2}$, wenn entweder m zu groß und m' zu klein gefunden ist, oder beide umgekehrt. Der zu erwartende mittlere Gesamtfehler ist (Gl. 3, S. 7)

$$\pm\sqrt{\sigma^2 + \sigma'^2} = \pm \frac{\sqrt{(m'\mu)^2 + (m\mu')^2}}{(m - m')^2}.$$

Zahlenbeispiel. Der Körper (S. 2) wog rund in Luft $m = 244$ und im Wasser $m' = 218$ gr. Der größte Fehler der Wage war auf $\mu = 0{,}005$, bei der weniger genauen Wägung unter Wasser auf $\mu' = 0{,}008$ gr zu schätzen. Hiermit ergeben die Formeln

von μ stammend den Fehler $\sigma = 0{,}005 \cdot 218/26^2 = 0{,}0016$,
von μ' „ „ „ $\sigma' = 0{,}008 \cdot 244/26^2 = 0{,}0029$.

Im ungünstigen Falle beträgt danach der Gesamtfehler, wenn z. B. m zu klein und m' zu groß bestimmt wurde, 0,0045, im wahrscheinlichen Falle $\sqrt{(\sigma^2 + \sigma'^2)} = \pm 0{,}0033$. Wenn einzelne der Bestimmungen (S. 2) erheblich größere Abweichungen zeigen, so müssen andere Fehlerquellen als die Unsicherheit der Wägung bestanden haben. (Luftbläschen, ungenaue Temperaturbestimmung, fehlerhaftes Abzählen der Gewichtstücke.)

4. Beispiel. Die Schwerbeschleunigung g (35) wird aus Länge l und Schwingungsdauer t eines Pendels nach dem Ausdruck $g = \pi^2 \cdot l/t^2$ gefunden. l sei um λ und t um τ falsch bestimmt. Die beiden Fehler sollen gleich miteinander betrachtet werden. Es ist nach Gl. 2 u. 8, S. 9,

$$g + \gamma = \pi^2 \frac{l + \lambda}{(t + \tau)^2} = \pi^2 \frac{l}{t^2} \frac{1 + \lambda/l}{(1 + \tau/t)^2} = g \frac{1 + \lambda/l}{1 + 2\tau/t} = g\left(1 + \frac{\lambda}{l} - 2\frac{\tau}{t}\right)$$

$= g + g\left(\frac{\lambda}{l} - 2\frac{\tau}{t}\right)$. Also wird $\frac{\gamma}{g} = \frac{\lambda}{l} - 2\frac{\tau}{t}$, d. h. es kommt der relative Fehler in l einfach, derjenige in t doppelt zur Wirkung.

Dasselbe erhält man leicht aus Formel 1, indem man die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial g}{\partial l} = \pi^2 \frac{1}{t^2}$ und $\frac{\partial g}{\partial t} = -\pi^2 \cdot 2 \frac{l}{t^3}$ bildet.

Am übersichtlichsten ist bei einer Gleichung von der obigen Form das „logarithmische Differenzieren"; aus der Gleichung $\lg g = \lg \pi^2 + \lg l - 2 \lg t$ ergibt sich sofort $\mathrm{d}g/g = \mathrm{d}l/l - 2\,\mathrm{d}t/t$.

Man beachte aber noch folgendes. Um den größten Fehler in g zu finden, darf man nicht, wie es nach dem Ausdruck erscheint, den einen Teil vom anderen abziehen. t kann ebensowohl zu klein wie zu groß beobachtet worden sein; im ersteren Falle würde das Minuszeichen sich umkehren. Der größtmögliche Resultatfehler ist stets durch Addieren der Partialfehler zu berechnen.

Im Mittel ist zu erwarten (Gl. 3, S. 7) $\frac{\gamma}{g} = \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda}{l}\right) + 4\left(\frac{\tau}{t}\right)^2}$.

Näherungsregeln für das Rechnen mit kleinen Größen.

Ein mathematischer Ausdruck, in welchem einzelne Größen gegen andere sehr klein sind, läßt sich für die Rechnung oft vereinfachen. Kann man dem Ausdruck eine Form geben, welche die Korrektionsgröße nur in einem zu 1 addierten Gliede enthält, so wird man häufig von einer der folgenden Formeln Gebrauch zur Vereinfachung machen können.

Die mit δ, ε, ζ ... bezeichneten Größen sollen gegen 1 so klein sein, daß ihre höheren Potenzen δ^2, ε^2 ... sowie ihre Produkte $\delta \cdot \varepsilon$, $\delta \cdot \zeta$ ..., die ja wieder gegen δ, ε ... selbst sehr klein sind, gegen 1 vernachlässigt werden dürfen. Ist z. B. $\delta = 0{,}001$, so ist $\delta^2 = 0{,}000001$. Wenn etwa ferner $\varepsilon = 0{,}005$, so wird $\delta \cdot \varepsilon = 0{,}000005$. Es kommt oft vor, daß einige Tausendtel noch wichtig, einige Milliontel dagegen gleichgültig sind.

Unter diesen Gesichtspunkten gelten die folgenden Formeln, in denen die rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Ausdrücke für die Rechnung oft bequemer sind. Die Formeln 2 bis 6 sind spezielle Fälle von 1.

Eine Größe mit $\pm$ oder $\mp$ soll überall in der Formel entweder mit dem oberen oder mit dem unteren Zeichen genommen werden.

1. $(1+\delta)^m = 1 + m\delta$. $\qquad (1-\delta)^m = 1 - m\delta$.
2. $(1+\delta)^2 = 1 + 2\delta$. $\qquad (1-\delta)^2 = 1 - 2\delta$.
3. $\sqrt{1+\delta} = 1 + \frac{1}{2}\delta$. $\qquad \sqrt{1-\delta} = 1 - \frac{1}{2}\delta$.
4. $\frac{1}{1+\delta} = 1 - \delta$. $\qquad \frac{1}{1-\delta} = 1 + \delta$.
5. $\frac{1}{(1+\delta)^2} = 1 - 2\delta$. $\qquad \frac{1}{(1-\delta)^2} = 1 + 2\delta$.
6. $\frac{1}{\sqrt{1+\delta}} = 1 - \frac{1}{2}\delta$. $\qquad \frac{1}{\sqrt{1-\delta}} = 1 + \frac{1}{2}\delta$.
7. $(1 \pm \delta)(1 \pm \varepsilon)(1 \pm \zeta) \ldots = 1 \pm \delta \pm \varepsilon \pm \zeta \ldots$
8. $\frac{(1 \pm \delta)(1 \pm \zeta) \ldots}{(1 \pm \varepsilon)(1 \pm \eta) \ldots} = 1 \pm \delta \pm \zeta \ldots \mp \varepsilon \mp \eta \ldots$

Weiter kann man statt des geometrischen Mittels zweier wenig ver-

schiedener Größen p_1 und p_2 das arithmetische setzen (Beweis 4 Beisp. 3):

9. $$\sqrt{p_1 p_2} = \tfrac{1}{2}(p_1 + p_2).$$

10. $$\sin(x+\delta) = \sin x + \delta \cos x, \qquad \sin\delta = \delta,$$
$$\cos(x+\delta) = \cos x - \delta \sin x, \qquad \cos\delta = 1,$$
$$\operatorname{tg}(x+\delta) = \operatorname{tg} x + \frac{\delta}{\cos^2 x}, \qquad \operatorname{tg}\delta = \delta.$$

Als Einheit für δ gilt der Winkel (57,°3), für welchen der Bogen dem Radius gleich ist. In zweiter Annäherung ist (vgl. auch Tab. 50[a])

11. $$\sin\delta = \delta(1 - \tfrac{1}{6}\delta^2); \qquad \cos\delta = 1 - \tfrac{1}{2}\delta^2; \qquad \operatorname{tg}\delta = \delta(1 + \tfrac{1}{3}\delta^2).$$

12. $$\log\text{nat}(x+\delta) = \log\text{nat}\, x + \frac{\delta}{x} - \tfrac{1}{2}\frac{\delta^2}{x^2}; \qquad \log\text{nat}(1+\delta) = \delta - \tfrac{1}{2}\delta^2.$$

13. $$\log\text{nat}\frac{x+\delta}{x-\delta} = 2\frac{\delta}{x} + \tfrac{2}{3}\frac{\delta^3}{x^3}.$$

3. Rechnen mit kleinsten Quadraten (Gaufs).

Ausführliches siehe besonders in Helmert, die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, 2. Aufl. 1907.

Die Fehlerausgleichung nach kleinsten Quadraten beruht theoretisch darauf, daß die Wahrscheinlichkeit der Fehlerverteilung nach ihrer Größe einem, von Gaufs aufgestellten Gesetze entspricht, wobei insbesondere positive und negative Fehler gleich wahrscheinlich sein müssen. Wenn diese Bedingungen nicht erfüllt sind, so hat die Methode doch noch die Bedeutung eines rechnerisch stets durchführbaren Verfahrens, die zu bestimmenden Größen den Beobachtungen möglichst anzuschließen; vgl. Helmert l. c. S. 115. Darüber, ob die übrig bleibenden Fehler dem Wahrscheinlichkeitsgesetze entsprechen, vgl. ib. S. 328.

I. Um Beobachtungsfehler auszugleichen, genügt das arithmetische Mittel nicht immer, weil häufig die gesuchte Größe, neben einer oder mehreren beobachteten, nur in einer Gleichung vorkommt, die man nicht auf jene Größe auflöst. Sie spielt dann die Rolle einer Konstanten, deren Zahlenwert so ermittelt werden soll, daß den Beobachtungen genügt wird.

Ein einfaches Beispiel, an welchem die Aufgabe erläutert werden soll, ist die Bestimmung eines Wärmeausdehnungs-Koeffizienten, der in einer Gleichung auftritt, welche außerdem die beobachteten Größen, hier Längen und Temperaturen, enthält.

Als sonstige Beispiele mögen genannt werden die Bestimmungen eines Elastizitätsmoduls aus Ausdehnungen, einer spezifischen Wärme aus Abkühlungszeiten, einer Galvanometerkonstante aus Skalenausschlägen, einer elektromotorischen Kraft aus kompensierenden Widerständen, eines Winkels durch ein Repetitionsverfahren.

Nicht selten treten in der Gleichung mehrere unbekannte Konstanten auf, z. B. die Faktoren linearer, quadratischer usw

Glieder, oder auch neben der Hauptkonstante, deren Ermittelung den Zweck der Beobachtungen bildet, noch unbekannte Faktoren von Korrektionsgliedern, von Temperatureinflüssen usw.; diese Größen müssen dann mit einander bestimmt werden.

Zu diesem Zwecke werden also mindestens so viele Beobachtungen verlangt, wie unbekannte Größen vorkommen; wenn gerade nur diese Anzahl vorliegt, so werden durch das Einsetzen der beobachteten Werte in den mathematischen Ausdruck so viele Gleichungen wie Unbekannte gewonnen und die letzteren sind hierdurch bestimmt. Vgl. auch III, S. 16. Liegt jedoch eine größere Anzahl von Beobachtungen vor, so lassen sich die Konstanten im allgemeinen nicht so bestimmen, daß allen Beobachtungen genügt wird, sondern es bleiben Abweichungen gegen die Rechnung übrig, die „Fehler“ der Einzelbeobachtungen. Diese Fehler „auszugleichen“, d. h. solche Resultate abzuleiten, daß die übrig bleibenden Abweichungen möglichst klein ausfallen, bildet eine der wichtigsten Aufgaben, die, wenn sie auch häufig dadurch erleichtert werden kann, daß die Beobachtungen zum voraus dem Zwecke gemäß verteilt worden sind, doch oft zu Schwierigkeiten und leicht zu Willkür führt.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung bietet nun in der *Methode der kleinsten Quadrate* für solche Aufgaben ein systematisches Verfahren.

Beispiel. Die Länge eines Stabes für 0° und seine Verlängerung auf 1° Temperaturerhöhung ist aus einer Anzahl von Längenmessungen bei verschiedenen Temperaturen abzuleiten. Nennen wir A die Länge bei 0°, B die Verlängerung für 1°, so ist für die Temperatur t die Länge u

$$u = A + Bt.$$

A und B sind die unbekannten, zu bestimmenden Konstanten, u und t sind die beobachteten Größen. Zwei Beobachtungen würden genügen. Sind nur für die Temperaturen t_1 und t_2 die resp. Längen u_1 und u_2 beobachtet, so folgt aus $u_1 = A + Bt_1$ und $u_2 = A + Bt_2$

$$A = \frac{t_1 u_2 - t_2 u_1}{t_1 - t_2}, \qquad B = \frac{u_1 - u_2}{t_1 - t_2}.$$

Es mögen außer t_1, u_1 und t_2, u_2 noch die zusammengehörenden Wertepaare t_3, u_3 t_4, u_4 usw. vorliegen. Wären die Beobachtungen fehlerfrei, so würden die gesuchten Größen A und B, aus irgendwelchen zwei Paaren berechnet, stets dieselben Zahlenwerte annehmen. In Wirklichkeit aber findet man der Fehler wegen keine Zahlen für A und B, die den sämtlichen Beobachtungen völlig genügen.

Der Grundsatz der Methode der kleinsten Quadrate sagt: die Konstanten sollen so bestimmt werden, daß die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum wird. Das heißt: je nach verschiedenen Zahlenwerten der Konstanten werden die mit letzteren aus dem Gesetze berechneten Werte u von den beobachteten um verschiedene Größen (die Fehler) abweichen. Die wahrscheinlichsten Werte der Konstanten sind diejenigen, bei denen die Summe der zweiten Potenzen aller Abweichungen möglichst klein wird.

Wir bezeichnen den mathematischen Ausdruck von bekannter Form, welcher die Abhängigkeit der beobachteten Größe u von einer anderen t (ev. auch von mehreren anderen) darstellt, allgemein als Funktion von t durch das Symbol $\mathrm{f}(t)$. Die gesuchten Größen kommen in $\mathrm{f}(t)$ als Konstanten vor, die wir durch $A, B \ldots$ bezeichnen. Die Gleichung ist also

$$u = \mathrm{f}(t). \qquad 1.$$

Beobachtet seien mehrere Größen $u_1, u_2 \ldots u_n$, welche zu den bekannten Größen $t_1, t_2 \ldots t_n$ gehören. Nach obigem Satze sollen die Zahlenwerte von $A, B \ldots$ so bestimmt werden, daß, wenn man sie in $\mathrm{f}(t)$ einsetzt, die Summe der Quadrate der Differenzen zwischen den berechneten und beobachteten Größen u möglichst klein wird[1]). Also es soll sein

$$[u_1 - \mathrm{f}(t_1)]^2 + [u_2 - \mathrm{f}(t_2)]^2 + \ldots + [u_n - \mathrm{f}(t_n)]^2 = \text{Minimum}$$

oder durch das Summenzeichen Σ bezeichnet

$$\Sigma[u - \mathrm{f}(t)]^2 = \text{Min.} \qquad 2.$$

Es ist im Auge zu behalten, daß sämtliche u und t bekannte, beobachtete Größen sind. Wie man nötigenfalls die Gleichungen zuvor „auf gleiche Genauigkeit gebracht hat“, siehe unter IV.

Nach einem Satze der Differentialrechnung ist zu diesem Zwecke der Ausdruck $\Sigma[u - \mathrm{f}(t)]^2$ nach $A, B \ldots$ zu differenzieren, indem man letztere Größen als Veränderliche behandelt, und jeder partielle Differential-

1) Man schiebt hier die Fehler auf eine einzige der beobachteten Größenarten (u), was nicht selten merklich gestattet ist; in unserem Beispiel des Ausdehnungskoeffizienten eines Stabes werden die Fehler der Längenbestimmung in der Tat diejenigen der Temperaturmessung meist weit überwiegen. Nicht immer aber ist jene Annahme gerechtfertigt; vgl. hierüber V.

quotient gleich Null zu setzen. Man erhält also gerade so viele „Normalgleichungen", wie Größen $A, B\ldots$ zu bestimmen sind, nämlich

$$\frac{\partial \Sigma[u-\mathrm{f}(t)]^2}{\partial A}=0, \qquad \frac{\partial \Sigma[u-\mathrm{f}(t)]^2}{\partial B}=0 \text{ usw.} \qquad 3.$$

Auf diesem Wege können beliebig viele Beobachtungen gleichmäßig benutzt werden.

Die gewöhnliche Ableitung eines Resultates aus verschiedenen Beobachtungen eines und desselben Objekts als arithmetisches Mittel ist die einfachste Anwendung dieses Satzes. Denn wenn $u_1, u_2 \ldots u_n$ die einzelnen beobachteten Größen und A das aus ihnen abzuleitende Resultat bezeichnen, so soll A so bestimmt werden, daß $\Sigma[u-A]^2=$ Min., also $\frac{\partial \Sigma[u-A]^2}{\partial A}$ d. h. $2\Sigma(u-A)=0$ oder $(u_1-A)+(u_2-A)+\cdots+(u_n-A)=0$ wird. Dies gibt $A=\frac{1}{n}(u_1+u_2+\cdots+u_n)$

Freilich kommt es nicht selten vor, daß die durch Differentiation nach $A, B\ldots$ entstehenden Gleichungen nicht direkt auflösbar sind. Dann muß die Lösung durch Probieren und Annäherung gesucht werden. In dem häufigen Falle, wo $\mathrm{f}(t)$ die Form hat $\mathrm{f}(t)=A+Bt+Ct^2\ldots$, ist die direkte Lösung immer möglich. Vgl. III und IV.

Fortsetzung des Beispiels. Es sind bei den Temperaturen $t_1, t_2 \ldots t_n$ die Längen $u_1, u_2 \ldots u_n$ beobachtet. Im vorliegenden Falle ist $u=\mathrm{f}(t)=A+Bt$. Es sollen A und B so bestimmt werden, daß

$$(u_1-A-Bt_1)^2+(u_2-A-Bt_2)^2+\cdots+(u_n-A-Bt_n)^2=\text{Min.}$$

oder kurz $\qquad \Sigma(u-A-Bt)^2=\text{Min.}$

Die Differentiation ergibt

nach A $\quad \Sigma(u-A-Bt)=0,\qquad$ nach B $\quad \Sigma t(u-A-Bt)=0,$

oder, weil hier $\Sigma A=A\cdot n$ ist,

$$\Sigma u-An-B\Sigma t=0, \qquad \Sigma tu-A\Sigma t-B\Sigma t^2=0.$$

Aus diesen Gleichungen findet sich

$$A=\frac{\Sigma t\Sigma tu-\Sigma u\Sigma t^2}{(\Sigma t)^2-n\Sigma t^2}, \qquad B=\frac{\Sigma t\Sigma u-n\Sigma tu}{(\Sigma t)^2-n\Sigma t^2}.$$

Als kurzes Beispiel einer Zahlenrechnung werde ein Meterstab angenommen, der auch für höhere Temperaturen dienen soll. Durch Vergleichung mit einem Normalmaßstabe sei gefunden

bei der Temp. $t_1=20^0 \quad t_2=40^0 \quad t_3=50^0 \quad t_4=60^0$

die Länge $u_1=1000{,}22 \quad u_2=1000{,}65 \quad u_3=1000{,}90 \quad u_4=1001{,}05$ mm.

Nach diesen Beobachtungen soll die Länge u bei der Temperatur t als $u=A+Bt$ dargestellt werden.

Zur Vereinfachung der Zahlenrechnung ziehen wir von allen Längen

u den Betrag 1000 mm ab und nennen den Rest u, dann erhalten wir für A auch nur den Überschuß der Länge bei 0° über 1 m. Die Rechnung stellt sich in folgendem Schema dar:

Nr.	t	u	t^2	tu
1.	20	+ 0,22	400	4,4
2.	40	0,65	1600	26,0
3.	50	0,90	2500	45,0
4.	60	1,05	3600	63,0
	$\Sigma t = 170$	$\Sigma u = 2,82$	$\Sigma t^2 = 8100$	$\Sigma t u = 138,4$

Also ist $$A = \frac{170 \cdot 138,4 - 2,82 \cdot 8100}{170^2 - 4 \cdot 8100} = -0,196 \text{ mm},$$

und $$B = \frac{170 \cdot 2,82 - 4 \cdot 138,4}{170^2 - 4 \cdot 8100} = +0,0212.$$

Die Länge des Stabes bei 0° ist in der angenommenen Formel also $= 1000 - 0,196 = 999,804$ mm zu setzen und bei der Temperatur t

$$u = 999,804 + 0,0212 t.$$

Hiernach berechnen sich die Längen für 20, 40, 50, 60°

Nr.	t	u ber. mm	u beob. mm	Δ mm	Δ^2
1.	20°	1000,228	1000,22	+ 0,008	0,000064
2.	40	1000,652	1000,65	+ 0,002	0004
3.	50	1000,864	1000,90	— 0,036	1296
4.	60	1001,076	1001,05	+ 0,026	0676
					$\Sigma \Delta^2 = 0,002040$

Man kann sich davon überzeugen, daß jede Änderung von A oder B die Summe der Fehlerquadrate vergrößert.

Ebenso würde aus mehreren Beobachtungen der gegenseitige Gang zweier Uhren, der Elastizitätsmodul eines Stabes, die Empfindlichkeit einer Wage oder eines Galvanometers berechnet werden können usw.

Der lineare Zusammenhang zwischen zwei veränderlichen Größen stellt häufig bloß eine Annäherung dar, die nur bei kleinen Änderungen als merklich genau geltend angesehen werden darf. Als weitere Annäherung wird dann sehr oft, besonders bei Abhängigkeiten von der Temperatur, eine algebraische Form höheren Grades gebraucht, z. B. $u = A + Bt + Ct^2$. Die Wärmeausdehnung der Flüssigkeiten verlangt im allgemeinen noch weitere Glieder. Die Bestimmung der A, B, C... aus beliebig vielen Beobachtungen kann grundsätzlich ebenso geschehen wie oben, ist aber verwickelter und mühsamer.

Für solche Fälle und, falls man oft mit kleinsten Quadraten zu rechnen hat, auch bei einfachen Aufgaben, ist das Gaufssche Rechenverfahren (IV) bequemer und sicherer.

Die numerischen Rechnungen dürfen bei der Bildung der Quadrate und Produkte nicht mehr gekürzt werden. Man kann aber große Zahlen durch Kunstgriffe vermeiden, wie z. B. oben durch Verkleinerung aller u um 1000 mm.

Wie man diesen und andere Vorteile durch vorgängige Berechnung von Näherungswerten erreicht, sieht man aus III.

Die Zahlenrechnung betreffend beachte man noch folgende praktische Regel. Die Konstanten $A, B \dots$ sowie andrerseits die beobachteten Werte sind unter sich oft von verschiedener Größenordnung. So zählen in dem Beispiel die Temperaturänderungen t nach Zehnern, während die Verlängerungen u höchstens 1 mm erreichen. Es ist übersichtlicher, wenn die Größen „homogen" sind, was man durch Multiplikation oder Division durch Potenzen von 10 bewirkt. Anstatt Bt kann man schreiben $(10B)\cdot(t:10)$. Hätten wir dies getan, so würde 2, 4 ... statt 20, 40 ... in die Rechnung gekommen sein, was angenehmer ist. Das Rechnungsresultat $10B$ schließlich durch 10 geteilt führt zu genau dem früheren Werte von B.

Unzulässig sind dagegen Vereinfachungen, die mit den variabelen Größen selbst ausgeführt werden z. B. in folgender Weise. Gegeben sei die Gleichung $u = Bt + Ct^2$. Die Anwendung der kleinsten Quadrate hierauf würde sehr vereinfacht werden, wenn statt dessen gesetzt würde $u/t = B + Ct$. Dies würde aber zu anderen Resultaten führen als die ursprüngliche Gleichung.

Den sogenannten mittleren Beobachtungsfehler erhält man bei diesen Aufgaben aus der Summe der Quadrate der Differenzen $\varDelta$ zwischen Beobachtung und Rechnung, falls n die Anzahl der Beobachtungen, m die Anzahl der zu bestimmenden Konstanten $A, B \dots$ d. h. die Anzahl der Normalgleichungen bedeutet, als

$$\pm\sqrt{\frac{\varDelta_1^2+\varDelta_2^2+\dots+\varDelta_n^2}{n-m}}. \qquad 4.$$

Im obigen Beispiele $\pm\sqrt{0{,}00204/(4-2)} = \pm\,0{,}032$ mm.

II. Rechnung bei gleich großen Intervallen.

Liegen die beobachteten Größen in gleichen Abständen voneinander, so wird die Rechnung einfacher. Dergleichen Verhältnisse kommen nicht selten vor; ein periodisches Ereignis sei z. B. wiederholt beobachtet worden, und es werde die Zwischenzeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ereignissen gesucht [Schwingungsdauer (28), Umlaufszeit]. Oder man will den Abstand zweier benachbarter Punkte bestimmen, wenn nicht nur zwei, sondern eine größere Anzahl solcher Punkte neben-

einander liegen, deren Örter beobachtet wurden [Abstand der Knotenpunkte eines Wellenzuges (**56**)].

Allgemein ändere sich eine Größe proportional einer zweiten; von letzterer sei eine Anzahl gleichweit voneinander abstehender bekannter Punkte genommen, zu denen man die zugehörigen Werte der anderen Größe beobachtet hat.

So könnten in dem vorigen Beispiel die Stablängen in lauter gleichen Temperaturabständen gemessen sein.

Die beobachtete Größe u möge der Reihe nach mit den Werten $u_1, u_2 \ldots u_{n-1}, u_n$ gefunden sein. Ohne Fehler sollten die Intervalle $u_2 - u_1,\ u_3 - u_2 \ldots u_n - u_{n-1}$ alle gleich groß sein. In Wirklichkeit sind sie ungleich und man sucht ihren wahrscheinlichsten Wert. Das arithmetische Mittel aus allen Intervallen würde auf dasselbe hinauslaufen, wie wenn man nur den ersten und den letzten Wert berücksichtigte. Die gleichförmige Benutzung aller Beobachtungen mit kleinsten Quadraten verlangt, daß man das Intervall berechnet als

$$6\,\frac{(n-1)(u_n - u_1) + (n-3)(u_{n-1} - u_2) + \cdots}{n(n^2-1)}.$$

Das „Gewicht" dieses Resultates ist $P = n(n^2-1)/12$; vgl. S. 3. Der mittlere Fehler des Resultates beträgt dann, wenn ε der mittlere Fehler der einzelnen Bestimmung ist, $\mathsf{E} = \varepsilon/\sqrt{P}$.

Ableitung. Wenn t die Nummer der Beobachtung bedeutet und $u = A + Bt$ gesetzt wird, so ist B das gesuchte Intervall. Also

$$t_1 = 1, \quad t_2 = 2 \cdots, \quad t_{n-1} = n-1, \quad t_n = n.$$

Die Ausdrücke
$$\begin{aligned} \Sigma t &= 1 + 2 + \cdots + n = \tfrac{1}{2} n(n+1), \\ \Sigma t^2 &= 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \tfrac{1}{6} n(n+1)(2n+1), \\ \Sigma u &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \\ \Sigma tu &= u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n \end{aligned}$$
in B (S. 13) eingesetzt geben den obigen Ausdruck.

(Die in der Mitte liegenden Beobachtungen erhalten bei dieser Rechnung nur einen kleinen Einfluß auf das Resultat. Man wird häufig ohne kl. Qu. rechnen, nämlich eine gerade Anzahl n von Beobachtungspunkten bestimmen und, indem man $\tfrac{1}{2}n = m$ setzt, das Mittel aus $(u_{m+1} - u_1)/m,\ (u_{m+2} - u_2)/m$ usw. nehmen. Vgl. 28.)

III. Auflösung von Gleichungen mittels eingeführter Näherungswerte für die Unbekannten.

Die Aufgabe wird an diesem Orte eingeschoben, weil sie die Grundlage des Gauß'schen Rechenverfahrens für kl. Qu. (IV) bildet; sie hat aber

eine umfassendere Bedeutung, denn sie ist unentbehrlich, wenn Gleichungen sich nicht direkt auf die gesuchten Größen auflösen lassen.

Wir wollen die Aufgabe zunächst ohne Rücksicht auf kl. Qu. behandeln, aber gleich in der Form, die ja physikalisch auch am häufigsten auftritt, daß Konstanten $A, B \ldots$ einer Gleichung, die ein Gesetz darstellt, aus Beobachtungen abgeleitet werden sollen. Die $A, B \ldots$ sind also die Unbekannten.

Eine beobachtete Größe u hänge von anderen beobachteten Größen $r, s, t \ldots$ nach einem Gesetze von bekannter Form ab, welches die durch Beobachtung zu bestimmenden Konstanten A, B, C enthält. (Eine größere Anzahl als drei wird bei physikalischen Aufgaben selten vorkommen und könnte überdies ebenso behandelt werden wie unser Fall.) Es müssen natürlich mindestens so viele Beobachtungen vorliegen, wie zu bestimmende Konstanten. Die beobachteten Größen bezeichnen wir mit $u_1 r_1 s_1 t_1 \quad u_2 r_2 s_2 t_2$ etc.

Die Abhängigkeit der Größen von einander werde durch das Symbol dargestellt

$$u = \mathrm{f}(A, B, C, r, s, t, \ldots). \qquad 5.$$

Dies ist die praktisch häufigste Form. Eine andere, z. B.

$$\mathrm{F}(A, B, C, r, s, t, u \ldots) = 0,$$

wird man leicht ähnlich behandeln können.

Die $r, s, \ldots$ werden im allgemeinen Ablesungen an Instrumenten enthalten, wie Uhr, Wage, Maßstab, Teilkreis, Thermometer, Manometer, Rheostat, Galvanometer, Brückendraht usw. Als Beispiele für die u bei physikalischen Aufgaben mögen Längen, Volumina, Dichtigkeiten, elektrische Stromstärken, Widerstände oder Spannungen, magnetische Momente, Lichtbrechungsverhältnisse genannt sein.

Die zu bestimmenden Konstanten A, B, C, welche hier die Unbekannten vorstellen, lassen sich häufig nicht direkt aus den Gleichungen entwickeln. Hat man sich aber Näherungswerte für A, B, C verschafft, so führt man die Aufgabe in folgender Weise auf die stets mögliche Auflösung linearer Gleichungen zurück.

Die Näherungswerte seien mit $\{A\}, \{B\}, \{C\}$ bezeichnet; die richtigen mögen sein

$$A = \{A\} + \alpha \qquad B = \{B\} + \beta \qquad C = \{C\} + \gamma. \qquad 6.$$

Diese Korrektionen α, β, γ sind also jetzt die Unbekannten, welche man bestimmen soll. Zu diesem Zwecke bilde man die partiellen Differentialquotienten der Funktion u oder f (s. Gl. 5) nach A, B, C, indem man letztere Größen zunächst als Veränder-

liche behandelt, nach der Differentiation aber die Zahlen $\{A\}$, $\{B\}$, $\{C\}$ dafür einsetzt. Wir bezeichnen die so definierten Werte der Differentialquotienten, welche also die Größen $r, s, t\ldots$ und außerdem nur Zahlenwerte enthalten,

$$\left\{\frac{\partial u}{\partial A}\right\} = a \qquad \left\{\frac{\partial u}{\partial B}\right\} = b \qquad \left\{\frac{\partial u}{\partial C}\right\} = c. \tag{7.}$$

In diese drei Ausdrücke sollen nun für die Werte $r, s, t \ldots$ die beobachteten Zahlen eingesetzt werden, z. B. $r_1, s_1, t_1 \ldots$ dann $r_2, s_2, t_2 \ldots$ etc.; die so entstehenden Größen sollen bez. a_1, b_1, c_1 a_2, b_2, c_2 etc. heißen.

Endlich nennen wir $\{u\}$ den Wert, der für die Funktion u entsteht, wenn man $\{A\}$, $\{B\}$, $\{C\}$ in die Funktion f einsetzt, während u den wirklich beobachteten Wert bedeute. u und $\{u\}$ werden sich durch einen Rest $\mathfrak{r}$ von einander unterscheiden

$$\mathfrak{r} = u - \{u\}. \tag{8.}$$

Nach dem Taylorschen Satze ist dann, wenn $\mathfrak{r}, \alpha, \beta, \gamma$ hinreichend klein sind, um die späteren Glieder zu vernachlässigen,

$$\mathfrak{r} = \alpha\left\{\frac{\partial u}{\partial A}\right\} + \beta\left\{\frac{\partial u}{\partial B}\right\} + \gamma\left\{\frac{\partial u}{\partial C}\right\} = \alpha a + \beta b + \gamma c. \tag{9.}$$

Indem man in diese Gleichung die sämtlichen Beobachtungen einsetzt, erhält man so viele Gleichungen wie Beobachtungen, in denen außer α, β, γ alles zahlenmäßig gegeben ist:

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_1 &= \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 \\ \mathfrak{r}_2 &= \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{10.}$$

Beispiel: Die Temperatur eines sich in konstanter Umgebung abkühlenden Körpers (oder die Lage einer aperiodisch gedämpften Magnetnadel, oder der Ort eines in einem zähen Mittel sich bewegenden Körpers, oder der Verlauf einer langsam vor sich gehenden chemischen Reaktion usw.) werde für die Zeit t durch den Ausdruck dargestellt

$$u = A \cdot 10^{-Bt} + C.$$

A, B und C seien aus drei Beobachtungen zu bestimmen, welche zu den Zeiten $t_1\ t_2\ t_3$ für u die Werte $u_1\ u_2\ u_3$ ergeben haben. Setzt man zusammengehörige Paare in den Ausdruck ein, so erhält man allerdings drei Gleichungen, durch welche A, B, C bestimmt sind; die Elimination, z. B. von C und A, führt jedoch auf die Beziehung $\frac{10^{-Bt_1} - 10^{-Bt_2}}{10^{-Bt_1} - 10^{-Bt_3}} = \frac{u_1 - u_2}{u_1 - u_3}$, eine nicht nach B auflösbare Gleichung. Wohl aber kann man z. B. rechnerisch durch Probieren eine Zahl für B finden, welche der Gleichung genähert

genügt. Oder man zeichnet $u_1\, u_2\, u_3$ als Ordinaten zu $t_1\, t_2\, t_3$ in Koordinatenpapier, zieht eine Kurve durch und legt zwei Tangenten an dieselbe, welche das Gefälle q und q' für zwei, der Rechnung bequem gewählte Abszissen t und t' ergeben. Dann ist $B = (\lg q - \lg q')/(t' - t)$, der Wert wird aber nicht genau sein. Oder endlich, es ist für die dritte Beobachtung t_3 etwa so groß, daß u_3 nahe den Endwert C vorstellt. — Sobald man A oder B oder C hat, so lassen die beiden übrigen Größen sich geschlossen ausdrücken, werden aber auch nur Näherungswerte sein, wenn die erste ein solcher ist.

So habe man sich die Näherungen $\{A\}$, $\{B\}$ und $\{C\}$ verschafft. Es ist dann nach Gl. 8 u. 7

$$\mathfrak{r} = u - \{A\} \cdot 10^{-\{B\} \cdot t} - \{C\} \qquad 8\text{a.}$$

$$a = \left\{\frac{\partial u}{\partial A}\right\} = 10^{-\{B\} \cdot t} \qquad b = \left\{\frac{\partial u}{\partial B}\right\} = -\frac{\{A\} \cdot t \cdot 10^{-\{B\} \cdot t}}{\log e} \qquad c = \left\{\frac{\partial u}{\partial C}\right\} = 1. \qquad 7\text{a.}$$

Durch Einsetzen der drei Beobachtungspaare von u und t in Gl. 7 a und 8 a und der hieraus erhaltenen Zahlen für $\mathfrak{r}$, a, b, c in Gl. 9 erhält man drei Gleichungen 10. Aus diesen bestimmt man α, β, γ und dann aus Gl. 6 A, B, C, welche meistens den Beobachtungen schon genügen werden. Andernfalls benutzt man sie als bessere Näherungswerte und wird bei Wiederholung der einfachen Rechnung sicher zum Ziele kommen.

Liegen nur so viele Beobachtungen vor wie Unbekannte, so löst man die Gleichungen in gewöhnlicher Weise auf. Im anderen Falle dient die Methode der kleinsten Quadrate. Vgl. hierüber I und IV.

Es ist kaum nötig zu bemerken, daß, wenn u schon in der Form $u = Ar + Bs + Ct$ gegeben sein sollte[1]), die eben auseinandergesetzte Reduktion nicht notwendig ist. Trotzdem wird man sie oft mit Vorteil gebrauchen, d. h. sich Näherungswerte für A, B, C verschaffen und mit den R e s t e n rechnen, um nämlich kleinere Zahlen einzuführen, welche im Kopfe oder mit Multiplikationstafeln zu rechnen gestatten. Man hätte dann

$$a = \frac{\partial u}{\partial A} = r \qquad b = \frac{\partial u}{\partial B} = s \qquad c = \frac{\partial u}{\partial C} = t.$$

Dies sieht man hier auch ohne Differentialrechnung, denn wenn

$$\{u\} + \mathfrak{r} = (\{A\} + \alpha)r + (\{B\} + \beta)s + (\{C\} + \gamma)t,$$

so ist eben
$$\mathfrak{r} = \alpha r + \beta s + \gamma t.$$

An dem Beispiel von S. 13 mit zwei zu bestimmenden Konstanten A und B sieht man den Vorteil leicht. Wir schreiben $u = A + Bs$. Einen

1) Z. B. ist die häufige Gleichung $u = A + Bs + Cs^2$ (wo s etwa eine Temperatur vorstellt) ein vereinfachter Fall; hier ist $r = 1$, $t = s^2$ zu setzen.

Näherungswert für B liefern offenbar die beiden Beobachtungen

$$s_1 = 20 \quad u_1 = 1000{,}22 \quad \text{und} \quad s_4 = 60 \quad u_4 = 1001{,}05,$$

nämlich
$$\{B\} = \frac{1001{,}05 - 1000{,}22}{60 - 20} = \frac{0{,}83}{40} = 0{,}021.$$

Aus der Beobachtung 1 findet man dann für A die Näherung

$$\{A\} = 1000{,}22 - 20 \cdot 0{,}021 = 999{,}8.$$

Also
$$\{u\} = 999{,}8 + 0{,}021\, s.$$

Da nun $a = \partial u / \partial A = 1$ und $b = \partial u / \partial B = s$, so wird die Gleichung

$$u - \{u\} = \mathfrak{r} = \alpha \cdot a + \beta \cdot b = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot s.$$

Hierin sind α und β mit kleinsten Quadraten zu bestimmen. $\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \ldots$, $a_1 a_2 \ldots$ und $b_1 b_2 \ldots$ berechnen sich:

Nr.	u mm	s	$\{u\} = 999{,}8 + 0{,}021 \cdot s$ mm	$\mathfrak{r}$ mm	a	b
1.	1000,22	20°	1000,22	+ 0,00	1	20
2.	1000,65	40	1000,64	+ 0,01	1	40
3.	1000,90	50	1000,85	+ 0,05	1	50
4.	1001,05	60	1001,06	− 0,01	1	60

wo man nun alles nach dem Schema S. 14, aber im Kopfe rechnen kann; am einfachsten, wenn man noch $\mathfrak{r}$ in Hunderteln mm und b in Zehnern von Graden als Einheiten ausdrückt. Die so berechneten α bez. β wären natürlich zum Schluß durch 100 bez. 1000 zu dividieren.

IV. Das Gauſs'sche Rechenverfahren bei der Auflösung linearer Gleichungen mit kleinsten Quadraten.

Diese Art zu rechnen ist, wenn man sich an sie gewöhnt hat, bequemer und durch die neben der Rechnung hergehende Kontrole sicherer als eine andere; besonders wenn eine große Anzahl von Beobachtungen vorliegt.

Es seien n Beobachtungen gemacht und nötigenfalls mit Näherungswerten nach III in linearen Zusammenhang gebracht. Die in Bezug auf α, β, γ als Unbekannte aufzulösenden Gleichungen heißen (Gl. 10, S. 18)

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_1 &= \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 \\ \mathfrak{r}_2 &= \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{r}_n &= \alpha a_n + \beta b_n + \gamma c_n. \end{aligned}$$

Es wird im allgemeinen genügen, die Zahlen für $a_1 \ldots b_1 \ldots c_1 \ldots$ soweit auszurechnen, daß ihre Ziffernzahl derjenigen der bleibenden Reste $\mathfrak{r}$ ungefähr gleichkommt. Es ist dabei von großem Vorteil, wenn die Näherungswerte so nahe richtig sind, daß die Reste zwei, höchstens drei Ziffern umfassen. Dann kann man die Quadrate und Produkte mit Rechentafeln, z. B. von Crelle oder Zimmermann, oder mit drei- oder vier-

stelligen Logarithmen bilden. Bei diesen Rechnungen darf, wie schon S. 14 bemerkt wurde, nicht weiter gekürzt werden!

Allen Gleichungen soll dasselbe wahrscheinliche Maß der Genauigkeit zukommen. Liegen Gründe vor, den einzelnen Beobachtungen eine ungleiche Genauigkeit zuzuschreiben, so seien die Gleichungen bereits durch Multiplikation mit der Quadratwurzel des einer jeden zukommenden Gewichtes (S. 3) auf gleiche Genauigkeit gebracht. (Dabei ist zu beachten, daß auch Faktoren 1 in demselben Verhältnis geändert werden müssen.)

Um die Gleichungen nach kleinsten Quadraten aufzulösen, kann das S. 11 ff. erörterte Verfahren dienen unter Beachtung,

daß den dortigen	u	$t \ldots$	$A, B \ldots$
hier die Größen entsprechen	$\mathfrak{r}$	a, b, c	α, β, γ.

Für eine größere Anzahl von Unbekannten, z. B. schon für unsere drei, ist aber die folgende Auflösung nach Gaufs bequemer.

Man findet links die Reihenfolge der Hauptrechnung; daneben rechts für deren Richtigkeit eine Kontrole, welche man neben der Hauptrechnung führt. Es handelt sich zunächst um die Berechnung von Summen der Quadrate oder der Produkte zusammengehöriger Größen, die wir in leichtverständlicher Weise abgekürzt so bezeichnen:

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = [aa] \qquad a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = [ab]$$

$$a_1 \mathfrak{r}_1 + a_2 \mathfrak{r}_2 + \cdots + a_n \mathfrak{r}_n = [a\mathfrak{r}] \quad \text{usw.}$$

Rechnung.	Kontrole.
Man bilde $[aa]\ [ab]\ [ac]\ [a\mathfrak{r}]$	Es sei $a + b + c = S$.
$[bb]\ [bc]\ [b\mathfrak{r}]$	Ferner, wie oben bezeichnet,
$[cc]\ [c\mathfrak{r}]$	$a_1 S_1 + a_2 S_2 + \cdots + a_n S_n = [aS]$ usw.
$[\mathfrak{r}\mathfrak{r}]$	Dann muß sein
$[\mathfrak{r}\mathfrak{r}]$ ist nur für die letzte Kontrole notwendig.	$[aa] + [ba] + [ca] = [aS]$
	$[ab] + [bb] + [cb] = [bS]$
	$[ac] + [bc] + [cc] = [cS]$
	$[a\mathfrak{r}] + [b\mathfrak{r}] + [c\mathfrak{r}] = [\mathfrak{r}S]$

Die „Normalgleichungen" zur Bestimmung von α, β, γ sind dann

$$[aa] \cdot \alpha + [ab] \cdot \beta + [ac] \cdot \gamma = [a\mathfrak{r}]$$
$$[ab] \cdot \alpha + [bb] \cdot \beta + [bc] \cdot \gamma = [b\mathfrak{r}]$$
$$[ac] \cdot \alpha + [bc] \cdot \beta + [cc] \cdot \gamma = [c\mathfrak{r}].$$

Die Auflösung geschieht folgendermaßen:

Man bilde und bezeichne

$$[bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab] = [bb]_{\mathrm{I}}$$

$$[bc] - \frac{[ab]}{[aa]}[ac] = [bc]_{\mathrm{I}}$$

$$[b\mathfrak{r}] - \frac{[ab]}{[aa]}[a\mathfrak{r}] = [b\mathfrak{r}]_{\mathrm{I}}$$

$$[cc] - \frac{[ac]}{[aa]}[ac] = [cc]_{\mathrm{I}}$$

$$[c\mathfrak{r}] - \frac{[ac]}{[aa]}[a\mathfrak{r}] = [c\mathfrak{r}]_{\mathrm{I}}.$$

Man berechne

$$[bS] - \frac{[ab]}{[aa]}[aS] = [bS]_{\mathrm{I}}$$

$$[cS] - \frac{[ac]}{[aa]}[aS] = [cS]_{\mathrm{I}}$$

$$[\mathfrak{r}S] - \frac{[a\mathfrak{r}]}{[aa]}[aS] = [\mathfrak{r}S]_{\mathrm{I}};$$

dann muß sein

$$[bb]_{\mathrm{I}} + [bc]_{\mathrm{I}} = [bS]_{\mathrm{I}}$$

$$[bc]_{\mathrm{I}} + [cc]_{\mathrm{I}} = [cS]_{\mathrm{I}}$$

$$[b\mathfrak{r}]_{\mathrm{I}} + [c\mathfrak{r}]_{\mathrm{I}} = [\mathfrak{r}S]_{\mathrm{I}}.$$

Endlich

$$[cc]_{\mathrm{I}} - \frac{[bc]_{\mathrm{I}}}{[bb]_{\mathrm{I}}}[bc]_{\mathrm{I}} = [cc]_{\mathrm{II}}$$

$$[c\mathfrak{r}]_{\mathrm{I}} - \frac{[bc]_{\mathrm{I}}}{[bb]_{\mathrm{I}}}[b\mathfrak{r}]_{\mathrm{I}} = [c\mathfrak{r}]_{\mathrm{II}}.$$

Man berechne

$$[cS]_{\mathrm{I}} - \frac{[bc]_{\mathrm{I}}}{[bb]_{\mathrm{I}}}[bS]_{\mathrm{I}} = [cS]_{\mathrm{II}}$$

$$[\mathfrak{r}S]_{\mathrm{I}} - \frac{[b\mathfrak{r}]_{\mathrm{I}}}{[bb]_{\mathrm{I}}}[bS]_{\mathrm{I}} = [\mathfrak{r}S]_{\mathrm{II}};$$

dann muß sein

$$[cc]_{\mathrm{II}} = [cS]_{\mathrm{II}} \quad \text{und} \quad [c\mathfrak{r}]_{\mathrm{II}} = [\mathfrak{r}S]_{\mathrm{II}}.$$

Hieraus erhält man die Unbekannten α, β und γ:

$$\gamma = \frac{[c\mathfrak{r}]_{\mathrm{II}}}{[cc]_{\mathrm{II}}} \qquad \beta = \frac{[b\mathfrak{r}]_{\mathrm{I}}}{[bb]_{\mathrm{I}}} - \gamma\frac{[bc]_{\mathrm{I}}}{[bb]_{\mathrm{I}}} \qquad \alpha = \frac{[a\mathfrak{r}]}{[aa]} - \frac{[ab]}{[aa]}\beta - \frac{[ac]}{[aa]}\gamma.$$

Kontrole der ganzen Rechnung. Die Einsetzung der gefundenen α, β, γ in die ursprünglichen Gleichungen lasse die Fehler übrig

$$\mathfrak{f}_1 = \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 - \mathfrak{r}_1 \qquad \mathfrak{f}_2 = \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 - \mathfrak{r}_2 \quad \text{etc.}$$

Dann muß sein

$$\mathfrak{f}_1^2 + \mathfrak{f}_2^2 + \cdots + \mathfrak{f}_n^2 = [\mathfrak{r}\mathfrak{r}] - \frac{[a\mathfrak{r}]}{[aa]}[a\mathfrak{r}] - \frac{[b\mathfrak{r}]_{\mathrm{I}}}{[bb]_{\mathrm{I}}}[b\mathfrak{r}]_{\mathrm{I}} - \frac{[c\mathfrak{r}]_{\mathrm{II}}}{[cc]_{\mathrm{II}}}[c\mathfrak{r}]_{\mathrm{II}}.$$

Die Gewichte der so bestimmten α, β, γ werden erhalten

$$p_\gamma = [cc]_{\mathrm{II}} \qquad p_\beta = \frac{[bb]_{\mathrm{I}} \cdot [cc]_{\mathrm{II}}}{[cc]_{\mathrm{I}}} \qquad p_\alpha = \frac{[aa] \cdot [bb]_{\mathrm{I}} \cdot [cc]_{\mathrm{II}}}{[cc] \cdot [bb] - [bc] \cdot [bc]}.$$

Die Quadrate der mittleren Fehler von α, β, γ erhält man, indem man den Ausdruck $(\mathfrak{f}_1^2 + \mathfrak{f}_2^2 + \cdots + \mathfrak{f}_n^2)/(n-3)$ durch p_α, p_β, p_γ dividiert; 3 ist hier die Anzahl der bestimmten Konstanten.

Es kann vorkommen, daß die bei der ersten Berechnung erhaltenen Korrektionen α, β, γ nicht genügen. Dann hat man die jetzt entstandenen Werte $[A] + \alpha$, $[B] + \beta$, $[C] + \gamma$ wieder

als Näherungswerte von A, B, C zu betrachten und die Rechnung zu wiederholen.

Rechenschema. Es empfiehlt sich, bei solchen Rechnungen die Zahlen immer in derselben Ordnung zu schreiben, z. B. (die Klammern der Produktsummen sind weggelassen):

$\lg aa$		aa ab	ac	aS	$a\mathfrak{r}$	
$\lg ab$ $\lg bb_I$		bb	bc	bS	$b\mathfrak{r}$	
$\lg ac$ $\lg bc_I$ $\lg cc_{II}$		$\frac{ab}{aa}ab$	$\frac{ab}{aa}ac$	$\frac{ab}{aa}aS$	$\frac{ab}{aa}a\mathfrak{r}$	
$\lg aS$ $\lg bS_I$						
$\lg a\mathfrak{r}$ $\lg b\mathfrak{r}_I$ $\lg c\mathfrak{r}_{II}$	Diff. =	bb_I	bc_I	bS_I	$b\mathfrak{r}_I$	
		cc	cS	$c\mathfrak{r}$	$\mathfrak{r}S$	$\mathfrak{r}\mathfrak{r}$
$\lg\frac{ab}{aa}$ $\lg\frac{bc_I}{bb_I}$ $\lg\frac{c\mathfrak{r}_{II}}{cc_{II}}$		$\frac{ac}{aa}ac$	$\frac{ac}{aa}aS$	$\frac{ac}{aa}a\mathfrak{r}$	$\frac{a\mathfrak{r}}{aa}aS$	$\frac{a\mathfrak{r}}{aa}a\mathfrak{r}$
$\lg\frac{ac}{aa}$ $\lg\frac{b\mathfrak{r}_I}{bb_I}$	Diff. =	cc_I	cS_I	$c\mathfrak{r}_I$	$\mathfrak{r}S_I$	
$\lg\frac{a\mathfrak{r}}{aa}$		$\frac{bc_I}{bb_I}bc_I$	$\frac{bc_I}{bb_I}bS_I$	$\frac{bc_I}{bb_I}b\mathfrak{r}_I$	$\frac{b\mathfrak{r}_I}{bb_I}bS_I$	$\frac{b\mathfrak{r}_I}{bb_I}b\mathfrak{r}_I$
	Diff. =	cc_{II}	cS_{II}	$c\mathfrak{r}_{II}$	$\mathfrak{r}S_{II}$	
						$\frac{c\mathfrak{r}_{II}}{cc_{II}}c\mathfrak{r}_{II}$
					Diff. =	$\Sigma\mathfrak{f}^2$

V. Fehlerverteilung auf alle beobachteten Größen.

Das bisher behandelte gebräuchliche Verfahren, die Fehler auf eine der beobachteten Größen u zu schieben, ist gerechtfertigt, wenn die Beobachtungsfehler einer Größe, die dann für u zu wählen ist, die Fehler der übrigen bedeutend überwiegen. Dieser Fall liegt, so wie in unserem Zahlenbeispiel S. 13, nicht selten vor. Beobachtet man eine Größe, z. B. eine Körpereigenschaft (Länge, Volumen, Dichte, Elastizität, Kapillarität, Leitvermögen von Metallen, Magnetismus) als Funktion der Temperatur oder einer Belastung, etwa des Druckes, oder bestimmt man einen räumlich verteilten Zustand (Schwere, magnetisches oder elektrisches Feld, Temperatur, Luftdruck) als Funktion der Koordinaten, so sind häufig die jedesmal zuzweit genannten Größen nur mit geringen Beobachtungsfehlern behaftet, welche das Resultat kaum beeinflussen, und die Fehler liegen ganz überwiegend auf der ersteren Seite.

Derartiges trifft aber nicht immer zu; die Fehler verschiedener Beobachtungsgrößen können vielmehr in ihrem Einfluß auf das Resultat von derselben Ordnung sein. (Beispiele: Volumen, Druck und Temperatur bei Gasen; Längen- usw. Messungen unter Verhältnissen, wo die Temperaturbestimmung erschwert ist, z. B. in der Hitze; Leitvermögen von Elektrolyten, bei denen die Temperaturfehler im allgemeinen von relativ großem Einfluß sind; bei Dichtebestimmungen von Lösungen als Funktion der Konzentration treten die Fehler der chemischen Analyse mit denen der

Wägungen in Konkurrenz.) Das gebräuchliche Verfahren entspricht dann nicht den wirklichen Verhältnissen.

Nach Helmert kann man dann folgendermaßen vorgehen.

Die Gleichung, die den naturgesetzlichen Zusammenhang zwischen $u, r, s \ldots$ darstellt, sei auf die Form gebracht

$$\mathfrak{f}(A, B, C \ldots u, r, s \ldots) = 0, \qquad 1.$$

und es mögen wieder mehr Beobachtungssätze $u_1 r_1 s_1, u_2 r_2 s_2 \ldots$ vorliegen, als Konstanten $A, B, C \ldots$ zu bestimmen sind. Die Gleichung kann also nicht mit allen Beobachtungssätzen zugleich in Übereinstimmung gebracht werden.

Machen wir nun die Annahme, daß, wenn man die beobachteten Werte $u_1 r_1 s_1, u_2 r_2 s_2 \ldots$ um die kleinen Größen $\mathfrak{u}_1 \mathfrak{r}_1 \mathfrak{s}_1, \mathfrak{u}_2 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{s}_2 \ldots$ (die Fehler) verbessert, alsdann alle Gleichungen

$$\left.\begin{array}{c} \mathfrak{f}(A, B, C \ldots u_1 + \mathfrak{u}_1,\; r_1 + \mathfrak{r}_1,\; s_1 + \mathfrak{s}_1 \ldots) = 0 \\ \mathfrak{f}(A, B, C \ldots u_2 + \mathfrak{u}_2,\; r_2 + \mathfrak{r}_2,\; s_2 + \mathfrak{s}_2 \ldots) = 0 \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \qquad 2.$$

streng erfüllt seien, so verlangt die Theorie der kleinsten Quadrate, daß die Konstanten $A, B, C \ldots$ so bestimmt werden, daß, über alle Beobachtungen erstreckt, die Summe der auf gleiches Gewicht gebrachten Quadrate der Beobachtungsfehler möglichst klein wird, also

$$\sum \left(\frac{\mathfrak{u}^2}{\mathfrak{U}^2} + \frac{\mathfrak{r}^2}{\mathfrak{R}^2} + \frac{\mathfrak{s}^2}{\mathfrak{S}^2} + \cdots \right) = \text{Minimum}, \qquad 3.$$

wobei $\mathfrak{U}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S} \ldots$ die als bekannt vorausgesetzten mittleren Beobachtungsfehler von $u, r, s \ldots$ bedeuten.

Statt dieser Minimumgleichung wird man der Einfachheit halber die Gl. 4 substituieren, in welcher die Einzelfehler in eine einzige Fehlergröße zusammengezogen auftreten. $\{A\}, \{B\}, \{C\} \ldots$ seien bekannte Näherungswerte der Konstanten, so daß (vgl. hierüber 3 III)

$$A = \{A\} + \alpha \qquad B = \{B\} + \beta \qquad C = \{C\} + \gamma \quad \text{etc.},$$

wo α, β, γ also die schließlich zu bestimmenden Größen sind. Dann läßt sich jede der Gleichungen 2, insofern $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ sowie $\mathfrak{u}, \mathfrak{r}, \mathfrak{s} \ldots$ hinreichend klein sind, unter Weglassung der Indices umformen in:

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}(\{A\}, \{B\}, \{C\} \ldots u, r, s \ldots) + \alpha \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial A} + \beta \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial B} + \gamma \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial C} + \cdots \\ + \mathfrak{u} \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u} + \mathfrak{r} \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial r} + \mathfrak{s} \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial s} + \cdots = 0; \end{aligned} \qquad 2\text{a.}$$

die Koeffizienten von $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ und von $\mathfrak{u}, \mathfrak{r}, \mathfrak{s} \ldots$ werden mit den Näherungs- bez. den beobachteten Werten in Zahlen ausgedrückt.

$\mathfrak{f}(\{A\}, \{B\}, \{C\} \ldots u, r, s \ldots)$ ist eine für jeden Beobachtungssatz zahlenmäßig auszurechnende Größe, die mit $\{\mathfrak{f}\}$ bezeichnet werde. Der in Gleichung 2a ferner vorkommende Ausdruck $\mathfrak{u}\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u} + \mathfrak{r}\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial r} + \mathfrak{s}\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial s} \cdots$ bedeutet nun offenbar, auf einen einzelnen Beobachtungssatz angewandt, den Fehler des Resultates $\{\mathfrak{f}\}$, der durch das Zusammenwirken der Einzelfehler $\mathfrak{u}, \mathfrak{r}, \mathfrak{s} \ldots$ entsteht. Bezeichnen wir diesen Fehler mit $\mathfrak{f}$, also $\mathfrak{u}\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u} + \mathfrak{r}\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial r} + \mathfrak{s}\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial s} = \mathfrak{f}$, so läßt sich Gl. 2a jetzt in der Form schreiben

$$-\mathfrak{f} = \{\mathfrak{f}\} + \alpha\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial A} + \beta\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial B} + \gamma\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial C} + \cdots \qquad 2\text{b.}$$

Hierdurch ist der zusammengefaßte Gesamtfehler $\mathfrak{f}$ der Beobachtungen in einem Ausdruck dargestellt, der außer den zu bestimmenden Konstanten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ in jedem Beobachtungssatz nur Größen enthält, die sich in Zahlen ausdrücken lassen.

Nach dem Grundsatz der kleinsten Quadrate sind nun die Konstanten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ so zu ermitteln, daß der Bedingung genügt wird

$$\sum \frac{\mathfrak{f}^2}{\mathfrak{F}^2} = \text{Min.} \qquad 4.$$

Die Summe ist über alle Beobachtungssätze zu erstrecken. $\mathfrak{f}$ bedeutet, wie eben gesagt wurde, für jeden Satz die durch Gl. 2b gegebene Größe.

$\mathfrak{F}^2$ endlich bedeutet das mittlere Fehlerquadrat von $\mathfrak{f}$; dasselbe wird gefunden (vgl. S. 7, Gl. 3)

$$\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{U}^2\left(\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}\right)^2 + \mathfrak{R}^2\left(\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial r}\right)^2 + \mathfrak{S}^2\left(\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial s}\right)^2 + \cdots \qquad 5.$$

und ist, indem man die Näherungswerte $\{A\}, \{B\} \ldots$ und die beobachteten $u_1\, r_1\, s_1 \ldots$ etc. in $\mathfrak{f}$ einsetzt, für jeden Beobachtungssatz numerisch berechenbar. Hiermit ist die Konstantenbestimmung auf das frühere Schema, also etwa auf das Gaufs'sche Verfahren (IV) zurückgeführt.

Die nach der Bestimmung von α, β, γ für jeden Beobachtungssatz aus Gl. 2b zu ermittelnde Fehlergröße $\mathfrak{f}$ kann

schließlich auch auf die Einzelbeobachtungen gemäß der Bedingung 3 verteilt werden, nämlich dadurch, daß man setzt

$$\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{U}^2}=\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{F}^2}\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}; \quad \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{R}^2}=\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{F}^2}\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial r}; \quad \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{S}^2}=\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{F}^2}\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial s}\ldots \qquad 6.$$

Denn multipliziert man die Gll. 6 mit $\mathfrak{u}$, bez. $\mathfrak{r}$, bez. $\mathfrak{s}\ldots$ und addiert sie dann, so folgt, da $\mathfrak{f}=\mathfrak{u}\partial\mathfrak{f}/\partial u+\mathfrak{r}\partial\mathfrak{f}/\partial r+\mathfrak{s}\partial\mathfrak{f}/\partial s$ definiert wurde (S. 25),

$$\sum\left(\frac{\mathfrak{u}^2}{\mathfrak{U}^2}+\frac{\mathfrak{r}^2}{\mathfrak{R}^2}+\frac{\mathfrak{s}^2}{\mathfrak{S}^2}+\ldots\right)=\sum\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{F}^2}\left(\mathfrak{u}\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial u}+\mathfrak{r}\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial r}+\mathfrak{s}\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial s}+\ldots\right)=\sum\frac{\mathfrak{f}^2}{\mathfrak{F}^2}.$$

Der Ausdruck rechts ist aber die Größe, welche laut Bedingung 4 bei der Bestimmung der Konstanten zum Minimum gemacht wurde.

Im vorigen wird angenommen, daß jeder Beobachtungssatz für sich in den Gleichungen auftritt. Über allgemeinere Fälle vgl. Helmert, Ausgleichsrechnung.

4. Korrektionen und Korrektionsrechnungen.

Die gesuchten Resultate gehen selten glatt aus den Beobachtungen hervor; die Übung im Anbringen der Korrektionen ist eine der wesentlichsten Bedingungen des genauen und trotzdem bequemen physikalischen Arbeitens. Mit steigendem Anspruch auf Genauigkeit wächst sowohl die Anzahl der zu berücksichtigenden Nebeneinflüsse, wie die Schwierigkeit, sie zu eliminieren, so daß hierin oft der größere Teil der Arbeit besteht.

Zu den Ursachen der Korrektionen gehören erstens Instrumentalfehler, wie die Ungleicharmigkeit der Wage, Abweichungen von genauer Proportionalität zwischen Ursachen und Wirkungen, z. B. bei Ausschlagswinkeln, die Abweichungen von genähert geltenden Gesetzen, wie bei magnetischen Fernwirkungen u. dgl. Ferner die Nebeneinflüsse, besonders die von der Atmosphäre herrührenden, wie der Auftrieb der Körper in der Luft, die Wirkungen der Luftfeuchtigkeit, die Barometerschwankungen, vor allem aber die Einflüsse der Temperatur, welche sich auf fast sämtliche Eigenschaften der Körper erstrecken.

Berücksichtigt man diese Umstände nicht, so wird das entstehende Rohprodukt der Arbeit meistens viel fehlerhafter ausfallen, als der Beobachter denkt. Eine Einschränkung ist andrerseits auch unvermeidlich, denn sonst kann eine einzige Messung, z. B. von einer Pendellänge, einem elektrischen Leitvermögen, ja von einer Masse zu einer umfangreichen Arbeit werden.

Es ist nötig, sich von vornherein über den Betrag der Korrektionen zu orientieren, und sodann, sie auf möglichst einfache Weise in die Rechnung aufzunehmen. Wie weit man die Korrektionen berücksichtigen kann, hängt von äußeren Um-

ständen und von der Grenze ab, welche auch hier durch die Fehler der Beobachtung sowie durch die unvollkommene Kenntnis der Naturgesetze und der in diesen vorkommenden Zahlenwerte gesteckt ist. Andrerseits aber ist es oft überflüssig, die Genauigkeit der Korrektion bis zu dieser Grenze zu führen; es genügt vielmehr offenbar, so weit zu gehen, daß der vernachlässigte Teil der Korrektionen erheblich kleiner wird als der mögliche Einfluß der Beobachtungsfehler. Hieraus ergeben sich ähnliche Kürzungsregeln, wie früher für die Fehlerrechnung.

Eine der einfachsten physikalischen Messungen ist z. B. die Massenbestimmung durch Wägung. Hier bestehen zunächst die eigentlichen Beobachtungsfehler, welche aus der Unvollkommenheit unserer Gesichtswahrnehmung und des Urteils über dieselbe, sowie aus einigen nicht zu berechnenden Mängeln der Wage, wie Reibung, Veränderlichkeit der Hebelarme usw., zusammengesetzt sind. Auch die fehlerfreie Herstellung oder Prüfung eines Gewichtsatzes ist unmöglich. Indessen werden keineswegs besonders ausgezeichnete Instrumente oder feine Beobachtungen vorausgesetzt, damit andere ebenfalls unvermeidliche, aber ihrer Größe nach bestimmbare und daher zu eliminierende Fehler merklich werden, welche, wo Genauigkeit beansprucht wird, berücksichtigt werden müssen. Hierher gehört erstens die Ungleicharmigkeit der Wage, welche bei größeren Gewichten in der Regel einen merklichen Einfluß hat. Sie wird nach **13** eliminiert.

Zweitens erleiden die Körper einen Gewichtsverlust durch die verdrängte Luft, welcher schon bei einer Krämerwage, die bei 1 kg Belastung noch 1 gr anzeigt, größer werden kann als der Wägungsfehler. Um die Wägung auf den leeren Raum zu reduzieren, muß man die Dichtigkeit der Luft kennen, eine innerhalb gewisser Grenzen veränderliche Größe. Aber obwohl es nur bei einer sehr rohen Wägung gestattet ist, die Korrektion zu unterlassen, so läßt sich leicht überschlagen, daß für gewöhnliche Ansprüche auch bei wissenschaftlichen Untersuchungen die Veränderungen der Dichtigkeit der Luft nicht berücksichtigt zu werden brauchen; man darf mit einem Mittelwert rechnen. Indem man sich entsprechend auch auf eine genäherte Ausrechnung der Korrektion beschränkt oder eine Tabelle benutzt, wird die erhebliche Verbesserung des Resultates sehr einfach.

Mühsamer wird die Arbeit, wenn die mittlere Luftdichtigkeit nicht genügt; dann muß noch die Temperatur und der Druck der Luft beobachtet werden. Dieser wird aber nicht aus der bloßen Ablesung am Barometer erhalten, sondern da Quecksilber und Maßstab sich mit ihrer Temperatur ausdehnen, so ist auch diese zu berücksichtigen. Auch die Veränderlichkeit der Schwere an der Erdoberfläche hat einen Einfluß. Endlich hängt die Dichtigkeit der Luft von ihrer Feuchtigkeit ab, die also bei feinen Wägungen auch bestimmt und in Rechnung gesetzt werden muß.

In ähnlicher Weise treten Korrektionen in die meisten Aufgaben ein, vorzüglich auch durch die wechselnde Temperatur.

Die genaue Durchführung solcher Nebenbeobachtungen und Rechnungen ist häufig eine große Arbeit. Durch das Verhältnis der Größe der Korrektionen zu dem verlangten oder erreichbaren Maß der Genauigkeit wird der Umfang des Notwendigen vorgezeichnet.

Zur Rechnung wird man oft die Näherungsformeln auf S. 9 u. 10 gebrauchen.

Beispiele. 1. Eine der gebräuchlichsten Kürzungen ist das Darstellen des kubischen Ausdehnungskoeffizienten durch den linearen β als 3β. Streng entspricht einer Änderung der Lineardimensionen im Verhältnis $1+\beta t$ das Volumenverhältnis $(1+\beta t)^3 = 1+3\beta t+3\beta^2 t^2+\beta^3 t^3$. Aber für fast alle festen Körper ist $\beta < 0{,}00003$, so daß für $t = 100^0$ der vernachlässigte Teil $3\beta^2 t^2$ nur $< 0{,}000027$ oder $1/_{37000}$ des Ganzen ist. Nur wenn so kleine Größen in Betracht kommen, dürfte man die gekürzte Rechnung nicht anwenden. In einem solchen Falle aber kommt zugleich in Betracht, daß der Ausdehnungskoeffizient selbst sich mit der Temperatur ändert. Ganz ohne merklichen Einfluß wird $\beta^3 t^3$.

2. In **37** wird bei der Reduktion des Barometers auf 0^0 die Ausdehnung des Quecksilbers als Korrektionsgröße behandelt, indem $l/(1+0{,}00018t) = l - 0{,}00018\,lt$ (Formel 4, S. 9) gesetzt wird. Dabei vernachlässigt man höhere Potenzen von $0{,}00018\,t$. Man sieht aber, daß selbst für $t = 30^0$ schon die nächste Potenz nur 0,00003 beträgt, also mit $l = 760$ mm multipliziert nur etwa $1/_{45}$ mm, eine hier fast immer zu vernachlässigende Größe liefert. — Unerlaubt dagegen ist es meistens, die 20mal größere Ausdehnung der Gase ebenso zu behandeln.

3. Wird das Gewicht eines Körpers durch Doppelwägung (**13**) bestimmt, und hat man auf der einen Seite das Gewicht p_1, auf der anderen p_2 gefunden, so ist streng genommen $p = \sqrt{(p_1 p_2)}$ das wirkliche Gewicht. Anstatt dieses geometrischen Mittels darf aber das arithmetische $\frac{1}{2}(p_1+p_2)$ gesetzt werden (Formel 9, S. 10). Denn setzt man $p_1 = p+\delta$, $p_2 = p-\delta$, wo eben $p = \frac{1}{2}(p_1+p_2)$ ist, so wird (Formel 3)

$$\sqrt{p_1 p_2} = \sqrt{p^2-\delta^2} = p\sqrt{1-\frac{\delta^2}{p^2}} = p\left(1-\frac{1}{2}\frac{\delta^2}{p^2}\right).$$

Nun müßte eine Wage sehr schlecht justiert sein, wenn δ/p den Wert 1/1000 erreichte. In diesem Falle wäre $\frac{1}{2}\delta^2/p^2 = \frac{1}{2}$ Milliontel, eine Größe, welche im Verhältnis zu 1 jedenfalls nicht in Betracht kommt, wenn man mit einer solchen Wage wägt.

Über graphische Methoden bei Korrektionen s. z. B. Mehmke, Wied. Ann. 41, 892. 1890; Maurer, Archiv d. Deut. Seewarte 1894 Nr. 6.

5. Interpolation.

Oft soll eine Größe y, die von einer anderen x abhängt, für einen ganz bestimmten Wert von x ermittelt werden, wäh-

rend zusammengehörige Werte nur in der Nachbarschaft bekannt sind. — Ähnlich besteht die Aufgabe einer Beobachtung häufig darin, die Bedingungen festzustellen, durch welche eine bestimmte Einstellung des Beobachtungsobjektes entsteht. Es ist jedoch oft mühsam oder sogar unmöglich, die Verhältnisse ganz genau bis zur Erfüllung dieser Forderung einzurichten.

So ist es meistens mit Schwierigkeiten verknüpft, die Temperatur eines Körpers auf einem vorbestimmten Grade, bei welchem etwa sein Volumen, seine Elastizität, sein elektrisches Leitungsvermögen bekannt sein sollen, genau zu erhalten; bei einer Wägung die Gewichtstücke gerade so abzupassen, daß der Zeiger auf Null steht, kostet, wenn es überhaupt möglich ist, Zeit. Ähnliches gilt, wenn galvanische Leitungen so abgeglichen werden sollen, daß eine Galvanometernadel einen bestimmten Teilstrich anzeigt.

In solchen sehr häufigen Fällen kann man oft aus Beobachtungen in der *Nachbarschaft* die genauen gesuchten Verhältnisse interpolieren und dadurch Vorteile in der Einfachheit der Hilfsmittel, im Zeitaufwand und dazu noch in der Genauigkeit erzielen.

Es sei x_0 der Punkt, für den die Größe y_0 gesucht wird, und man kenne die Nachbarwerte y_1 für x_1 und y_2 für x_2, wobei x_1 und x_2 womöglich auf verschiedenen Seiten von x_0 genommen werden. — Liegen die Einstellungen so nahe bei einander und bei x_0, daß innerhalb dieser Grenzen die Änderung von y der Änderung von x proportional ist, so gilt

$$(y_0 - y_1) : (x_0 - x_1) = (y_2 - y_1) : (x_2 - x_1),$$

woraus

$$y_0 = y_1 + (x_0 - x_1) \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Beispiele siehe unter anderem in **10** und **90**.

Ist die obige Voraussetzung nicht erfüllt, so werden zur Interpolation, wenn das Gesetz des Wachstums nicht bekannt ist, mindestens drei benachbarte Beobachtungen verlangt. Für die Rechnung sind Formeln z. B. von Lagrange und Gaufs gegeben.

Vgl. Weinstein, Physik. Maßbest. § 291.

Meist wird im letzteren Falle die *graphische Interpolation* (**6**) angewandt.

6. Graphische Darstellung von Beobachtungen.

Eine Größe y sei zu mehreren Werten einer anderen Größe x, von der sie abhängt, beobachtet worden, etwa die Empfindlich-

keit einer Wage zu verschiedenen Belastungen, die Skalenteile eines Spektralapparats zu bekannten Lichtwellenlängen, das spezifische Gewicht oder eine andere Eigenschaft einer Lösung zu mehreren Konzentrationen derselben, oder Volumina, elektromotorische Kräfte, Löslichkeiten, Leitvermögen u. dgl. zu verschiedenen Temperaturen. In jedem Falle erlangt man dann am raschesten eine Übersicht über den gegenseitigen Zusammenhang der Größen, auch über ihren regelmäßigen Verlauf, wenn man sie geometrisch darstellt, indem man in Koordinatenpapier x als Abszisse und y als Ordinate einträgt. Wenn, wie es häufig vorkommt, ein einfaches mathematisches Gesetz für die Abhängigkeit der einen Größe von der anderen nicht bekannt ist, so gewährt diese graphische Darstellung, indem die eingetragenen Punkte durch eine Kurve verbunden werden, die einzige Übersicht über ihren Zusammenhang.

Graphische Ausgleichung von Fehlern. Diese geometrische Darstellung gemessener Werte kann, wie leicht zu sehen, zur Kontrole bez. zur Verbesserung von Beobachtungen dienen. Denn Beobachtungsfehler machen sich in Unregelmäßigkeiten der Zeichnung geltend, man kann aber häufig den richtigen Verlauf trotz den Unregelmäßigkeiten erkennen und eine ausgleichende Kurve durchziehen. Vorsichtig aber muß dies Verfahren gehandhabt werden; es verleitet leicht zu Irrtümern, besonders an den Enden der Kurven.

7. Über die Genauigkeit von Messungen. Zahlenrechnen.

Die vornehmste Regel bei einer Messung ist, daß die Genauigkeit des Resultates den Grundlagen und dem Zweck nach richtig beurteilt wird. Eine Überschätzung liegt einerseits vor, wenn man sich oder andere durch eine übertriebene Anzahl von Ziffern über die Genauigkeit täuscht. Derselbe Fehler liegt aber öfter noch in der Form vor, daß man sich durch eine von vornherein begangene Überschätzung des Endergebnisses dazu verführen läßt, einzelne Teile der Arbeit mit zweckloser Sorgfalt auszuführen oder Korrektionen mit unnötiger Genauigkeit zu behandeln. Eine Dichtigkeitsbestimmung mit direkter Volumausmessung von $^1/_{10}$ cm^3 Unsicherheit oder die Herstellung einer Lösung von einem Salze, dessen Masse wegen Hygroskopie auf 1% unbekannt bleibt, läßt sich nicht wesentlich dadurch verbessern, daß man auf 1 mg genau wägt. Wird das Leitvermögen eines Elektrolytes gemessen, dessen Temperatur auf $\pm\frac{1}{2}^0$ bekannt ist, so folgt aus letzterem Umstande allein etwa 1% Unsicherheit,

die sich auch nicht dadurch vermindern läßt, daß man das Leitvermögen selbst besonders genau bestimmt.

Überhaupt wird bei Messungen nicht selten eine unnötige Genauigkeit angestrebt und Mühe dadurch verschwendet. Dies ist u. a. bei solchen Objekten zu beachten, die an sich nicht scharf definiert sind. Dazu gehören z. B. die Eigenschaften vieler fester Substanzen, ganz besonders organischer. Von diesen lassen sich ihre Dichte, Elastizität, Festigkeit, elektrische und thermische Eigenschaften, z. B. die verschiedenen Leitvermögen, als Eigenschaften der Substanz durchaus nicht genau bestimmen, weil sie eben nicht in bestimmter Größe vorhanden sind, sondern von nicht genau definierbaren Eigenschaften, etwa vom hygroskopischen Zustande, abhängen, und weil sie meistens sogar innerhalb des untersuchten Stückes schwanken. Das spezifische Gewicht einer Holzart auf $^1/_{10000}$ anzugeben hat überhaupt keinen Sinn.

Zu den gewöhnlichsten Formen der Unterschätzung einer Genauigkeit des Resultates andrerseits gehört das Übersehen oder ungenügende Behandeln von Nebenumständen während der Messung. Vor allem gilt dies von der Temperatur; diese, man darf beinahe sagen unter allen Umständen, zu beachten, ist eine Vorsicht, die der Beobachter sich nicht früh genug angewöhnen kann und die besonders dann am Platze ist, wenn man den Temperatureinfluß auf einen Vorgang noch nicht kennt.

Kritik nach beiden Seiten bildet die Vorbedingung zweckentsprechenden Arbeitens.

Zahlenrechnen.

Das nämliche gilt von einer kritischen Behandlung der Zahl. Die numerische Berechnung der Resultate läßt sich nur mit einer beschränkten Anzahl von Ziffern ausführen, was bei den meisten Rechenoperationen die vollständige Genauigkeit ausschließt. Meistens würde die letztere auch zwecklos sein.

Im allgemeinen halte man die Regel fest, das Resultat in so vielen Ziffern mitzuteilen, daß die letzte wegen der Beobachtungsfehler keinen Anspruch auf Genauigkeit macht, daß die vorletzte aber für ziemlich richtig gelten kann. Im Zweifelfalle eher eine Stelle zu viel als zu wenig!

Der Rechnung nach sollen alle mitgeteilten Ziffern richtig sein! Hiernach muß wenigstens eine längere, beispielsweise logarithmische Rechnung, welche, durch das Vernachlässigen der späteren Ziffern, die letzte Stelle nach und nach um einige Einheiten fälschen kann, mit einer Stelle mehr geführt werden, als man mitteilen will; angehängte oder einen Dezimalbruch beginnende Nullen bleiben hier außer Betracht. Bei dem Abstoßen der letzten Ziffer wird, wenn sie mehr als 5 beträgt, die vorletzte bekanntlich um 1 erhöht.

Ein übertrieben genaues Rechnen gehört zu den gewöhnlichsten Fehlern. Es wird z. B. das Volumen v eines rechteckigen Körpers durch Ausmessen der drei Dimensionen bestimmt. Die letzteren seien etwa gleich 10,5 15,7 30,9 mm gefunden. Das genaue rechnerische Resultat

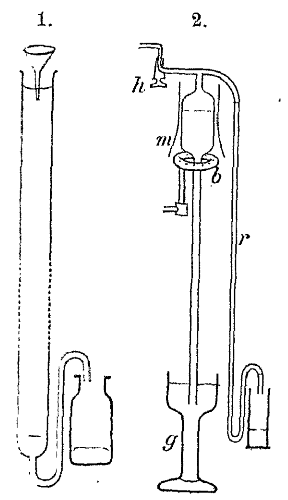
$v = 5093,865$ mm³ mitzuteilen würde kritiklos sein. Denn ein Fehler bei dem Ausmessen um je $^1/_{20}$ mm kann das Resultat bis zu 50 mm³ zu groß oder zu klein gemacht haben. Es genügt also $v = 5090$ oder äußerstenfalls 5094 zu berechnen, also abgekürzt zu multiplizieren oder mit 4stelligen Logarithmen zu rechnen. Auf etwa 1 Promille genau kann auch ein gewöhnlicher Rechenschieber arbeiten. Umgekehrt findet man oft Divisionen auf zu wenige Stellen ausgeführt, vielleicht ein spezifisches Gewicht mittels Wägungen auf Zehntel mg mit einer feinen Wage bestimmt und schließlich = 2,5 berechnet, während vielleicht die 4te Dezimale noch richtig sein könnte.

Für genauere nicht logarithmische Rechnungen sind außer der Rechenmaschine u. a. die Crelle'schen Rechentafeln geeignet.

8. Technisches.

1. **Reines Quecksilber.** Das in eisernen Flaschen aus Idria bezogene Quecksilber genügt nach Filtrieren für die meisten Zwecke. Zum Gebrauch in kleinen Mengen ist ein Fläschchen mit Auslaufspitze bequem.

Getrocknet wird Quecksilber oberflächlich mit Fließpapier, vollkommener durch Erwärmen in einer reinen eisernen oder Porzellan-Schale auf etwa 150° unter Umrühren. Staub entfernt man mittels Filtrierens, am einfachsten durch ein gewöhnliches, bei größerem Druck mehrfach genommenes Filter mit einem oder einigen feinen Löchern an der Spitze. Fett wird durch Ausschütteln mit etwas Kali- oder Natronlauge oder Benzol und Alkohol beseitigt, fremde unedle Metalle und Oxyd zieht man durch Schütteln mit verdünnter Salpetersäure oder Lösungen von Eisenchlorid oder doppeltchromsaurem Kali aus; natürlich unter wiederholtem gründlichen Nachschütteln mit Wasser. Oder man läßt das Quecksilber aus einem mit mehreren ganz feinen Öffnungen versehenen, z. B. durch ein Stückchen Bambusrohr geschlossenen Trichter durch 1 bis 1½ m hohe Säulen der genannten Flüssigkeiten und schließlich durch Wasser laufen. Ein aufgebogener unterer Fortsatz des Rohres (Fig. 1) fängt das Quecksilber auf, welches durch seinen Druck die Flüssigkeitssäule hält und im Überschuß abfließt.



Schwer flüchtige Metalle entfernt man durch Abdestillieren des Quecksilbers, am besten im Vakuum, d. h. in barometerähnlichen Vorrichtungen (Fig. 2). Durch den fettfreien (s. Nr. 25) Hahn *h* hindurch wird das Quecksilber aus dem Vorrat in *g* mit der Luftpumpe gehoben; die Öffnung von *r* läßt man dabei in Quecksilber tauchen. Ist das Kühlrohr *r* hinreichend eng, so gelingt es, durch Heben des Gefäßes *g* Gase,

welche über dem Quecksilber geblieben oder während der Destillation ausgeschieden sind, mit dem überfließenden Quecksilber auszutreiben, falls sie nicht von selbst mit dem Quecksilber in *r* abwärts wandern. Die Wärme des kleinen Rundbrenners *b* wird durch den Mantel *m* zusammengehalten. S. z. B. Weinhold, Carl's Rep. 23, 791. 1887; Leonh. Weber ib. 15, 1. 1879; Dunstan u. Dymond, bei denen die Luftpumpe wegfällt, Phil. Mag. 29, 367. 1890; Pollak, Ann. d. Ph. 15, 1049. 1904.

Gegen flüchtigere Metalle dient elektrolytische Destillation: das Quecksilber kommt auf den Boden eines breiten Gefäßes als Anode in eine etwas angesäuerte Lösung von Merkuronitrat; in derselben Lösung steht ein kleineres Gefäß mit Platinkathode. Durch einen Strom (etwa 0,01 A/cm²) wird das Quecksilber gelöst und unter Zurücklassung der oxydierbaren Metalle niedergeschlagen. Jaeger, ZS f. Instr. 1892, 354.

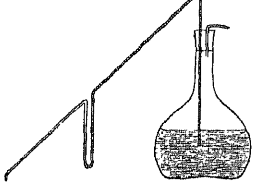
2. **Reines Wasser.** Zu Kühlröhren beim Destillieren pflegt man Silber, Zinn oder Glas zu verwenden. Glas gibt anfangs Bestandteile ab, was aber bei guten Sorten (vgl. 4) mit der Zeit aufhört. Hartnäckig können eingetrocknete feste Verunreinigungen übergespritzten Wassers stören. — Das Stoßen in Glasgefäßen wird durch Metallstückchen (Platin) vermindert. — Das zuerst übergegangene Wasser ist häufig wegen mitgerissener flüchtiger Verunreinigungen schlechter als der Vorrat.

Unvermeidlich ist die Verunreinigung des Destillates durch atmosphärische Kohlensäure, besonders wenn diese durch Flammen oder Atmung vermehrt ist. Im letzteren Falle kann das Destillat durch Schütteln oder besser durch einen Luftstrom verbessert werden, der mittels der Wasserluftpumpe in einer Waschflasche aus einer engen Rohröffnung in kleinen Blasen durchgesaugt wird. Gründlicher reinigt ein Luftstrom, der über Ätzkali oder Natronkalk oder durch eine Waschflasche mit verdünnter Alkalilösung geleitet worden ist. Langsamer wirkt das Anstreichen des äußeren Flaschenhalses mit gutem gelöschten Kalk und Überstülpen eines Glases, welches die Kommunikation der Luft über dem Wasser mit dem Kalk gestattet; Fig.

Verunreinigungen lassen sich auch durch Ausfrieren beseitigen, indem man den nicht gefrorenen Teil weggießt. Oberflächlich abgespültes Natureis kann schon ein gutes Wasser liefern.

Bei der Aufbewahrung in Glas löst das Wasser, je nach der Glassorte rascher oder langsamer, mehr oder weniger Bestandteile, besonders Alkali, aus den Wänden. Vorzüglich ist Jenaer Glas 59. Vgl. Nr. 4.

Nach dem Einblasen in Spritzflaschen sauge man die kohlensäurehaltige Luft sofort zurück. — Vielfach bequem ist für feinere Zwecke eine Flasche mit Heberrohr, beides aus gutem Glase; Fig. Nach dem Ausfließen bringt man durch Zurückneigen das äußere Niveau in den Siphon zurück.



Vgl. über Wasser und Luft ZS f. phys. Ch. 42, 198. 1902.

Das feinste Prüfungsmittel auf unorganische gelöste Stoffe ist das elektrische Leitvermögen (**96**). Gutes Wasser hat etwa 10^{-6}; durch Entziehen der Kohlensäure (vgl. oben) kann man auf etwa $0{,}5 \cdot 10^{-6}$ kommen.

3. **Bereitung von Gasen.** Man erhält: Wasserstoff aus reinem Zink mit verdünnter Schwefelsäure oder Salzsäure. — Sauerstoff durch Erhitzen von 700 gr chlorsaurem Kali mit 100 gr Braunstein, wobei man beigemischtes Chlor durch Ätzkali absorbieren läßt. Rein wird der Sauerstoff aus Kaliumpermanganat oder in kleineren Mengen aus Quecksilberoxyd dargestellt. Beide Gase können auch elektrolytisch bereitet werden. — Reinen Stickstoff: das Erhitzen einer Lösung von 185 gr $NaNO_2$, 185 NH_4Cl, 95 $K_2Cr_2O_7$ in 900 ccm Wasser gibt 80 Liter. Stickstoff mit den atmosphärischen Beimengungen wird erhalten, wenn Luft durch eine Waschflasche mit konzentrierter Ammoniaklösung, dann über glühende Kupferspäne geschickt und getrocknet wird. — Helium durch Erhitzen von Monazitsand (Cleveit; Samarskit) in einer Wasserstoffatmosphäre. — Argon aus Luft durch Überleiten über glühendes Magnesium oder besser Calcium, welche O, N und CO_2 absorbieren; Ramsay u. Travers, ZS f. phys. Ch. 28, 241. 1899. (Über die Abscheidung von Krypton und Xenon s. ibid. 38, 641. 1901.) Noch ergiebiger (in 2 Tagen 11 Lit.): Absorption der aktiven Gase durch ein Gemisch von 90 % Calciumkarbid mit 10 % $CaCl_2$ im Eisengefäß bei 800°; F. Fischer u. Ringe, Ber. D. ch. Ges. 1908, 2017. — Kohlensäure aus reinem Marmor mit Salzsäure. — Kohlenoxyd durch Erhitzen einer Mischung von 1 T. Natriumformiat, 6 T. Schwefelsäure und 3 T. Wasser. — Ammoniak aus konzentrierter wässeriger Lösung, die, bei etwa 80° siedend, fast nur Ammoniak abgibt. — Schweflige Säure durch Erhitzen konzentrierter Schwefelsäure mit Kupferspänen oder durch Auftropfen von verdünnter Schwefelsäure auf Natriumbisulfitlauge. — Chlor aus Braunstein und Salzsäure.

Reinigen der Gase. Meistens durch vorgelegte Absorptionsmittel, entweder in Waschflaschen, wobei das Gas in kleinen Blasen nicht zu rasch durchtreten soll, oder auch in fester Gestalt. (Über eine rotierende Schlauchpumpe zum Wiederholen der Zirkulation s. Prytz, ZS f. Instr. 1905, 193; auch Bose, Gött. Nachr. 1906, 280.) Als Vorlagen dienen: Wasser gegen mitgerissene Salze, Säuren oder Alkalien; gegen Säuren sicherer alkalische Lösungen (doppeltkohlensaures Natron, wenn Kohlensäure gewaschen wird); gegen flüchtiges Alkali Schwefelsäure- oder Phosphorsäurelösung; gegen Sauerstoff alkalische Pyrogallollösung (Rezept von Hempel: 5 gr Pyr. in 15 gr Wasser, kurz vor dem Gebrauch gemischt mit 120 gr Ätzkali in 80 gr Wasser gelöst) oder glühende Kupferspäne; gegen Wasserstoff glüh. Kupferoxyd; gegen Organisches (z. B. Kohlenwasserstoffe) übermangansaures Kali oder „Bleichchromat". — Auch Überleiten durch Glasröhren z. B. mit zerkleinertem Ätzkali, oder Bimsstein mit Schwefelsäure. — Wasserstoff kann man, nach dem Waschen mit einer alkalisch gemachten Lösung von $KMnO_4$, welche Säuren, auch Arsen zurückhält

und Kohlenwasserstoffe zerstört, getrocknet von ausgeglühtem Palladiumschwamm absorbieren lassen und durch Erhitzen unter Luftabschluß später wieder frei machen. — Über Reinigung durch Kondensieren und fraktioniertes Destillieren s. z. B. Ramsay u. Travers l. c.; Moissan, Ann. chim. ph. (8) 8, 74. 1906; Kam. Onnes, ZS f. Instr. 1907, 223. — Reinigen von Edelgasen (Argon, Helium usw.) in geschlossenen Behältern: die chemisch aktiven Gase werden durch Calcium absorbiert (Maquenne, Soddy), welches, z. B. elektrisch, etwa durch induzierten Wechselstrom, zu schwacher Rotglut erhitzt ist. Soddy, Proc R. S. A 78, 429. 1907. — Wertvolle Anleitungen bei Travers, Exp. Untersuchungen von Gasen, deutsch von Estreicher, Brschw. 1905.

Trockenmittel. Man führt das Gas über Stücke von geschmolzenem Chlorcalcium, oder Bimsstein mit konzentrierter Schwefelsäure, oder durch eine Waschflasche mit letzterer, am sichersten über wasserfreie Phosphorsäure in einem langen Rohr. — Mit Auswahl ist auch langsames Durchleiten durch ein in fester Kohlensäure oder flüssiger Luft gekühltes Rohr brauchbar.

Käuflich in Bomben sind: H, O (in 95 und 99 % Reinheit), N, Cl, CO_2, SO_2, NH_3, N_2O. — Luft, Sauerstoff, Stickstoff, flüssig in Dewarschen Flaschen liefert die Gesellsch. f. Markt- u. Kühlhallen, Berlin. — Vgl. Teichmann, Kompr. u. verflüss. Gase, Halle 1908.

4. **Glassorten.** Die Löslichkeit der Glassorten im Wasser und ihre damit zusammenhängenden hygroskopischen Eigenschaften sind von sehr ungleicher Größe. 1 qdm gibt bei den besten Gläsern in gewöhnlicher Temperatur täglich etwa 0,002, bei schlechten bis zu 0,2 mg Substanz in Lösung. Temperatursteigerung beschleunigt den Angriff ungeheuer stark. Haltbar ist gutes Jenaer Geräteglas und besonders Nr. 59. Eine Schätzung der Güte eines Gefäßes ergibt sich am einfachsten aus der Haltbarkeit der Wasserfüllung selbst mittels des elektrischen Leitvermögens (**96**). Rascher gewinnt man ein Urteil, wenn man das Glas im Stahlmörser und der Achat-Reibschale unter Vermeidung von Verunreinigung fein pulverisiert und einen Wasseraufguß auf sein Leitvermögen oder durch Eindampfen auf blankem Platin auf seinen Gehalt an fester Substanz prüft. Auch die hygroskopische Wasseranziehung liefert, bei Pulvern aus der Gewichtszunahme, bei größeren Flächen nach der elektrischen Isolierung in feuchter Luft beurteilt, eine Prüfung der Güte. — Oder man bringt die Glasfläche in mit Wasser gesättigten Äther, der mit etwa $^1/_{10}$ % Eosin gefärbt ist. Je löslicher das Glas, desto intensiver färbt es sich im allgemeinen; s. Mylius, ZS f. anorg. Ch. 55, 233. 1907. — In einer Salzsäure-Atmosphäre bekommen schlechte Gläser eine stärkere Trübung als gute (R. Weber).

Gute und mittlere Gläser werden mit der Zeit durch den Gebrauch, insbesondere auch durch Behandeln mit warmem Wasser, besser.

S. u. a die Abhandlungen von Warburg u. Ihmori, Mylius u. Förster, R. Weber, E. Pfeiffer, Schott, F. Kohlrausch in Wied. Ann., Ber. d. Deutsch. Chem. Ges., ZS f. Instr., ZS f. analyt. Chem., ZS d. Vereins z. Beförd. d.

Gewerbefleißes. Über die ältere Literatur vgl. z. B. Kohlrausch, Wied. Ann. 44, 577. 1891. — S. auch Hovestadt, Jenaer Glas etc., Jena 1900.

5. **Physikalische Eigenschaften verschiedener Gläser.** Von einheitlicher Beschaffenheit moderner Glassorten kann bei deren sehr verschiedener Zusammensetzung nicht mehr die Rede sein, selbst wenn man von den spezifisch optischen Gläsern absieht. Die folgenden Zahlen bedeuten die Grenzen der Eigenschaften von Gläsern für gewöhnliche Zwecke; in Klammern sind extreme Werte angegeben.

Dichtigkeit	$s =$	2,4	(2,3)	bis	2,6	(5,9)
Kub. Temp.-Ausd.-Koeff.	$\alpha = 0{,}0000$	18	(11)	„	31	(34)
Spez. Wärme	$c =$ 0,	18	(08)	„	21	(23)
Wärmeleitvermögen	$k =$ 0,00	18	(11)	„	20	(22)
Elast.-Modul	$E = 100 \times$	59	(47)	„	75	(79) kg/mm²
Lichtbrechungsverhältnis	$n =$	1,51	(1,50)	„	1,53	(1,75)

Jenaer Thermometerglas XVI $s = 2{,}58$ $\alpha = 0{,}0_4234$ $c = 0{,}19$ $n = 1{,}527$

„ „ 59 $s = 2{,}37$ $\alpha = 0{,}0_4174$ $c = 0{,}19$ $n = 1{,}497$

Aus der bekannten Zusammensetzung eines Glases kann man die Eigenschaften genähert nach dem Ausdruck $C_1 m_1 + C_2 m_2 + C_3 m_3 \ldots$ berechnen, wenn 1 Gew.-Teil Glas $m_1, m_2 \ldots$ Teile der einzelnen Stoffe enthält und wenn jeder die Konstante C der folgenden Tabelle bekommt:

	SiO_2	B_2O_3	K_2O	Na_2O	CaO	BaO	ZnO	PbO	Al_2O_3
für α 0,000	008	001	085	100	050	030	018	030	050
für c 0,	191	237	186	267	190	067	125	051	207
für E 100 ×	65	20	71	100	100	100	15	47	160
für $1/s$ 0,	435	526	357	385	303	143	169	104	244.

Winkelmann u. Schott, Wied. Ann. 49, 401. 1893; 51, 697, 730. 1894; Winkelmann, 61, 105. 1897; s. auch Hovestadt, Jenaer Glas etc., Jena 1900.

Ein gutes Thüringer Glas wird durchschnittlich etwa 0,70 SiO_2, 0,06 K_2O, 0,12 Na_2O, 0,10 CaO, 0,02 Al_2O_3 haben.

6. **Glas versilbern.** Dies geschieht durch Mischen zweier Lösungen A und B. Nach Böttger: A) Man löst 5 gr Silbernitrat in destilliertem Wasser, versetzt mit Ammoniak, bis der Niederschlag beim Umrühren fast vollständig verschwindet, filtriert und verdünnt auf 500 ccm. B) 1 gr Silbernitrat, in etwas Wasser gelöst, wird in ½ l siedendes Wasser eingegossen. Dazu setzt man 0,83 gr Seignettesalz, läßt kurze Zeit sieden bis der entstandene Niederschlag grau aussieht, und filtriert heiß. Die Lösungen halten sich im Dunkeln einige Monate. — Statt dessen wird als schneller wirkende Lösung B mehr empfohlen (Lumière) eine 1prozentige Lösung von Formaldehyd; 40 % Lösung ist käuflich.

Andere Rezepte, mit Anwendung von Zucker- und (kohlensäurefreier!) Alkalilösung z. B.: Martin, Pogg. Ann. 120, 335. 1863; Lohse, Jahrbuch für Photographie, 1887; Jzarn, C. R. 135, 240. 1902.

Die gut (mit Salpetersäure, Ätzkali, Alkohol) gereinigte Glasfläche wird einige mm hoch mit einer soeben hergestellten Mischung aus gleichen

Raumteilen der Lösungen A und B (von der Formaldehydlösung nur die Hälfte) bedeckt oder besser nach unten gerichtet in dieses Gemisch eingesenkt. Nach etwa einer Stunde (5 bis 10 min bei der Formaldehydlösung) ist die Reduktion beendigt; die Platte wird abgespült, die Operation erneuert usf., bis die Schicht genügend dick ist. Falls sie als Außenspiegel dienen soll, poliert man nach dem Trocknen vorsichtig, etwa mit dem Handballen. Für Innenspiegel darf man die Reaktion dadurch beschleunigen, daß man die Böttger'sche Lösung B vor der Mischung auf etwa 70° erwärmt. Zum Schutz kann schließlich das Silber mit einem Lack überzogen werden; dünne Spiegel verziehen sich allerdings hierdurch leicht, auch weil die meisten Lacke, selbst Schellack, ein wenig hygroskopisch sind. — Zur Erzielung dünner, gleichmäßig durchscheinender Schichten soll man die Lösung während der Reaktion in Bewegung halten.

6a. **Spiegel durch Kathodenzerstäubung.** Der dazu nötige hochgespannte Gleichstrom kann einem Induktorium mit Hilfe eines Gleichrichters (80 II) entnommen werden. Das hohe Vakuum (0,01 bis 0,02 mm) wird, um Quecksilberdampf auszuschließen, mittels gekühlter Holzkohle (s. Nr. 24) bewirkt. Anordnungen z. B. bei Leithäuser, ZS f. Instr. 1908, 113.

7. **Glas platinieren.** Nach Kundt: 3 gr Platinchlorid, in 10 ccm abs. Alkohol gelöst, werden mit 30 ccm konzentrierter alkoholischer Lösung von Borsäure versetzt. Hierzu kommt die doppelte Menge einer Mischung von venezianischem Terpentin und Lavendelöl, je nach der beabsichtigten Dickflüssigkeit in verschiedenem Verhältnis. Für optisch brauchbare Spiegel wird ein Tropfen von mäßig dünnflüssiger Lösung aufgebracht und eine zweite Glasplatte aufgelegt, so daß sich zwischen beiden eine dünne Flüssigkeitsschicht bildet. Man zieht die Platten voneinander ab und erwärmt langsam in einem vorn offenen Muffelofen zu ganz schwacher Rotglut.

Um Glas zu löten, bestreicht man es mit dickflüssiger Lösung und erwärmt über der Flamme langsam zur Rotglut. Das eingebrannte Platin wird galvanisch verkupfert und kann dann mit Zinn gelötet werden (Kundt). Auch versilbertes Glas läßt sich nach Einbrennen des Silbers und Verkupfern löten; der Zusammenhalt ist nicht so fest (Röntgen).

8. **Glas blasen.** Eingehende Anweisung z. B. in Ebert, Anleitung zum Glasblasen, Leipzig 1904; auch in Ostwald-Luther, Phys.-ch. Messungen, 2. Aufl. S. 102. Im allgemeinen ist folgendes zu beachten. Das Aufblasen oder Ausziehen wird in der Regel nach dem Entfernen aus der Flamme ausgeführt. — Das Anwärmen ist auf eine beträchtliche Strecke auszudehnen; die Gefahr des Zerspringens pflegt vorüber zu sein, sobald das Glas die Flamme färbt. — Dünnere Röhren biegt man in der rußenden Flamme (Fischschwanzbrenner); dickere müssen während des Biegens durch Blasen geformt werden. — Zusammenzuschmelzende verschiedene Glasstücke sind einige Zeit in der Flamme gut zu „verblasen", so daß keine scharfe Berührungsfläche bleibt, und nachher in der leuchtenden Flamme zu kühlen, bis sie schwarz werden. — Dünne Stücke werden oft bequemer im Bunsen-

brenner oder sogar über einem Argandbrenner bearbeitet, als in der Gebläselampe. — Platin wird durch Vermittlung von „Einschmelzglas" (Bleiglas) eingeschmolzen; Jenaer Thermometerglas XVI verträgt direktes Einschmelzen. Das Kühlen von Stücken mit eingeschmolzenem Platin, für welches die rußende Flamme zu vermeiden ist, kann über dem Cylinder eines Argandbrenners geschehen. — Feine Löcher lassen sich in dünnwandiges Glas mit einer zugespitzten glühend gemachten Lichtkohle drücken.

9. **Glas und Metall zeichnen.** Vorübergehend zeichnet man mit Glastinte, die vor dem Gebrauch aufgeschüttelt wird, oder mit den blauen Fettstiften von Joh. Faber; dauernd mit „Diamanttinte" oder mit dem Schreibdiamant, wobei aber bei Glas ein Schneiden, welches leicht mit der Zeit oder bei Erschütterungen zu Sprüngen führt, vermieden werden muß. — Über Glas teilen s. **21**, 6.

10. **Glas schneiden.** Der Schneiddiamant ist auf seine richtige Stellung auszuprobieren und mit geringem Druck gut parallel zu führen. Weite Glasröhren schneiden sich am besten mit dem Röhrendiamant von innen. Enge Röhren ritzt man mit dem Glasmesser und bricht sie nachher. Mit dem Brechen soll bei Platten wie bei Röhren tunlichst eine auseinanderziehende Kraft verbunden werden. — Sprengkohle soll nicht viel Asche geben. Sie wird etwas vor den Sprung gehalten, den man fortführen will.

11. **Metalle amalgamieren.** Zink wird in Salzsäure, Kupfer und Messing in verdünnter Salpetersäure mit einer metallischen Oberfläche versehen und dann in Quecksilber getaucht oder mit solchem eingerieben. Nachher wäscht man mit Wasser und entfernt ev. überschüssiges Quecksilber. Statt in Quecksilber kann man in eine etwas saure Lösung von Quecksilber-Chlorid bez. Nitrat eintauchen.

Um Eisen zu amalgamieren, verzinnt man es zuvor in der Hitze.

Platin, ganz frisch gereinigt, amalgamiert sich häufig schon beim Eintauchen in Quecksilber, sonst bringt man es als Kathode in eine Lösung von Quecksilbernitrat oder wendet Natriumamalgam an.

12. **Löten.** Bei dem gewöhnlichen Löten ist besonders die vorgängige Entfernung des Oxyds durch Benetzen mit Lötwasser etc. und Erhitzen, sowie das Ruhighalten während des Erstarrens zu beachten. Dünne Körper verzinnt man durch Eintauchen in einen Fingerhut mit geschmolzenem Zinn. Das Lötwasser nachher abspülen! Salmiakpulver, Stearin oder Kolophonium können einigermaßen das Lötwasser ersetzen. Die Schneide eines Lötkolbens wird heiß auf einem Stück Salmiak gerieben. — Als säurefreies, leichtfließendes Lot wird „Tinol", auch „Fludor" empfohlen.

Mit Gold löten. Ein Stückchen Goldblatt oder Golddraht wird mit etwas Boraxpulver zwischen den zu verlötenden Flächen in der Stichflamme zum Schmelzen gebracht.

12a. **Leicht schmelzbare Legierungen.** 1 Blei, 1 Zinn, 2 Wismut; 94° (Rose). 2 Blei, 1 Zinn, 1 Cadmium, 4 Wismut; 60° (Wood).

13. **Platin schweißen.** Die zu verbindenden Stückchen werden in

Berührung miteinander (zwei Drahtenden etwa einmal umeinander gewickelt, oder ein Draht durch ein oder zwei Löcher in einem Blech durchgesteckt) in der Spitze der Gebläseflamme weißglühend gemacht und auf einer dicht darunterstehenden blanken Eisenfläche durch einen oder zwei kurze Schläge mit einem kleinen Hammer vereinigt.

Zusammenschmelzen kann man Platinstückchen in der Stichflamme des Sauerstoffgebläses. Mit Kupfer oder Silber läßt sich Platin in der gewöhnlichen Gebläseflamme leicht haltbar zusammenschmelzen.

14. **Stahl härten.** Der zur Kirschrotglut gleichmäßig und rasch erwärmte Stahl wird in Wasser oder Öl abgelöscht; Einreiben mit Seife vermindert das Oxydieren. Gestreckte Stücke sind, damit sie sich nicht verwerfen, longitudinal einzusenken. Um glasharten Stahl anzulassen, kann je nach dem gewünschten Grade siedendes Wasser, heißes Öl oder langsam die Flamme gebraucht werden, in welcher die Anlaßfarbe (gelb bis blau) den Grad des Anlassens gibt. (Vgl. Holborn, ZS f. Instr. 1891, 114.)

15. **Metalle ausglühen.** Dünne Drähte soll man ohne Spannung in oder über eine kleine Flamme halten, ev. auf eine Röhre gewickelt erhitzen. Ein gutes Mittel, auch für dünne Bleche, ist der elektrische Strom. Oxydierbare Metalle glüht man im bedeckten Gefäß unter einem Strom von Kohlensäure oder Wasserstoff. Platin darf nicht in eine rußende Flamme und im Bunsen-Brenner nicht dauernd in den inneren Kegel kommen, der unverbrannten Kohlenstoff enthält!

16. **Magnetisieren. Entmagnetisieren.** Kurze Stäbe hält man zum Magnetisieren zwischen die Pole eines Hufeisenmagnets und hebt sie parallel den Kraftlinien heraus. Längere magnetisiert man durch Streichen oder mittels Einlegens in oder Durchziehens durch eine Stromspule. Plötzliches Unterbrechen des Stromes, während der Stab in der Spule liegt, ist zu vermeiden. — Entmagnetisieren kann man kleine Stücke durch Rotation zwischen den Polen eines Magnets oder ruhend zwischen den Polen eines rotierenden Magnets (Zentrifugalmaschine), indem man sie während der Bewegung langsam entfernt. Oder man behandelt die in einer Spule liegenden Stücke mit kräftigen Wechselströmen, die man durch einen Flüssigkeitsrheostaten allmählich bis auf Null abschwächt.

17. **Schleifen und Polieren kleiner Körper.** Das Schneiden geschieht mit einem Schmirgeldraht oder mit der Laubsäge, das Abschleifen auf einem Stein oder einer Glasplatte, bei harten Körpern mit Schmirgel, bei weicheren mit Bimsstein, oder bloß auf mattem Glase. Poliert wird mit Englisch Rot, Tripel oder Zinnasche, oder bei ganz weichen Körpern ohne Poliermittel, auf einer mit Leinwand oder Papier stramm bezogenen Glasplatte tunlichst mit gerader Führung des Körpers, deren Richtung man oft wechselt. Als Schleif- oder Polierflüssigkeit dient, wenn Wasser den Körper angreift, Alkohol. Den Finger mag man im letzteren Falle mit Kautschuk bedecken. Englisch Rot oder Tripel wird trocken angewandt. — Kristallen für optische Untersuchung gibt man zuerst eine oberfläch-

liche Politur, um unter dem Polarisationsapparat (**70**) zu erkennen, ob die Platte richtig orientiert ist. Man korrigiert, bis die gewünschte Richtung erzielt ist, und poliert nach vollständigem Eben- und Feinschleifen fertig.

Glasschliffe, z. B. Glasstöpsel lassen sich oft mittels feinen Schmirgelpulvers, welches mit etwas Wasser zwischen die Flächen gebracht wird, durch gleichmäßiges Drehen unter mäßigem Druck verbessern.

18. **Rezepte für Galvanoplastik,** auf 1 Liter Wasser berechnet. Die Stromstärken gelten als Stromdichten auf 1 qdm.

Vergolden. $\frac{1}{5}$ bis $\frac{1}{4}$ A; 10 gr Goldchlorid und 20 gr Cyankalium; oder 1,5 gr Goldchlorid, 1 gr Cyankalium, 15 gr krist. Natriumsulfit, 50 gr krist. Natriumphosphat.

Versilbern. 0,3 bis 0,6 A; 46 gr Kaliumsilbercyanid, 12 gr Cyankalium.

Verkupfern. 0,4 bis 0,5 A; 20 gr krist. Kupferacetat, 20 gr Cyankalium, 17 gr Soda, 25 gr krist. Natriumsulfit.

Vernickeln. $\frac{1}{2}$ bis 1 A; 70 gr krist. Ammoniumnickelsulfat, 25 gr Ammoniumsulfat, 5 gr Zitronensäure.

Verplatinieren (blank). 510 gr Soda, 250 gr Zitronensäure in 1 Liter Wasser gelöst. In die heiße Lösung wird Platinsalmiak eingetragen, der aus 37 gr Platinchlorid gefällt ist. Man elektrolysiert bei etwa 80°.

Weiteres z. B. Stockmeier, Handb. d. Galvanostegie usw., Halle 1899.

Überziehen von Metallen mit Platinschwarz. Man bringt das Metall (Platin oder Silber) als Kathode in eine verdünnte, mit etwas Salzsäure versetzte Lösung von Platinchlorid gegenüber einer Platinanode. Einfacher, aber mit zufälligerem Erfolge, berührt man das Blech unter der Flüssigkeitsoberfläche mit Zink. — 1 Teil Platinchlorid in 30 Teilen Wasser (sp. Gew. = 1,024) unter Zusatz von 0,008 Teilen Bleiacetat gibt guten schwarzen Überzug (Lummer und Kurlbaum). Die Stromdichte soll etwa 0,03 A/cm² betragen; auch ohne Strommessung erkennt man die richtige Stromstärke an einer Gasentwicklung von mäßiger Stärke; 5 bis 10 min Strom wird ausreichen. Zum Reinigen der Fläche mag man den Strom vorher entgegengesetzt durchleiten. Die Anode wird nicht angegriffen, also verbraucht sich die Lösung. — Vgl. z. B. K. u. Holborn, Elektrolyte S. 9.

19. **Holz usw. paraffinieren.** Das Holz wird, in Paraffin untergetaucht, mit dem letzteren erheblich über den Siedepunkt des Wassers (etwa auf 140°) so lange erhitzt, bis das Entweichen von Gasblasen aufhört. Alsdann läßt man so langsam erkalten, daß der Luftdruck Zeit hat, die Holzporen mit Paraffin zu füllen. So behandeltes Holz isoliert auch statische Elektrizität. Papier zieht man langsam durch das heiße Paraffin (über 100°! so daß zugleich das Wasser verdampft) und läßt während des Erkaltens den Überschuß abtropfen. — Über Hygroskopie des Holzes s. auch **21.**

20. **Kokon abspulen.** Nach Auflösen des Klebstoffs binnen etwa 10 min in heißem Wasser entfernt man, den Kokon in der Hand drehend,

die oberflächliche lose Seide, an welche der eigentliche Faden sich anschließt. Man spult den auf erneuertem heißen Wasser schwimmenden Kokon auf ein Röllchen ab, welches auf einen konischen Stab (Stahlfederhalter) gesteckt ist. Der Faden soll hierbei auf eine so große Strecke durch die Luft gehen, daß er trocken aufläuft, weil sonst die Fäden zusammenkleben. — Das anfängliche oder während des Abspulens etwa verloren gegangene freie Ende des Fadens sucht man durch leichtes Schlagen mit einem Stäbchen zu finden. — Der Faden wird nach innen feiner; um über verschiedene Stärken zu verfügen, spult man die Teile auf mehrere Rollen. — Über das Aufhängen am Kokon s. **72b.**

21. **Quarz schmelzen.** Ein Kristall wird durch Erhitzen und Ablöschen rissig gemacht; die Teile lassen sich im Knallgasgebläse zusammenschmelzen und formen. Aus Stäbchen können auch Röhren zusammengesetzt werden. Die verschwindende Wärmeausdehnung so behandelten Quarzes gestattet dabei auch schroffes Kühlen. — Quarzgeräte verfertigen Heraeus in Hanau und Siebert & Kühn in Kassel. — Technisches Verfahren: Day u. Shepherd, Science 23, 670. 1906. — Nicht durchsichtige Geräte aus Quarz liefert die Deut. Quarzgesellsch. in Beuel a/Rh.

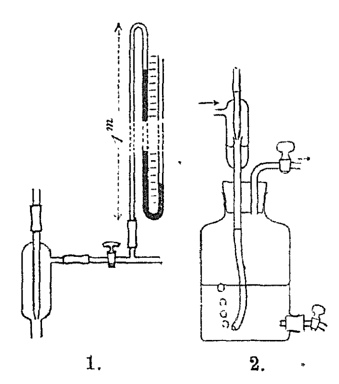
Quarzfäden. Boys, Phil. Mag. (5).45, 489. 1887. Man befestigt ein Quarzstäbchen mittels Kitt oder einer Klammer an einem Pfeil aus Holz oder aus einem Strohhalm mit einer Nadelspitze. Darauf wird die Mitte des Stäbchens im Knallgasbrenner geschmolzen und, nachdem der Quarz weich geworden ist, der Pfeil von einer am Blastisch im Schraubstock befestigten Armbrust aus größerer Entfernung in ein Brett abgeschossen. Die hintere Hälfte des Stäbchens hält man fest. Auch kann man mit der Stichflamme Fäden direkt weg- und an ein hintergestelltes Stück Sammet anblasen (Nichols). Quarzfäden sind nicht hygroskopisch und besitzen bei großer Festigkeit eine sehr geringe elastische Nachwirkung. Als leitende Aufhängung für Elektrometernadeln kann man versilberte (Nr. 6) oder hygroskopisch gemachte Fäden benutzen (Himstedt, Dolezalek).

21a. **Kitte.** Genannt seien 1) warm: Schellack oder guter Siegellack, Wachskolophonium, Guttapercha, Marineleim (Kautschuk und Schellack mit Teer), Picein (s. Walter, Ann. d. Ph. 18, 860. 1905), Klebwachs, auch wohl Paraffin; 2) kalt: Gips mit Gummi arabicum, 20 gr Bleiglätte mit 5 ccm Glyzerin, Hausenblase, Wasserglas, Kaseinkitt (Kasein in gesätt. Boraxlösung oder in Wasserglas), Bleiglätte oder Mennige mit Leinölfirnis angerührt, gebrannte Magnesia mit gesätt. $MgCl_2$-Lösung. — Vgl. auch Ostwald-Luther S. 113.

22. **Luftpumpen- und Hahn-Fett.** Talg mit Schmalz oder Olivenöl, oder Wachs mit Knochenöl, zu passender Konsistenz gemischt. Ohne Fettdämpfe: Wachs und Vaselin (Röntgen); noch vorzuziehen weißes Paraffin mit Vaselinöl (Hagen); 2 Kautschukschnitzel, 1 Vaselin, $\frac{1}{8}$ Paraffin (Travers).

23. **Wasserluftpumpe.** Strahlpumpe (in Fig. 2 f. S.); für großen Wasserdruck. Dieser darf nicht durch eng gebohrte Hähne verringert werden.

Erreichbares Vakuum vielleicht bis 10 mm Quecksilberdruck. Ablagerungen aus kalkhaltigem Wasser an der Spitze können die Wirkung beeinträchtigen; man entfernt dieselben mit Salzsäure. — Bunsensche Tropfenpumpe (Fig. 1); für geringen Druck, wenn Gefälle zur Verfügung steht. Für ein langsam gleichförmiges Saugen, z. B. beim Austrocknen von Röhren, ist die Tropfenpumpe überhaupt sicherer und ökonomischer. Jede Strahlpumpe läßt sich durch ein Abfallrohr, welches durch einen Schlauch mit der Austrittsöffnung des Wassers verbunden wird, in eine Tropfenpumpe verwandeln.



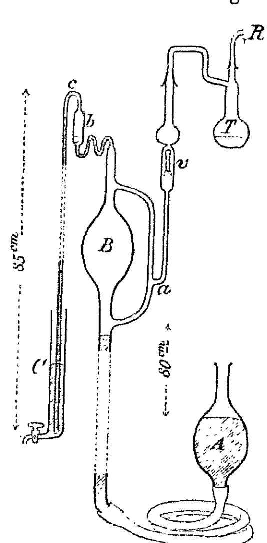
1. 2.

Damit nicht bei dem Abstellen des Zuflußhahnes Wasser in das Vakuum dringt, soll am Luftrohr ein Hahn sitzen, den man vorher schließt.

Zur Beurteilung des Vakuums kann ein Metallmanometer oder ein selbstzufertigendes Quecksilbermanometer (Fig. 1) angeschlossen sein.

Gebläse. Das Wasser einer Strahlpumpe samt der mitgerissenen Luft wird in eine Flasche (Trommel) mit regulierbarem unterem und oberem Austritt geleitet (Fig. 2).

24. **Quecksilberluftpumpe** (Geißler 1863). Hahnlose Pumpe (Toepler) (Fig.). Während des Hebens tritt das Quecksilber aus *A*, den Kanal nach dem Rezipienten *R* bei *a* absperrend, aber durch das Schwimmventil *v* am Eindringen in *R* verhindert, durch *B* und *b*, die Luft in das Barometer *c* schiebend. Man läßt in *C* überfließen, bis die Luft entwichen ist, und senkt, wodurch sich schließlich das in *B* entstandene Vakuum mit dem Rezipienten verbindet. Der Austrockner *T* enthält konzentrierte Schwefelsäure oder besser Phosphorsäureanhydrid.



Zu Anfang und auch nachdem ein hohes Vakuum entstanden ist, soll behutsam gehoben werden; im letzteren Fall wird besonders die Biegung bei *c* durch den Stoß des Quecksilbers gefährdet. Zum Schluß genügt es, die Luftbläschen nur nach *b* zu treiben und von dort selten weiter zu befördern.

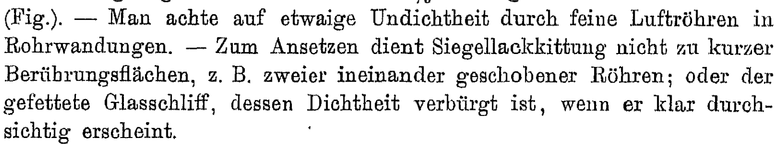
Solange noch viel Luft aus dem Rezipienten zurücktritt, muß auch vorsichtig gesenkt werden, um erstens heftige Stöße des über *a* nach *B* geschleuderten Quecksilbers und zweitens das Aufstäuben der trockenen Phosphorsäure in die Pumpe hinein zu vermeiden.

Unentbehrlich ist die innere Trockenvorrichtung. Fehlt diese, so liegt eine schlechte Wirksamkeit meistens an Feuchtigkeit, die man häufig eben nur daran erkennt, daß sie durch Auspumpen nicht zu beseitigen ist. Man muß dann wiederholt mit trockener Luft füllen oder auch die Pumpe entleeren und mit einem Luftstrom trocknen und das Quecksilber auf etwa 140° erwärmen. Die in die Pumpe eintretende Luft soll stets getrocknet sein.

Phosphorsäure trocknet, selbst wenn sie bereits feucht erscheint, oft noch merklich vollkommen. Das Trocknen geschieht aber durch Diffusion, also langsam. Selbst nachdem stark evakuiert ist, bleibt über dem Trockenmittel Luft von der Spannkraft des anderswo vorhandenen Wasserdampfs, der hindurch diffundieren muß. Man hat also, alles verbunden, diesem Vorgange Zeit zu lassen.

Anordnung für Messungen an seltenen Gasen s. Strutt, Proc. R. Soc. A 80, 579, 1908.

Sprengel'sche Tropfenpumpe, für kleine Volumina bequem; aus einem Glastrichter mit Hahn und einem $1^1/_2$ m langen Rohr von 3 mm lichter Weite mit Seitenansatz leicht zu improvisieren (Fig.).



Sehr hohes Vakuum. Angeschlossen ist eine mit geglühter Holzkohle (am besten Kokosnußkohle) gefüllte Röhre, die, nach vorgängigem Auspumpen mit Quecksilber- oder Wasserstrahlpumpe unter gleichzeitigem Erhitzen, mit flüssiger Luft gekühlt wird. Gegen Feuchtigkeit ist die Kohle zu schützen. Dewar, Ann. chim. phys. 3, 5; Sillim. J. 18, 295. 1904. — S. auch glühendes Calcium unter Nr. 3.

Biegsame Verbindungen bilden die Kundtschen Federn aus dünnen Glasröhren mit nach zwei Seiten ausgebogenen Teilen von etwa $^1/_3$ m Länge (Fig.). — Man achte auf etwaige Undichtheit durch feine Luftröhren in Rohrwandungen. — Zum Ansetzen dient Siegellackkittung nicht zu kurzer Berührungsflächen, z. B. zweier ineinander geschobener Röhren; oder der gefettete Glasschliff, dessen Dichtheit verbürgt ist, wenn er klar durchsichtig erscheint.

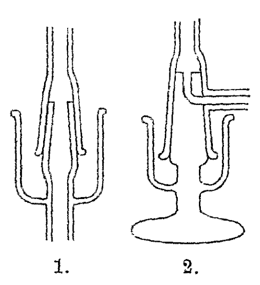
Glasröhren, die evakuiert abgeschmolzen werden sollen, sind, um nicht eingedrückt zu werden, vorher auf 2 bis 3 mm Lumen zu verjüngen.

Über Ortsänderung im Vakuum mittels eines in ein Bleirohr verlöteten Drahtes s. Braun, Ann. d. Ph. 16, 416. 1906. — Über Einführen einer Mikrometerschraube unter Quecksilberdichtung vgl. Hering, Ann. d. Ph. 21, 320. 1906.

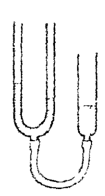
Selbsttätig wirkende Pumpen u. a. von Raps, Neesen, Kahlbaum, Zehnder. — Rotierende Pumpen: Mit Glasröhrenspirale nach dem Prinzip des Archimedischen Wasserrades, Kaufmann, ZS f. Instr. 1905, 129; nach

dem umgekehrten Prinzip der Gasuhr, Gaede, Verh. D. Ph. Ges. 1907, 639; s. auch ZS f. Instr. 1908, 271.

25. **Quecksilberdichtungen.** Um einen Glasschliff ohne Fett zu dichten, wird hinter den Spitzkonus ein kleines Gefäß angeschmolzen, welches man nach dem Aufsetzen und Andrücken des Hohlkonus bis mindestens etwa 6 mm über den Rand des Hohlkonus mit Quecksilber füllt (Fig. 1). Passen die Flächen einigermaßen auf einander, so leistet der Kapillardruck des Quecksilbers dem Atmosphärendruck Widerstand (Lehmann). — Ähnlich kann ein verbindender Hahn hergestellt werden (Fig. 2, Kahlbaum, ZS f. Instr. 1894, 21). Abgesperrt braucht dieser zum Dichthalten ein Schmiermittel; P_2O_5 ist brauchbar. Einen Hahn, der dessen nicht bedarf, käuflich bei R. Goetze in Leipzig, beschreibt R. Schmidt, Deut. Mech.-Zeitung 1908, 10. — Glatte Bewegung wird dadurch befördert, daß die ineinandergeschliffenen Teile aus verschiedenen Gläsern bestehen (Kahlbaum).


1. 2.

Eine Rohrverbindung, die durch Quecksilber abgesperrt werden kann, gibt z. B. ein gebogenes Rohr mit Ansatzsteigrohr, welches unten in ein Gefäß mit Quecksilber taucht oder durch einen biegsamen Schlauch mit einem Quecksilberbehälter verbunden ist (Fig.). Durch Heben oder Senken des Quecksilbers kann man absperren oder verbinden. An evakuierten Räumen muß eine Steighöhe von Barometerlänge verfügbar sein; „Barometerverschluß“. Schlauchverbindungen sollen, um Einsickern der Luft zu vermeiden, unter innerem Überdruck stehen. — Über Gasleitung durch poröse Körper unter Quecksilber s. Prytz, Ann. d. Ph. 18, 617. 1906; Stock, Verh. D. Ph. Ges. 1908, 19.



26. **Motoren.** Wassermotoren. Die Zuleitung und Hahnbohrung muß genügend weit sein, um keinen Druckverlust zu bewirken. Man hat Motoren mit Kolbendruck und mit Stoßkraft. Die letzteren, häufiger gebrauchten, arbeiten unökonomisch, wenn man das Wasser aus weiter Spitze ausströmen läßt und den Zufluß mit dem Hahn der Wasserleitung abschwächt. Enge Spitze und weiter Hahn nutzen den Druck aus. Bei schwachem Wasserdruck kann für geringe Kräfte ein kleines oberschlächtiges Mühlrad in einer Kapsel brauchbar sein.

Elektromotoren. Bei der Bestellung ist die kleinste Spannung anzugeben, mit der der Motor laufen soll. Für die gebräuchlichen Lichtleitungsspannungen von 65, 110 und 220 V sind Wicklungen meist vorrätig. Zu kleine Normalspannung des Motors läßt sich durch Vorschalten von Widerstand (**80** IV) korrigieren, bedingt aber Energievergeudung. Über Funken an den Bürsten vgl. **119**.

Langsames Laufen eines kleinen, schwach belasteten Motors erzielt man auf die Dauer nur mit leichten Schleiffedern.

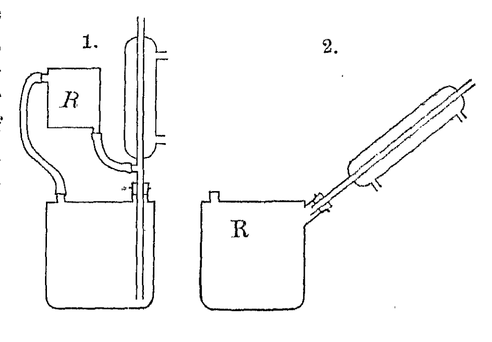
Heißluftmotoren. In Ermangelung elektrischen oder Wasserdruck-Antriebes wird vielfach der Heinrici'sche Heißluftmotor gebraucht.

Siehe auch, z. B. über Uhrwerke, Ostwald-Luther S. 100.

Regulatoren. Die Umlaufskonstanz einer Vorrichtung, die selbst wenig Arbeit verbraucht, kann sehr befördert werden durch eine konstante Belastung, etwa durch Koppelung mit einer Dynamomaschine, deren Stromkreis durch einen angemessenen Widerstand geschlossen ist; vgl. z. B. Dolezalek, ZS f. Instr. 1903, 245. — Auch ein mitumlaufender Zentrifugalregulator mit Federkraft, welcher, sobald die Geschwindigkeit unter die gewünschte Grenze sinkt, einen die Rotation beschleunigenden el. Strom schließt, läßt den Zweck erreichen; vgl. Müller-Pfaundler 9. Aufl. 1890, 653, nach Helmholtz.

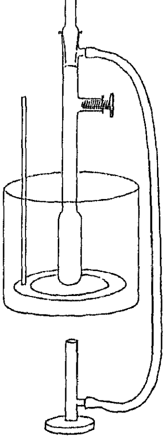
Über Umlaufzähler vgl. **119** am Schluß.

27. **Konstante Temperaturbäder (Thermostaten).** Höhere Temperaturen liefert dauernd eine siedende Flüssigkeit (Tab. 12), oder besser ihr Dampf, entweder in dem Siedegefäß oder in einem anderen, vom Dampf durchspülten oder umspülten Raum *R*. Ein Rückflußkühler mit hinreichend weitem Rohr führt ev. den überschüssigen Dampf zurück. Schemata siehe neben. Für hochsiedende Flüssigkeiten genügt oft ein Rückflußkühler in Luft.



Ein Thermostat mit Dampfschlange bei Richards u. Lamb, Proc. Am. Ac. 40, 664. 1905.

Mittlere Temperaturen zwischen derjenigen des Zimmers und dem Siedepunkt der Badflüssigkeit hält man durch Regulierung des Heizgasverbrauchs durch einen Thermostaten konstant. Derselbe drosselt selbsttätig den Gaszufluß, sobald eine bestimmte Temperatur erreicht ist, durch eine sich ausdehnende und dadurch den Weg sperrende Flüssigkeit, deren Vorratsgefäß sich in dem zu regulierenden Raume befindet. Eine kleine seitliche Öffnung hindert das vollständige Verlöschen der Flamme.



Schema eines Quecksilber-Thermostaten s. Fig.; der Quecksilberstand muß für verschiedene Temperaturen regulierbar sein. Die hierzu dienende Vorrichtung stellt der Seitenansatz mit verstellbarer Schraube vor. — Ausführliche Behandlung der Thermostaten bei Ostwald-Luther, S. 78.

Thermostaten mit elektrischer Heizung, durch Drahtwiderstände oder Glühlampen, werden mittels eines Kontaktes an einem Quecksilber- oder Spiralthermometer reguliert, der den Strom unterbricht, sobald die verlangte Temperatur überschritten wird; vgl. Nr. 29.

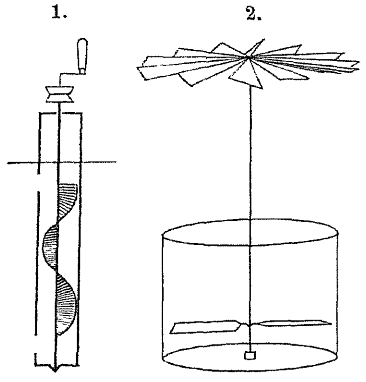
Temperaturen etwas über oder unter Zimmertemperatur lassen sich oft durch Nachwärmen mit der Hand oder Abkühlen mit einem an die Gefäßwand geklebten feuchten Fließpapier konstant halten.

Flüssigkeiten für Bäder: meist Wasser, gegen das, die Temperatur herabsetzende Verdunsten durch Deckel oder unter Umständen durch eine Schicht von Paraffinöl geschützt; Petroleum, Vaselinöl, Paraffinöl, konz. Lösungen von Chlorcalcium oder Chlorzink (bis etwa 140° brauchbar), geschmolzenes Palmin (bis 230°) oder Paraffin (bis 300°), geschmolzenes Kalium- oder Natriumnitrat oder ein Gemisch von beiden. Ein Gemisch aus gleichen Teilen schmilzt etwa bei 225° und ist bis 600° brauchbar.

Kältebäder: 0° Gemisch von Eis und Wasser; — 21° Gemisch von Kochsalz mit etwa 4 Teilen zerstoßenem Eis oder besser Schnee; weitere Rezepte s. z. B. Ostwald-Luther S. 80. — Feste Kohlensäure im Überschuß mit Äther: — 78°; mit Aceton: — 86°; mit Aldehyd: — 87°. Die Gemische müssen, besonders wenn der feste Teil knapp ist, gerührt werden. — Über CO_2-Schnee, bez. CO_2 mit Alkohol und Äther bei verschiedenen Drucken (—77 bis —120°) vgl. z. B. du Bois u. Wills, Verh. D. Ph. Ges. 1899, 168; Zeleny, Ph. ZS 7, 716. 1906. — Frisch verflüssigte Luft im Dewarschen Gefäß —193°. Durch das Abdestillieren des leichter flüchtigen Stickstoffs steigt der Siedepunkt bis etwa —186°. Konstant: Stickstoff —196, Sauerstoff —183° (Tab. 12a); Bezugsquelle s. Nr. 3. — Über flüssigen Wasserstoff (—253°) (Dewar) s. z. B. Kam. Onnes, Commun. Nr. 94, 1906; ZS f. Instr. 1907, 24.

Vgl. auch 30b Wärmeschutz!

28. **Rührer.** Der einfachste Rührer und viel öfter genügend, als man zu glauben pflegt, ist eine Feder usw. Einen Ringrührer (Fig. vor. S. u. 49) biegt man aus einem dicken Draht oder einem Glasstab, indem man den gebogenen Ring flach klopft oder bei dem Glase erweicht und flach kneift. Oder man setzt den geraden Stiel aus Draht, Holz, Hartkautschuk an einen flachen Ring aus Blech, Glimmer, Federn usw. Der Stiel erhält nötigenfalls eine Führung.



Der Schraubenrührer (1) ist am Platze, wenn zerbrechliche Gegenstände im Gefäß sind oder wenn ein Motor zum Antrieb gebraucht werden soll. Ein Rohr (Glas, Blech, im letzteren Falle vielleicht an eine Wand des Gefäßes angelötet) hat je eine untertauchende Öffnung unten und oben; eine Drehungsaxe trägt einen Schraubenflügel. Die Schraube saugt und stößt die umgebende Flüssig-

keit durch das Rohr. — Oder man setzt in das Gefäß selbst schräge Schaufeln ein, die, wenn ihre Drehungsaxe gut vertikal steht, sich mit geringer Reibung drehen, so daß die Triebkraft eines Flügelrades (Fig. 2) mit untergestelltem Flämmchen genügt (Ostwald-Luther S. 91). Um in einem hermetisch verschlossenen Gefäß zu rühren, kann ein Stückchen Eisen am Rührer dienen, welches durch ein von außen erzeugtes magnetisches Drehfeld, z. B. durch einen außen rotierenden Hufeisenmagnet gedreht wird.

29. **Elektrische Heizung.** Man führt den Stromleiter durch oder um den zu heizenden Raum. Die Drahtstärke usw. ist so zu wählen, daß die verfügbare Spannung nicht ganz ausgenutzt wird, um durch Widerstandsballast regulieren zu können. Nach den Enden einer Heizspule hin werden, wenn gleichmäßige Heizung verlangt wird, die Windungen dichter gelegt werden müssen. Bis 600° ist Konstantandraht geeignet, der auf Thonrohre, z. B. auf Cylinder für galvanische Elemente gewickelt ist. Bis 1100 oder 1200° genügt Nickeldraht auf Porzellan oder Chamotte; höher hinauf Platin, bis 2000° Iridium, dessen Verwendung freilich wegen der starken Zerstäubung kostspielig wird. Platin wird ökonomisch als dünnes Blech angewendet, für höhere Spannung als schraubenförmig aufgewickeltes Band, für niedere als geschlossener Cylinder; letztere Form wird weniger leicht durchgeschmolzen. Gegen Überhitzen dient enges Andrücken an den Träger. — Drähte muß man, am besten durch Chamottepulver oder Porzellanmasse, naß zwischen die Windungen gepreßt, gegen Zusammengleiten schützen. Asbestpappe ist bis 1100° haltbar; sie entwickelt aber meist aus organischen Bestandteilen Gase, welche Thermoelementen schaden. — Kohle dient als Heizleiter in Form von kleinen Stücken („Kryptol") oder von Röhren; vgl. Pirani, Der Mechaniker 1908, 97. Über gleichmäßig geheizte Räume s. z. B. Holborn u. Day, Wied. Ann. 68, 836, 1899.

30. **Zur Linde'schen Luftverflüssigungsmaschine.** Der Kompressor ist gleich nach jedem Gebrauch auseinanderzunehmen und zu reinigen; der Gegenstromapparat, besonders die Kühlschlange, vor und nach dem Gebrauch kräftig bis zur Trocknung auszublasen. Namentlich beim Beginn muß, um Verstopfung zu vermeiden, das Nadelventil gut arbeiten.

In einer lose bedeckten doppelwandigen Flasche mit evakuiertem Zwischenraum zwischen den versilberten Wänden (Weinhold-Dewar'sches Gefäß), mit Wolle verpackt, hält flüssige Luft sich längere Zeit. Die Gefäße sind vor Verletzungen zu behüten, da der auf ihnen lastende Luftdruck ohnehin heftige Zertrümmerung bewirken kann. Womöglich soll man auch nicht über den Rand ausgießen, sondern, ähnlich wie bei der Spritzflasche, mittels eines Siphons ausfüllen, dessen Kautschukstopfen man langsam einsetzt. — Die Markt- u. Kühlhallen-Ges. zu Berlin verkauft und versendet fl. Luft, Sauerstoff und Stickstoff.

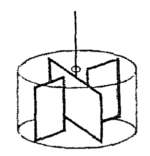
30 a. **Flüssiger Wasserstoff** (Dewar). Der „Joule-Thomson-Effekt" (innere Arbeit bei der Ausdehnung) äußert sich im Wasserstoff bei gewöhnlicher Temperatur, umgekehrt wie bei den meisten Gasen, in Erwärmung bei freier (nicht von äußerer Arbeit begleiteter) Expansion.

Erst bei etwa — 80° (Olszewski) kehrt die Erscheinung sich um. Zum Zweck der Verflüssigung wird deswegen das aus dem Kompressor mit 200 Atm. Druck ausgetretene (reine) Gas mittels Kohlensäure und flüssiger Luft auf — 200° abgekühlt und dann erst, so, wie in der Linde'schen Maschine, durch eigene Entspannung auf die zum Verflüssigen nötige Temperatur gekühlt. Anordnungen s. bei Travers, Phil. Mag. (6) 1, 411. 1901; ZS f. phys. Ch. 37, 100. 1901; Kam. Onnes, Comm. Leiden, Nr. 94. 1906.

30b. **Wärmeschutz.** Hüllen aus Filz, Seide, Wolle, Watte, in höherer Temperatur Asbest; doppelte Wandung, gefüllt mit Korkmehl, Sägemehl, Torfmull, Kieselgur usw. (vgl. z. B. Nußeld, ZS f. Instr. 1908, 190). Eine Luftschicht schützt unten hauptsächlich gegen Abkühlen, oben gegen Erwärmen. Durch ein sehr hohes Vakuum geht die Wärme merklich nur als Strahlung, die zwischen glänzenden Oberflächen, von denen und zu denen gestrahlt wird, klein ist; s. oben Dewar'sches Gefäß. Glänzendes Metall (am besten Aluminiumfolie oder auch wohl Nickelpapier) läßt sich oft verwenden. — Bei Flüssigkeiten ist das Verdampfen zu verhindern.

31. **Kautschuk.** Die Haltbarkeit leidet besonders durch Ozon. Licht und harziges Holz sind nachteilig. Man bewahrt unter Wasser auf, oder im Keller, oder im verschlossenen Metall- oder Tongefäß zusammen mit einer offenen Wasserfläche. Die Ausschwitzungen an neuem Hartkautschuk lassen sich durch Wasser oder Salzsäure beseitigen.

32. **Dämpfer.** Schwingungen um eine vertikale Axe dämpft man durch einen Flügel, bestehend aus dünnem Blech oder aus einem Rähmchen mit Seidenpapier bespannt oder dgl., in einem Gefäß mit Flüssigkeit oder Luft. Die Wirksamkeit wird vermehrt, wenn man (Fig.) das Gefäß, für Luftdämpfung mit Deckel versehen, durch feste Flügel, die von den Wänden bis in die Nähe der Axe gehen, in Kammern abteilt (Toepler). Genügen kleine Ausschläge, so nähert man einer mit der Axe verbundenen vertikalen Scheibe eine feste Fläche (W. Thomson).



Elektromagnetische Dämpfung liefert ein Stück Kupfer an der Axe, dem man einen Magnet unterlegt oder noch besser die Pole eines Hufeisenmagnets von zwei Seiten nähert.

Vertikale Schwingungen werden z. B. durch einen mit dem Körper verbundenen Kolben gedämpft, der sich in einem unten geschlossenen, nur wenig weiteren, mit Luft oder einer Flüssigkeit (Wasser, Glyzerin) gefüllten Cylinder bewegt.

33. **Aufstellung in unruhigen Gebäuden** (Julius). Ein Trägerstativ hängt an drei gleichen Stahldrähten oder Federn. In die Mitte zwischen den Aufhängepunkten soll vermöge einer verstellbaren Bodenplatte die besonders zu schützende Stelle und mittels Laufgewichte der Schwerpunkt des Ganzen gebracht werden. Schwingungen werden durch Flüssigkeitsdämpfer oder lose Watte beruhigt. Über Modifikationen, Einzelheiten und Gesichtspunkte, welche die Zentrierungen betreffen, vgl. Julius, Wied. Ann.

56, 151. 1895; ZS f. Instr. 1896, 267; Ann. d. Ph. 18, 206. 1905; White, ib. 22, 195. 1907.

Herstellung von Teilungen s. **21**, 6. — Hohlmaße **23**. — Umlaufzähler **119** am Schluß. — Hohe Drucke s. **36**, Cailletet'sche Pumpe. — Thermometer in **39**. — Tonquellen **57**. — Lichtquellen **59**. — Magnetische und elektrische Hilfsmittel besonders in **72b**, **80** u. **126**. — Photographische Registrierung **29a**; **74**.

Über Destillation im Vakuum s. Anschütz, Bonn 1895. — Viele Hilfsmittel zu physikalisch-chemischen Arbeiten bei Ostwald-Luther. — Über Werkzeuge, Konstruktionsteile, Verbindungen, Gießen, Kitten, Metallbearbeitung usw. s. Lehmann, Physikalische Technik. — Stative usw.: Physikalischer Baukasten (Volkmann); s. auch Kaufmann, Ph. ZS 8, 748. 1907. — Photographische Anleitungen: z. B. die Bücher von Pizzighelli, Englisch, Neuhaus. — Zahlenkonstanten in Landolt-Börnstein-Meyerhoffers Tabellen, 3. Aufl. 1905.

9. Herstellung von Lösungen bekannter Konzentration.

I. Nach Gewichtsverhältnis.

1. Man wägt die Menge K des Körpers ab und löst sie zum Gesamtgewicht L, dann ist K/L der Gehalt, $100\,K/L$ der Prozentgehalt.

Meist soll der Gehalt nach wasserfreier Substanz gerechnet werden. Bedeuten M und M' das Molekulargewicht des wasserfreien Körpers und des Kristallwassers, so entspricht einer abgewogenen Menge K' die wasserfreie Menge $K = K'M/(M+M')$.

Aus einer Lösung vom Gehalte p erhält man eine verdünntere vom Gehalte p', indem man das Gewicht K' der Lösung zum Gesamtgewicht $L' = K' \cdot p/p'$ verdünnt, oder wenn man zu K' das Gewicht $K'(p-p')/p'$ Lösungsmittel zusetzt (Schütteln nicht vergessen!).

Von Korrektionen kommt nur diejenige der Wägungen auf den leeren Raum herein, die man aus den spez. Gewichten nach Tab. 1 ermittelt.

Zu beachten ist, daß zur Wägung der größeren Menge der Lösung meistens eine weniger feine Wage genügt, als für den Körper. Ungleicharmigkeiten sind dann aber ev. durch Doppelwägung (**13** I) zu eliminieren.

2. Das zu K gr des Körpers zuzusetzende Lösungsmittel kann, wenn sein spezif. Gewicht Q bekannt ist, nach Volumen (v ccm) abgemessen werden. Dann ist $p = K/(K + vQ)$. Über Q bei Wasser s. Tab. 4.

3. Im Prinzip identisch mit 1. ist die Ermittelung der in einem Gewicht L einer Lösung enthaltenen Menge K durch Eindampfen oder chemische Analyse.

4. Das bekannte spezifische Gewicht einer wässrigen Lösung liefert den Gehalt aus Tabellen. Die Angaben der sp. Gewichte beziehen sich auf Wasser teilweise von gleicher Temperatur ($s_{t/t}$), teilweise von 4° ($s_{t/4}$). Man reduziert nach der Beziehung $s_{t/4} = Q_t \cdot s_{t/t}$; Q ist die Dichtigkeit des Wassers (Tab. 4).

Um das sp. Gewicht einer Lösung von einer Temperatur t auf t_0 zu reduzieren, hat man $s_0 = s_t[1 + \alpha(t - t_0)]$; vgl. 44 u. Tab. 12.

(Eine durch das Gewichtsverhältnis definierte Konzentration hängt natürlich nicht von der Temperatur ab.)

Gelegentlich wird anstatt des Gehaltes p in 1 (bez. 100) Teilen der Lösung der Gehalt $[p]$ in 1 (bez. 100) Teilen des Lösungsmittels angegeben. Es ist

$$[p] = p/(1 - p), \quad \text{bez.} \quad [p] = 100\,p/(100 - p).$$

Über spezifische Gewichte s. Tab. 3 u. 3b. Ausführlicher s. besonders Gerlach, Salzlösungen, Freiberg 1859; ZS f. analyt. Chemie 8, 279. 1869; Landolt-Börnstein-Meyerhoffer, Tabellen; Kohlrausch u. Holborn, Leitvermögen der Elektrolyte Tab. 1a bis 1c. — Ferner die Chemikerkalender. — Den mittleren Ausdehnungskoeffizienten α zwischen t u. t_0 s. z. B. bei Gerlach, Salzlösungen (l. c.); Kremers, Pogg. Ann. 105, 367. 1858; Forch, Wied. Ann. 55, 100. 1895; Landolt usw., Tabellen; auch Tab. 3b.

Die Konzentration $= \dfrac{\text{Mol-Zahl des einen Stoffs}}{\Sigma\,\text{Mol-Zahlen beider Stoffe}}$ ist für die Theorie der konzentrierten Lösungen wichtig. Dolezalek hat neulich in der physik. Ges. wieder einen interessanten Vortrag darüber gehalten.

Über Löslichkeit s. Tab. 17; ausführl. Landolt usw. Tab. 176 ff.

II. Nach Gehalt in der Volumeinheit.

Der „Volumgehalt“ wird als Gewicht q des gelösten Körpers, oder aber als Anzahl m der gelösten Moleküle (bez. Äquivalente) in der Volumeinheit angegeben. $1/m$ heißt molekulare (bez. Äquivalent-)Verdünnung der Lösung. Zu der Konzentration p nach Gewichtsverhältnissen besteht die Beziehung (s = spezif. Gewicht der Lösung, A = Molekular- bez. Äquivalentgewicht des Körpers)

$$q = ps \qquad m = q/A = ps/A.$$

Wird p nach Prozenten, q nach Gramm in 100 ccm gerechnet, m aber wie gewöhnlich nach gr-Molek./Liter, so kommt natürlich $m = 10\,ps/A = 10\,q/A$.

5. Der Körper K wird zum Volumen V gelöst, dann ist $q = K/V$. Wegen der Volumänderung beim Lösen wartet man vor dem Ablesen oder dem endgültigen Abgleichen des Volumens, bis alles gelöst ist, schüttelt auch vorher (überhaupt Schütteln nicht vergessen!).

Eine „Normallösung“ von 1 gr-Äquiv./Liter wird durch Auflösen von A gr zu 1 Liter erhalten. Einen bekannten Kristallwassergehalt des Körpers rechnet man bei wässeriger Lösung gleich mit in A. Beim Abwägen wird von A der Auftrieb in der Luft, d. h. A mal die betr. Zahl aus Tab. 1 abgezogen. Über die Dichte von Normallösungen s. Tab. 3b.

Von einer konzentrierten Lösung geht man zu einer verdünnteren hier am bequemsten durch Volummessung mit Pipetten (23) u. dgl. über. Das Volumen v einer Lösung von der Konzentration q zum Volumen V verdünnt, gibt die neue Konzentration $q' = q \cdot v/V$.

Verdünnt man in der Weise, daß zu einem Volumen v der Lösung das Volumen v_0 des Lösungsmittels zugesetzt wird, so ist natürlich $q' = q \cdot v/(v_0 + v)$. Es sind also, um von q auf q' zu verdünnen, die Volumina Lösungsmittel: Lösung $= (q - q') : q'$ zu nehmen.

Diese Verdünnung durch ein abgemessenes Volumen Lösungsmittel bringt aber eine Korrektion mit sich, wenn Kontraktion bei der Verdünnung eintritt. Es sei s die Dichtigkeit der Originallösung q; q' sei die ohne Kontraktion berechnete neue Konzentration. Dann würde $s'' = 1 + (s - 1)q'/q$ die neue Dichtigkeit ohne Kontraktion sein. Ist die Dichtigkeit wirklich $= s'$, so hat man die richtige Konzentration $= q' \cdot s'/s''$.

Bei genauen Angaben hat man auch darauf zu achten, daß der auf die Volumeinheit bezogene Gehalt durch die Ausdehnung mit der Temperatur sich etwas verändert; auch bei dem Auflösen oder Verdünnen ist die Temperatur zu beachten.

Eingehendere Bemerkungen auch über sehr verdünnte Lösungen z. B. bei Kohlrausch u. Holborn, Elektrolyte § 16 u. 17; K. u. Maltby, Wiss. Abh. d. P. T. Reichsanst. III, 182 ff. 1900.

Wägung und Dichtigkeitsbestimmung.

10. Wage und Wägung.

Die Wägung ermittelt die Masse eines Körpers. Als Einheit gilt das Gramm, die Masse eines Kubikcentimeters[1]) Wasser von + 4°.

Genau wie die Massen verhalten sich die durch die Erde auf sie ausgeübten Anziehungskräfte, die „Gewichte im leeren Raum". In der Luft verliert der Körper durch den hydrostatischen Auftrieb ein Gewicht gleich dem Gewicht der verdrängten Luftmenge. Da feste und tropfbare Körper mindestens 600 mal schwerer sind als Luft, so bleiben hier die relativen Fehler durch den Luftauftrieb kleiner als 1/600. Über die Reduktion der Wägung auf den leeren Raum vgl. **13**.

Die folgenden Vorschriften schließen sich an die gleicharmige Hebelwage in der zur chemischen Analyse gebräuchlichen Form an.

Eine eingehende Behandlung siehe in dem wertvollen Werk: Felgentraeger, Theorie, Konstruktion und Gebrauch der feineren Hebelwage, Leipzig 1907. — Über die Praxis äußerst feiner Wägungen vgl. besonders auch Landolt, ZS f. phys. Ch. 55, 589. 1906.

I. Aufstellung, Prüfung, Behandlung der Wage.

Schneiden, Pfannen, Angriffsstellen der Arretierung müssen ganz rein, staubfrei, auch fettfrei sein. Letzteres gilt auch für die Reinigungsmittel, Pinsel und saubere, zuletzt ohne Seife gewaschene weiche Leinwand (Leder wird beanstandet).

Man nivelliert nach dem Senkel bez. der Libelle der Wage, oder nach einer auf das Fußbrett gesetzten Dosenlibelle, oder nach einem Senkel, welchem man die Vorderansicht des arretierten Zeigers parallel stellt.

Nun löst man die Arretierung aus, korrigiert ein etwaiges gröberes einseitiges Übergewicht und überzeugt sich, daß alsdann die Wage eine stabile Gleichgewichtslage hat. Sollte das Gleichgewicht labil sein (die Wage „umschlagen"), so wird zunächst das in der Mitte befindliche Laufgewicht herabgeschraubt, bis dies beseitigt ist.

Die Empfindlichkeit der Wage (vgl. auch **11**) wird durch Hinauf- oder Herabschrauben des genannten Laufgewichtes reguliert; sie läßt sich aus der Schwingungsdauer beurteilen, deren zweiter Potenz sie für eine bestimmte Wage proportional ist. Als Dauer einer Schwingung ist bei

---

1) Das gesetzlich festgelegte Gramm ist nach späteren Ermittelungen die Masse von 1,000028 cm^3 Wasser von 4°.

der langarmigen Wage 10 bis 15 sec, bei der kurzarmigen 6 bis 10 sec gebräuchlich. Eine größere Dauer verursacht Zeitverlust, stärkere Dämpfung und meistens inkonstante Einstellungen.

Nun wird mittels der für diesen Zweck vorhandenen Einrichtung (Laufgewicht am Ende des Balkens; Durchbohrung des vertikalen Laufgewichtes; drehbarer Arm usw.) bewirkt, daß die unbelastete Wage symmetrisch um den mittelsten Teilstrich schwingt. Eine Unsymmetrie von einigen Zehnteln mm, die mit der Zeit auch immer wieder entstehen kann, mag man mit den Fußschrauben korrigieren, deren eine man um gleichviel verkürzt, wie man die andere verlängert.

Prüfung der Wage. In erster Linie ist zu fordern, daß die Wage, wiederholt arretiert und ausgelöst, dieselbe Einstellung zeigt und daß die Schwingungen langsam abnehmen. Unregelmäßigkeiten können von dem Lockern einer Verschraubung am Wagebalken herrühren, oder von einer Unsauberkeit, ungeeigneter Gestalt oder Verletzung der Schneiden oder Pfannen.

Arretiert soll der Zeiger gerade über dem mittleren Teilstrich stehen; die Arretierungen sollen die Auflagen beiderseits gleichzeitig loslassen. Der Reiter soll, auf Null gesetzt, die Einstellung nicht beeinflussen.

Die Gleicharmigkeit prüft man durch beiderseitiges Aufsetzen von hinreichend großen Gewichtstücken, welche sich das Gleichgewicht halten: ihre Vertauschung darf die Einstellung nicht ändern. S. auch **12**.

Es ist endlich nicht überflüssig, zu prüfen, ob ein Gewicht auf jeder Stelle der Wagschale gleich wirkt. An Brücken- und Tafelwagen können starke Verstöße hiergegen vorkommen; kleinere auch bei der gewöhnlichen Wage, besonders wenn die Schale kein Zwischengehänge hat, was ein grober Fehler ist. Gegen Fehler aus nicht paralleler Schneidenstellung schützt das „Kreuzgehänge“.

Die Reiterverschiebung soll vor dem Anstoßen an den Balken gesichert sein. — Einem rauhen Gange hilft man durch Abwischen mit einem Läppchen eventuell mit einer Spur Petroleum nach. — Bei den Exzentern und Axen der Arretierung dient ein geeignetes Schmiermittel.

Als Skalenteil am Zeiger empfiehlt sich etwa das mm. Die Zeigerspitze spiele dicht vor oder besser über der Teilung. Das Auge visiere in einer durch eine Marke auf der Glaswand fixierten Richtung. Vorteilhaft ist eine vor der Teilung fest angebrachte Lupe, etwa auf die Glaswand geklebte Linse; bei geeigneter Brennweite kann man aus großer Entfernung ablesen (vgl. Anmerkung zu **67** im Eingang). Man hält das Auge so, daß der Nullpunkt in der Mitte der Linse erscheint.

Daß die beiden gewöhnlichen Schalen einander genau gleich sind, ist nebensächlich; eine etwa vorhandene kürzere Wagschale soll hingegen mit einer der anderen an Gewicht genau stimmen.

An der gebräuchlichen Wage soll die Schwingungsweite möglichst langsam abnehmen; auf diese Wage beziehen wir uns. — Neuerdings werden auch Wagen gebaut, die mittels einer nicht durch die

Reibung fester Teile bewirkten dynamischen Dämpfung sich aperiodisch einstellen, was bequem, aber weniger genau ist. S. z. B. Crémieu, J. de ph. 6, 690. 1907; Instr. 1908, 24.

Behandlung der Wage. Der Tisch der Wage soll vor Erschütterungen vom Fußboden geschützt sein, auch vor Verbiegungen durch Auflegen des Armes gehütet werden. Vor allem ist die Wage vor Ungleichheiten der Erwärmung, z. B. durch Temperaturschwankungen des Zimmers, zu schützen. Der Beobachter befinde sich tunlichst entfernt symmetrisch zur Wage; ebenso eine etwaige Lampe. Durch eine dicke Glasplatte lassen sich Wärmestrahlen abfiltrieren.

Gegen Rost oder Luftfeuchtigkeit kann unter Umständen ein Gefäß mit Ätzkalk im Wagekasten stehen. — Das Auflegen von Gewichten geschieht nur bei arretierter Wage. — Pendelschwingungen der Schalen bedingen Fehler.

Bei der endgültigen Wägung sind Luftströmungen, die auch z. B. durch geringe Erwärmung des zu wägenden Körpers entstehen können, zu vermeiden. Ein Wagekasten wird selbstverständlich geschlossen. — Durch elektrische Ladungen können, wenn Glasteile des Kastens frisch geputzt sind, grobe Fehler entstehen, kleinere Fehler auch sonst, z. B. durch eine gläserne Bodenplatte, sowie bei Glas- oder Bergkristall-Wägungen. Die Anwesenheit einer in ein dünnes Glasröhrchen eingeschmolzenen Spur Radium sichert hiergegen (Dorn).

Einen gegebenen abzuwägenden Körper legt man gewöhnlich links; soll dagegen eine bestimmte Menge, etwa Flüssigkeit oder Salz, abgewogen werden, so ist die rechte Schale bequemer.

Spiegelablesung. Für die feinsten Wägungen benutzt man wohl an Stelle des Zeigers einen am Wagebalken angebrachten Spiegel, dessen Einstellung mittels Fernrohres an einer Skale abgelesen wird. Vgl. **25** u. **26**.

Empfindliche Wagen für kleine Belastung spielen auf spitzwinkligeren Prismen oder auf zwei Spitzen. — Über äußerst empfindliche Formen vgl. z. B. Warburg und Ihmori, Wied. Ann. 27, 483. 1886. Torsionswagen: Hertz, Verh. Berl. Ph. Ges. 1882, 18; Nernst, ZS f. El. Ch. 1903, 623.

II. Wägungsverfahren.

Es ist genauer, die Wage im schwingenden Zustande zu beobachten, als in der Ruhe. — Die den Körper äquilibrierenden Gewichtstücke findet man durch allmähliches Einschließen in engere Grenzen und kann, wenn man über ausreichend kleine

Gewichtstücke oder über eine Reiterverschiebung verfügt, hierbei so weit gehen, daß der Zeiger genau einsteht.

Interpolationsverfahren. Der häufigen Regulierung des mit der Zeit veränderlichen Nullpunktes und dem Ausprobieren der vollkommenen Gleichheit ist oft das Beobachten des zeitigen Nullpunkts und das Interpolieren des abgleichenden Gewichtes aus zwei Einstellungen bei verschiedener Belastung vorzuziehen.

Bestimmung des Nullpunktes, d. h. des Punktes der Skale, auf welchen der Zeiger der unbelasteten Wage in der Ruhe zeigen würde. Ein Reiter ist dabei auf den Nullstrich der Balkenteilung zu setzen oder auch, wenn man sich überzeugt hat, daß er hier keinen Einfluß ausübt, abzuheben. Man findet den Nullpunkt aus einigen Umkehrpunkten des schwingenden Zeigers. Die Schwingungsweite mag 2 bis 5 mm betragen. Für mäßige Genauigkeit nimmt man das Mittel aus zwei Umkehrpunkten oder bei stärkerer Dämpfung aus dreien, wobei zunächst aus Nr. 1 und 3 das Mittel genommen und dieses mit Nr. 2 zum Hauptmittel vereinigt wird.

Für genauere Zwecke wird man nach folgendem Schema etwa fünf Umkehrpunkte nehmen (lange Beobachtungsreihen bringen wegen der zeitlichen Änderungen der Wage leicht mehr Nachteile als Vorteile), das arithmetische Mittel aus den Beobachtungen auf der einen Seite, d. h. aus Nr. 1, 3, 5, und aus denen auf der anderen Seite, d. h. aus Nr. 2, 4, bilden und aus diesen beiden Zahlen wiederum das Mittel. Damit man nicht rechts und links unterscheiden muß, bezeichnet man den mittelsten Teilstrich der Wage nicht mit Null, sondern mit 10.

Beispiel.		Umkehrpunkte					Mittel	Nullpunkt
	links	10,9		10,7		10,6	10,73	9,74
	rechts		8,7		8,8		8,75	

Um aus zwei oder drei wenig verschiedenen Zahlen das Mittel zu nehmen, braucht man nicht etwa erst alles zu addieren und die Summe dann durch 2 oder 3 zu dividieren. Daß das Mittel aus 10,9 10,7 10,6 mit 10 anfängt, ist ja selbstverständlich. Und daß ,9 ,7 ,6 das Mittel ,73 geben, sieht man auch sofort. Mittelnehmen ist bei einiger Übung ebenso einfach wie Addieren und Subtrahieren und ist keinen gröberen Rechenfehlern ausgesetzt; ein nicht zu unterschätzender Vorteil. — Vgl. auch **26**, 1.

Man kann statt dessen auch den Mittelpunkt Null nennen und die Ausschläge nach der einen Seite positiv, nach der

anderen negativ zählen, also in dem obigen Beispiel schreiben $+0,9$ $-1,3$ $+0,7$ usw. Der Anfänger aber wird in der vorhin angegebenen Weise weniger leicht Fehler begehen.

Der Nullpunkt ist hinreichend oft zu kontrolieren, besonders nach stärkerer Belastung der Wage. Findet man Unterschiede, so nimmt man das Mittel aus den beiden Bestimmungen, welche der Wägung vorangehen und ihr folgen.

Wägung. Nachdem eine solche Zahl von Gewichtstücken aufgelegt, bez. schließlich der Reiter so auf einen vollen Teilstrich aufgesetzt worden ist, daß die Einstellung dem Nullpunkt nahe kommt, macht man wieder nach dem obigen Schema einen Satz von Umkehrbeobachtungen. Das Mittel wird von dem Nullpunkt um eine Differenz von n Skalenteilen abweichen. Kennt man die Empfindlichkeit C der Wage (**11**), d. h. den Ausschlag durch 1 mg Mehrbelastung, so ist n/C die Größe, welche man den Gewichtstücken noch zulegen bez. von ihnen wegnehmen müßte, um völlige Gleichheit zu erzielen.

Kennt man die Empfindlichkeit nicht, so nimmt man ein oder einige Milligramm fort oder legt zu, je nachdem die Gewichte zu schwer oder zu leicht waren, so daß die Einstellung auf die andere Seite vom Nullpunkt fällt, und beobachtet abermals wie vorhin. War die erste Einstellung e_1, die jetzige e_2, die Veränderung des Gewichts zwischen beiden Beobachtungen gleich π, so hat man die Empfindlichkeit $C = (e_1 - e_2)/\pi$ und kann jetzt rechnen wie vorhin.

Mit anderen Worten, wenn gefunden wurde

der Nullpunkt e_0
bei der Belastung p_1 die Einstellung e_1
" " " p_2 " " e_2,

so hat der Körper das Gewicht

$$p_0 = p_1 + (p_2 - p_1)\,\frac{e_0 - e_1}{e_2 - e_1}.$$

Selbstverständlich sind diese Differenzen sämtlich mit Rücksicht auf das Vorzeichen zu nehmen, wobei eine Erleichterung darin besteht, die Skalenteile nach derjenigen Richtung wachsend zu zählen, welche einer Vermehrung der Gewichtstücke entspricht.

Beispiel. Nullpunkt sei der obige Wert 9,74. Nach Auflegung des Körpers wurde beobachtet

Belastung:	Umkehrpunkte:	Mittel:	Einstellung:
3,036 gr	7,8 7,8 7,9 10,3 10,2	7,83 10,25	9,04
3,038 gr	9,6 9,4 9,3 12,3 12,3	9,43 12,30	10,86

Ausschlag auf 1 mg gleich $\frac{1}{2}$1,82 = 0,91 Skalent.

3,036 gr waren folglich zu leicht um (9,74 — 9,04)/0,91 = 0,77 mg. Das gleiche erhält man nach obiger Formel:

$$p_0 = 3{,}036 \text{ gr} + 2 \times 0{,}70/1{,}82 \text{ mg} = 3{,}03677 \text{ gr}.$$

Das Protokoll der Beobachtungen soll nach einem bestimmten Schema, z. B. dem obigen, geführt werden. — Man beachte noch, daß falsches Abzählen der Gewichtstücke ein sehr gewöhnlicher Fehler ist, zähle also mindestens zweimal.

Die Zuverlässigkeit des Verfahrens mit dem cg-Reiter reicht oft nicht weiter als auf 0,1 mg. Ganz feine Wägungen werden mit kleinen, berichtigten Gewichtstücken ausgeführt, ev. mit Hinzunahme eines mg-Reiters.

11. Empfindlichkeit der Wage.

Empfindlichkeit C einer Wage heißt die Änderung der Einstellung für die Mehrbelastung Eins (z. B. 1 mg) einer Schale. Ihre Bestimmung für verschiedene Belastungen ist als Kennzeichen für die Güte der Wage und ferner zur Vereinfachung der Wägungsmethode von Wichtigkeit. Besitzt man nämlich eine Tabelle oder eine Kurve, in welcher der Ausschlag auf 1 mg als Funktion der Belastung angegeben ist, so genügt für jede Wägung, außer der Bestimmung des Nullpunktes, eine einzige Beobachtung der Einstellung mit nahe richtigem Gewicht (vgl. vor. S.).

Theorie der Empfindlichkeit. Ist M die Masse des Balkens, a der Abstand seines Schwerpunkts von der Drehaxe (Mittelschneide), M' die Gesamtmasse der Schalen ev. inkl. Belastungen, a' der Abstand der Verbindungsgeraden der Aufhängepunkte (Endschneiden) von der Drehaxe, a und a' nach unten positiv gerechnet, $2L$ die Länge des Balkens, z die Länge des Zeigers und s die des Skalenteils, so ist $C = \frac{L}{Ma + M'a'} \frac{z}{s}$. Bei positivem a' sinkt, bei negativem a' steigt die Empfindlichkeit mit wachsender Belastung und kann im letzteren Falle $= \infty$ werden, worauf die Wage umschlägt. Für $a' = 0$, d. h. wenn die Aufhängepunkte der Schalen mit der Drehaxe in derselben Ebene liegen, haben die Schalen und ihre Belastungen keinen Einfluß auf C.

Zur Bequemlichkeit wird in der Regel für feinere Wagen diese Eigenschaft gewünscht. Da aber ihre Bedingung wegen der Durchbiegung des Balkens streng nur für eine bestimmte Belastung erfüllt sein kann, so stellt der Mechaniker sie wohl für eine mittlere Belastung her. Dann findet man anfangs eine kleine Steigerung der Empfindlichkeit mit der Belastung, für größere Gewichte wieder eine Abnahme.

Da wegen der Festigkeit die Massen stärker vergrößert werden müssen als die Längen, so lassen sich kurzarmige Wagen empfindlicher bauen als

langarmige, sie stellen aber größere Ansprüche an den Parallelismus der Schneiden.

Über Regelung der Empfindlichkeit und Schwingungsdauer s. S. 52.

Die Bestimmung ergibt sich von selbst. Man setzt auf beide Schalen die Belastung, für welche man die Empfindlichkeit C bestimmen will, und auf eine der Schalen ein kleines Übergewicht, so daß die Einstellung um einige (2 bis 3) Skalenteile vom mittelsten Teilstrich abweicht. Diese Einstellung e wird nach **10** II genau beobachtet. Hierauf bewirkt man durch Mehrbelastung der anderen Schale um π mg eine ungefähr ebensoweit nach der anderen Seite abweichende Einstellung e'; dann ist die Empfindlichkeit $C = (e - e')/\pi$.

Hat man C etwa für 0, 10, 20, ... gr bestimmt, so trägt man in Koordinatenpapier die Belastung als Abszisse, die Empfindlichkeit als Ordinate ein und kann dann aus der Kurve C für irgendeine Belastung entnehmen oder eine Tabelle dafür herstellen. Von Zeit zu Zeit wird man die Empfindlichkeit neu bestimmen müssen.

12. Verhältnis der Wagearme.

Nach dem Hebelgesetz wird ein Körpergewicht in demselben Verhältnis falsch gefunden, wie der Wagearm auf der Seite des Körpers größer ist als auf der Seite der Gewichtstücke. Der Fehler spielt aus zwei Gründen keine große Rolle. Denn erstens wird er bei einer guten Wage sehr selten 1/10000 erreichen. Zweitens aber kommen zumeist nur die Verhältnisse von Gewichten zur Geltung, z. B. bei allen Gewichtsanalysen, bei Bestimmungen von Dichtigkeiten, spezifischen Wärmen usw., so daß der Fehler hier ganz herausfällt, sobald man stets denselben Wagearm benutzt. Bei feinen absoluten Wägungen aber darf man sich nicht auf die Gleicharmigkeit verlassen.

Die beiden Wagearme verhalten sich umgekehrt wie die Gewichte, welche als gleichzeitige Belastung der Schalen die Wage auf den Nullpunkt (**10**) einstellen. Ist der Gewichtsatz richtig, so ergibt sich das Balkenverhältnis R/L, falls ein Gewicht p_r an dem rechten Arme R dem Gewicht p_l an dem linken Arme L die Wage hält, $R:L = p_l:p_r$.

Ohne die vollkommene Richtigkeit des Gewichtsatzes vorauszusetzen, bestimmt man das Verhältnis folgendermaßen.

Man beobachtet den Nullpunkt, setzt dann auf beide Schalen Gewichtstücke von gleichem Nennwert, etwa gleich der Hälfte der größten für die Wage zulässigen Belastung, und bestimmt

die Zulage, welche links oder rechts notwendig ist, um die Einstellung wieder auf den Nullpunkt zu bringen. Dabei empfiehlt sich für genaue Messungen das Interpolationsverfahren (**10** II). Der Nullpunkt ist hinreichend oft zu kontrolieren und ev. mit seinem Mittelwert vor und nach der Wägung einzusetzen. Alsdann vertauscht man die Gewichte und verfährt geradeso. Bezeichnen wir die beiden Gewichte vom Nominalbetrage p mit p_1 und p_2, und haben wir gefunden, daß die Wage einsteht, wenn

bei der einen Wägung links $p_1 + l$ rechts p_2
" " anderen " " p_2 " $p_1 + r$,

so ist, die Länge des linken Wagearmes mit L, die des rechten mit R bezeichnet,

$$\frac{R}{L} = 1 + \frac{l-r}{2p}.$$

Eine kleine Zulage einerseits kann dabei als negative Zulage andrerseits betrachtet werden; siehe das Beispiel.

Beweis. Nach dem Hebelgesetze ist $L(p_1 + l) = Rp_2$ und $Lp_2 = R(p_1 + r)$, woraus (nach S. 9, Gl. 8 u. 3), wenn man schließlich p statt p_1 schreibt,

$$\frac{R}{L} = \sqrt{\frac{p_1 + l}{p_1 + r}} = \sqrt{\frac{1 + l/p_1}{1 + r/p_1}} = 1 + \frac{l-r}{2p}.$$

Beispiel.	Links	Rechts		
	(50)	(20 + 10 + · · ·)	+ 0,83 mg	also $l = -0,83$
	(20 + 10 + · · ·)	(50)	+ 2,56 „	„ $r = +2,56$;

$$\frac{R}{L} = 1 + \frac{-0,83 - 2,56}{100000} = 1 - 0,0000339, \quad \text{oder} \quad L/R = 1,0000339.$$

Die geklammerten Zahlen stellen die mit diesen Ziffern bezeichneten Grammgewichtstücke vor. — Zugleich folgt (**13**)

$$(50) = (20 + 10 + \cdots) - 0,86 \text{ mg}.$$

Auch die Doppelwägung eines Körpers mit Nullpunktsbestimmung ergibt das Verhältnis der Arme; siehe **13** I.

Mit der Belastung kann das Verhältnis sich etwas ändern.

13. Absolute Wägung eines Körpers.

I. Elimination der Ungleicharmigkeit der Wage.

Solange nur Massen miteinander zu vergleichen sind, braucht man, wie schon gesagt, nur immer an demselben Arme der gleichen Wage zu wägen. Absolut aber muß ein Gewicht bestimmt werden, sobald, z. B. bei der Kalibrierung von Gefäßen, bei chemischen Titrierungen, bei der Herstellung von Lösungen, die Massen auf Volumina oder bei voltametrischer Messung auf elektrische Stromstärken usw. bezogen werden sollen.

Um das absolute Gewicht aus dem scheinbaren, bei der

Wägung gefundenen abzuleiten, multipliziert man das letztere mit dem Verhältnis der Wagearme, als Zähler die Länge des Armes, an welchem die Gewichtstücke wirkten. Unabhängig von diesem Verhältnis, welches für feine Wägungen nicht einmal als unveränderlich betrachtet werden darf, machen die folgenden Verfahren.

1. Doppelwägung. Man wägt den Körper einmal auf der linken Schale, das andere Mal auf der rechten Schale. Wenn p_1 und p_2 in beiden Fällen die Gewichtstücke bezeichnen, welche die gleiche Einstellung des Zeigers bewirken, z. B. auf den mittelsten Teilstrich, so ist das gesuchte Gewicht p des Körpers das Mittel

$$p = \tfrac{1}{2}(p_1 + p_2).$$

Beweis s. 4 Beisp. 3. Zugleich findet man, wenn p_1 und p_2 auf den richtigen Nullpunkt der Wage bezogen sind, das Balkenverhältnis

$$\frac{R}{L} = \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} = \sqrt{1 + \frac{p_2 - p_1}{p_1}} = 1 + \frac{p_2 - p_1}{2p_1}.$$

2. Tariermethode. Der Körper auf einer Schale wird durch irgend eine Belastung (Tara) der anderen äquilibriert, am bequemsten mit einem zweiten Gewichtsatz, der nicht genau zu sein braucht; der Körper wird alsdann weggenommen und durch Gewichtstücke bis zur gleichen Einstellung der Wage ersetzt. Letztere geben sein Gewicht.

II. Reduktion der Wägung auf den leeren Raum.

Zweck der Wägung ist meistens die Bestimmung der Masse eines Körpers durch Vergleichung mit bekannten Massen aus einem sogenannten Gewichtsatze. In der Luft erleiden sowohl Körper als Gewichtstücke einen Auftrieb gleich dem Gewicht der verdrängten Luft.

Wir nehmen an, daß der Gewichtsatz „im leeren Raum richtig" ist, d. h. daß er richtige Massen darstellt; ferner daß alle Gewichtstücke die gleiche Dichte haben. Bei den Bruchgewichten trifft letzteres freilich selten zu, indessen sind diese kleinen gegen die großen Stücke wohl immer in Luft abgeglichen, und insofern Luftschwankungen bei ihnen keinen, für die gewönlichen Zwecke merklichen Einfluß haben, so sind die Bruchgewichte bei der Wägung einfach so zu rechnen, wie wenn sie aus demselben Material beständen wie die großen. Vgl. auch **14**.

Nennt man

m das scheinbare Gewicht des Körpers in der Luft, d. h. die Gewichtstücke, welche ihn in der Luft äquilibrieren,

λ die Dichtigkeit (das spezifische Gewicht) der Luft ($\lambda = 0{,}00120$ im Mittel. Siehe auch **18** und Tab. 6),

s die Dichtigkeit des Körpers (Tab. 2 bis 3b),
σ die Dichtigkeit der Gewichtstücke (Messing = 8,4),
so ist das Gewicht M im leeren Raume

$$M = m\left(1 + \frac{\lambda}{s} - \frac{\lambda}{\sigma}\right).$$

Beweis. Der Körper hat das Volumen $V = M/s$, die Gewichtstücke $v = m/\sigma$. Der Auftrieb ist gleich dem Gewicht der verdrängten Luft; also verliert der gewogene Körper $\lambda V = \lambda M/s$, die Gewichtstücke $\lambda v = \lambda m/\sigma$. Da die Gewichte nach dem Erleiden dieser Verluste gleich groß gefunden sind, so ist also $M(1 - \lambda/s) = m(1 - \lambda/\sigma)$, woraus der obige Wert M sich nach S. 9, Formel 8 ergibt.

Es ist also zu dem gefundenen scheinbaren Gewicht m hinzuzufügen $m\lambda(1/s - 1/\sigma)$, eine Korrektion, welche mit der Ungleichheit von s und σ wächst. Für λ genügt gewöhnlich der mittlere Wert 0,0012. Für einen Messinggewichtsatz können dann die bei verschiedenen sp. Gewichten s aus der Formel sich berechnenden Korrektionen aus Tab. 1 entnommen werden.

Beispiel. Die Korrektion des scheinbaren Gewichtes w einer mit Messinggewichten ($\sigma = 8,4$) gewogenen Wassermenge beträgt $w \cdot 0,0012\,(1/1 - 1/8,4) = w \cdot 0,00106$ d. h. 1,06 mg auf jedes Gramm.

Auch wo es nicht auf das absolute Gewicht, sondern nur auf Gewichtsverhältnisse ankommt, wie bei chemischen Analysen, bedingt der Auftrieb unter Umständen Korrektionen, ohne welche Fehler von mehr als 1 Promille entstehen können. Analysiert man z. B. eine verdünnte Silberlösung durch die Wägung der Lösung und des daraus erhaltenen Chlorsilbers (Dichtigkeit = 5,5), und sind P und p die in Luft gefundenen Gewichte, so sind die wirklichen $P(1 + 0,0012)$ und $p(1 + 0,0012/5,5)$. Der Chlorsilbergehalt beträgt also

$$\frac{p \cdot (1 + 0,0012/5,5)}{P \cdot (1 + 0,0012)} = \frac{p}{P}\left[1 - 0,0012\left(1 - \frac{1}{5,5}\right)\right] = \frac{p}{P} \cdot 0,9990.$$

Der unkorrigierte Wert p/P ist demnach um 0,1% zu groß. Die Vernachlässigung solcher einfacher Korrektionen widerspricht der auf die Wägungen verwandten Sorgfalt und oft dem durch die Zahl der mitgeteilten Dezimalen erhobenen Anspruch auf Genauigkeit.

Schwankungen der Luftdichte an einem Orte übersteigen selten 0,00015. Sie werden gewöhnlich außer Betracht bleiben. Zu den Fällen, wo dies nicht zutrifft, gehört häufig das Wägen kleiner Mengen in großen Gefäßen: das scheinbare Gewicht einer 100 gr schweren Platinschale kann wegen des Luftauftriebes um 1 mg schwanken.

Über die prinzipielle Frage, ob das Gramm eine Masse oder ein Gewicht vorstelle, vgl. die Bemerkung im Anhange über das absolute Maßsystem. In der gewöhnlichen Praxis der Messungen macht es selten einen Unterschied, ob man von Gewichten oder Massen spricht, insbeson-

dere entstehen keine Irrtümer. Für die chemische Analyse oder irgend eine andere auf Prozente hinausführende Operation ist es gleichgültig, ob man Massen oder Gewichte (im leeren Raum) meint. Ebenso wird man zu den nämlichen Zahlen geführt, wenn man von dem spezifischen Gewicht eines Körpers oder unter dem Namen Dichtigkeit von der spezifischen Masse eines Körpers redet; vorausgesetzt, daß man, wie immer, diese Eigenschaften des Körpers mit derjenigen des Wassers als Einheit vergleicht. Wenn aber entweder die Körper mit ihrer Trägheit in Betracht kommen oder wenn andrerseits Gewichte zur Kraftmessung dienen, wie bei der Messung von Arbeit, Druck, Elastizität, muß man zwischen den Begriffen Masse und Gewicht streng unterscheiden.

14. Korrektionstabelle eines Gewichtsatzes.

Bei der gebräuchlichen Anordnung eines Gewichtsatzes verfährt man nach folgendem Schema. Wir bezeichnen die Grammstücke mit $50'\ 20'\ 10'\ 10''\ 5'\ 2'\ 1'\ 1''\ 1'''$.

Man führe eine Doppelwägung mit $50'$ einerseits und der Summe der übrigen Gewichte andrerseits aus. Man finde dabei, daß die Wage einsteht (der Zeiger in der Stellung ist, welche er bei unbelasteter Wage einnimmt), wenn

links	rechts
$50'$	$20'+10'+\cdots+r$ mg
$20'+10'+\cdots+l$ mg	$50'$

dann ist das Verhältnis der Wagearme (**12**)

$$R/L = 1 + (l - r)/100000$$

und
$$50' = 20' + 10' + \cdots + \tfrac{1}{2}(r + l).$$

Weiter vergleicht man $20'$ mit $10'+10''$ und $10'$ mit $10''$ sowie mit $5'+2'+\cdots$ Die Doppelwägung gibt auch in diesen Fällen größere Sicherheit, auch ist das Balkenverhältnis im allgemeinen von der Belastung etwas abhängig. An einer guten Wage mag man aber den oben gefundenen Wert als allgemeingültig annehmen und nur einseitig vergleichen. Es bedeutet dann ein Stück p, rechts aufgelegt, auf die Balkenlänge der linken Seite reduziert, $p \cdot R/L$.

Beispiel. Es sei $r = -0{,}63$ $l = +2{,}73$ mg, so ist

$$50' = 20' + 10' + \cdots + 1{,}05 \text{ mg} \quad \text{und} \quad R/L = 1{,}000034.$$

Ferner sei bei der Vergleichung des 5 gr-Stückes mit der Summe der kleinen Gewichte gefunden, daß die Wage einsteht, wenn

links $5' + 0{,}06$ mg rechts $2' + 1' + 1'' + 1'''$,

so würden an einer gleicharmigen Wage sich das Gleichgewicht halten $5' + 0{,}06$ mg und $(2' + 1' + \cdots) \times 1{,}000034$ oder $2' + 1' + \cdots + 0{,}17$ mg.

Folglich ist $5' = 2' + 1' + 1'' + 1''' + 0{,}11$ mg.

Diese Wägungen mögen die folgenden, positiven oder negativen, Differenzen A, B etc. ergeben haben, denen gleich Zahlen als Beispiel beigeschrieben werden sollen:

$$\begin{array}{rll} 50' = 20' + 10' + \cdots & + A & + 0{,}48 \text{ mg} \\ 20' = 10' + 10'' & + B & + \ ,06 \ \text{,,} \\ 10'' = 10' & + C & + \ ,17 \ \text{,,} \\ 5' + 2' + 1' + 1'' + 1''' = 10' & + D, & - \ ,29 \ \text{,,} \end{array}$$

Aus den Gleichungen muß der Wert der fünf Stücke, die Summe der kleinen vorläufig als **ein** Stück betrachtet, in irgend einer Einheit ausgedrückt werden. Man wird, wenn man nicht etwa außerdem eine Vergleichung mit einem Normalgewicht vornimmt, diese Einheit so wählen, daß die Korrektionen der einzelnen Stücke möglichst klein werden, und das ist der Fall, wenn man die Summe als richtig annimmt, d. h. wenn man setzt

$$50' + 20' + 10' + \cdots = 100 \text{ gr.}$$

Man bezeichne nun zur Abkürzung

$$S = \tfrac{1}{10}(A + 2B + 4C + 2D) \qquad + 0{,}070 \text{ mg}$$

so ist, wie man leicht nachweisen kann,

$$\begin{array}{rll} 10' = & 10 \text{ gr} - S & - 0{,}07 \text{ mg} \\ 10'' = & 10 \text{ ,,} - S + C & + \ ,10 \ \text{,,} \\ 5' + \cdots = & 10 \text{ ,,} - S + D & - \ ,36 \ \text{,,} \\ 20' = & 20 \text{ ,,} - 2S + B + C & + \ ,09 \ \text{,,} \\ 50' = & 50 \text{ ,,} - 5S + A + B + 2C + D = 50 \text{ gr} + \tfrac{1}{2}A. & + \ ,24 \ \text{,,} \end{array}$$

Die Probe für die Richtigkeit der Rechnung ist dadurch gegeben, daß, wenn man die Korrektionen in Zahlen bestimmt hat, ihre Summe $= 0$ sein muß und daß die vier Beobachtungs-Gleichungen erfüllt sein müssen.[1])

1) Selbstverständlich kann man, falls ein zweiter Gewichtsatz zur Verfügung steht, alle Wägungen durch Tarieren ausführen. **Jede** Vergleichung fordert dann aber **zwei** Wägungen. — Legt man der Rechnung als vorläufige Einheit eins der kleinsten Gewichte (1 cg), statt wie hier die Summe aller Gewichte zugrunde, so entfallen die Ausdrücke $A + 2B \ldots$ etc. Die vorläufigen Korrektionen können dabei aber bei den großen Stücken auf ganze Gramme steigen, also fünf- bis sechsziffrige Zahlen erreichen.

Ferner habe man gefunden

$$5' = 2' + 1' + 1'' + 1''' + a \qquad + 0{,}54 \text{ mg}$$
$$2' = 1' + 1'' \qquad + b \qquad + \;{,}02 \;\text{,,}$$
$$1'' = 1' \qquad + c \qquad - \;{,}10 \;\text{,,}$$
$$1''' = 1' \qquad + d. \qquad - \;{,}13 \;\text{,,}$$

Setzt man $s = \frac{1}{10}(a + 2b + 4c + 2d + S - D)$, $+ 0{,}028$ mg

so kommt

$$1' = 1 \text{ gr} - s \qquad - 0{,}03 \text{ mg}$$
$$1'' = 1 \;\text{,,}\; - s + c \qquad - \;{,}13 \;\text{,,}$$
$$1''' = 1 \;\text{,,}\; - s + d \qquad - \;{,}16 \;\text{,,}$$
$$2' = 2 \;\text{,,}\; - 2s + b + c \qquad - \;{,}14 \;\text{,,}$$
$$5' = 5 \;\text{,,}\; - 5s + a + b + 2c + d. \qquad + \;{,}09 \;\text{,,}$$

Ebenso wird mit den Bruchgrammen verfahren.

Befolgt man bei dem Wägen die Regel, stets zu bilden:

die Gewichte	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 etc. gr
aus den Stücken	1′	2′	2′+1′	2′+1′+1″	5′	5′+1′	5′+2′	5′+2′+1′	5′+2′+1′+1″	10′ etc.,

so kann man gleich für jede Ziffer aus jeder Dekade die Korrektion aufstellen, also für das obige Beispiel die Korrektionen in Hunderteln mg:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Zehner	— 7	+ 9	+ 2	+ 12	+ 24	+ 17	+ 33	+ 26	+ 36
Einer	— 3	— 14	— 17	— 30	+ 9	+ 6	— 5	— 8	— 21
	etc. für Zehntel, Hundertel.								

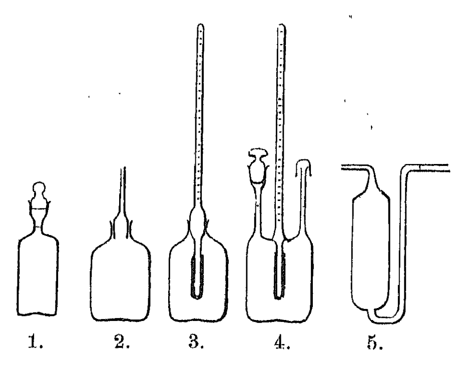
Bisher wurde die Summe der größeren Gewichtstücke als richtig angenommen; für die meisten Arbeiten (chemische Analyse, spezifisches Gewicht), die nur relative Wägungen verlangen, genügt dies. Um auf richtiges Gewicht zu beziehen vergleicht man (**13**) ein Stück oder eine Summe p mit einem Normalgewicht. Findet sich hierbei die richtige Korrektion $= + \delta_0$, während die frühere Tabelle $+ \delta$ gibt, so ist zu der früheren Korrektionszahl eines jeden Gewichtes P zu addieren $(\delta_0 - \delta) P/p$.

Zur Unterscheidung der Gewichtstücke von gleichem Nennwerte sollen die Ziffern in verschiedener Weise eingeschlagen oder mit einem Index versehen sein; andernfalls muß man zufällige Merkzeichen aufsuchen. Bei den Blechgewichten hilft man sich durch das Umbiegen verschiedener Ecken. — Auf den Gewichtsverlust in der Luft braucht für gewöhnliche Zwecke, wenn die größeren Stücke von gleichem Material sind, keine Rücksicht genommen zu werden, weil bei den kleineren der durch Schwankungen der Luftdichte entstehende Unterschied verschwindet; vgl. **13** II.

oder ausgeflossenen Menge bestimmen und hat dann die für den Auslauf geltenden Volumina in Rechnung zu setzen. Vgl. **23**.

2. Pyknometer.

Man wägt, durch Differenzbestimmung gegen das leere Gefäß, die Flüssigkeitsmenge *m* und die Wassermenge *w*, welche von einem und demselben Gefäß aufgenommen werden; dann ist $s = m/w$. Ein gewöhnliches Fläschchen, bis zum Rande oder zu einem Strich am Halse gefüllt, liefert leicht die 3te Dezimale richtig. Genauer arbeiten die mit dem Namen Pyknometer, Tarierfläschchen, bezeichneten konstanten Gefäße (Fig.), welche ganz oder bis zu einer Marke gefüllt werden, am genauesten Nr. 4 u. 5, wo die eine Öffnung zum Einlassen der Flüssigkeit, die andere zum Auslassen bez. Absaugen der Luft dient. — Nr. 1 wird mit einem langen dünnen Trichter gefüllt, mittels einer dgl. Pipette entleert oder, unter Einführung eines Glasrohrs zum Lufteintritt, ausgegossen.



Verfügt man nur über einige Tropfen, so lassen sich ganz kleine Fläschchen anwenden, wie sie zu Dampfdichtebestimmungen (**19** B) gebraucht werden. — Nr. 5 (Sprengel-Ostwald), durch Saugen von der Spitze bis zu einer Marke gefüllt, hängt man mit einem Drahte an die Wage. Genau stellt man die Füllung ein, indem man an der Spitze mit Fließpapier etwas absaugt oder mittels eines vorgehaltenen Tröpfchens etwas einsaugen läßt. Die Kenntnis der Temperatur wird hier und nötigenfalls bei Nr. 1 durch ein Bad von konstanter Temperatur erzielt, in welchem das Pyknometer sich aber hinreichend lange befunden haben muß. Über Füllung und Temperaturbestimmung von Nr. 2 vgl. B 2. Über die Korrektion wegen Temperaturschwankungen siehe **16** II.

Bequemer als Austrocknen des Gefäßes vor einer Neufüllung wird Vorspülen mit der neuen Flüssigkeit sein.

Für Dichtebestimmungen bei der Siedetemperatur wird das Pykno-

meter im Dampf der siedenden Flüssigkeit erwärmt; vgl. Ostwald-Luther S. 170. — Oberhalb des Siedepunkts s. z. B. Noyes, ZS f. ph. Ch. 46, 346. 1903; Publ. Carneg. Inst. Nr. 63, 1907.

3. Auftriebsmethode.

Man wägt einen mit Faden oder Draht an die Wage gehängten Körper (Glaskörper) in der Luft (p_l), in der Flüssigkeit (p_f) und im Wasser (p_w). Der Gewichtsverlust in der Flüssigkeit beträgt $m = p_l - p_f$, im Wasser $w = p_l - p_w$; somit ist wieder $s = m/w$. Denn wenn v das Volumen des Glaskörpers bedeutet, so ist nach dem Archimedischen Gesetz der Auftrieb (Gewichtsverlust) je gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit, also $m = v \cdot s$ und $w = v \cdot 1$. Korrektionen in **16**.

Zum Aufhängen dient eine kürzere Wagschale mit Häkchen oder, mangels eines solchen, ein Haken im Bügel der Wagschale, wobei die Flüssigkeit auf einem Tischchen über der Wagschale steht (Fig.).

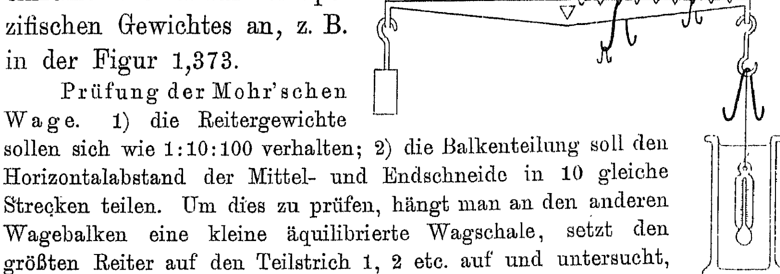
Die Aufhängeschlinge des Glaskörpers soll ganz untertauchen. Hauptfehlerquelle ist die Reibung in der Oberfläche bez. die Unregelmäßigkeit in der Benetzung des Aufhängefadens, welche bei Metalldrähten, besonders im Wasser, erheblich sein kann. Platindraht, den man platiniert (8, 18) und dann geglüht hat, vermindert den Fehler. — Bequem wird als Senkkörper ein kurzes, dickes Thermometer gebraucht. Die Rechnung wird erleichtert, wenn der Auftrieb w des Körpers in Wasser von 4° eine runde Zahl beträgt, z. B. 10 gr oder 30 gr.

Man soll darauf achten, daß nicht in der Aufhängeöse des Senkkörpers ein Luftbläschen sitzen bleibt!

Über Bestimmungen an verdünnten Lösungen bis in die 6. und 7. Dezimale vgl. Kohlrausch u. Hallwachs, Wied. Ann. 53, 15. 1894; 56, 185. 1895; Mie, ib. Boltzmann-Festschrift, S. 326. 1904. — Hohe Temperaturen: u. a. Senkkörper aus Platin oder für leichtere Flüssigkeiten aus dem sich wenig ausdehnenden (**44** II) Quarzglas; geschmolzene Salze z. B. Goodwin u. Mailey, Phys. Review 25, 478. 1907.

Mohr'sche Wage. Ein Glaskörper ist mit einem feinen Draht an einem dezimal geteilten Wagebalken äquilibriert. Der Auftrieb des Körpers in Wasser ist gleich dem Gewichte des größten Reiters; die anderen Reiter sind 10, 100 bez. 1000 mal leichter. Die Teilstriche des Wagebalkens, auf welche die Reiter aufgesetzt

werden müssen, um den Auftrieb der Flüssigkeit auf den untergetauchten Glaskörper zu kompensieren, geben ohne weiteres die einzelnen Dezimalen des spezifischen Gewichtes an, z. B. in der Figur 1,373.



Prüfung der Mohr'schen Wage. 1) die Reitergewichte sollen sich wie 1:10:100 verhalten; 2) die Balkenteilung soll den Horizontalabstand der Mittel- und Endschneide in 10 gleiche Strecken teilen. Um dies zu prüfen, hängt man an den anderen Wagebalken eine kleine äquilibrierte Wagschale, setzt den größten Reiter auf den Teilstrich 1, 2 etc. auf und untersucht, ob er dabei Gewichten auf der Wagschale entspricht, welche sich wie 1:2 etc. verhalten; 3) die Wage soll im Wasser von der Temperatur t diejenige Dichtigkeit zeigen, welche in Tab. 4 zu t gehört. Zeigt die Wage Q' statt Q, so sind ihre Angaben sämtlich mit Q/Q' zu multiplizieren. — Eine gute Mohr'sche Wage mit feinem platiniertem Platindraht (vgl. vor. S.) kann die 4te Dezimale noch einigermaßen richtig liefern.

4. Gewichtsaräometer. Schwebemethode.

Ein Schwimmkörper wiege P gr und bedürfe einer Auflage von p bez. p' gr, um bis zu einem bestimmten Volumen eintauchend in Wasser bez. einer anderen Flüssigkeit zu schwimmen. Dann hat diese offenbar das sp. Gewicht $s = \frac{P+p'}{P+p}$. Die ursprüngliche Senkwage von Nicholson (s. auch B 3) belastet man jedesmal zum Einsinken bis zur nämlichen Marke am Halse.

Über ein genaueres Aräometer vgl. Lohnstein, ZS f. Instr. 1894, 164.

Unter den Unsicherheiten der Kapillarität leiden Schwimmer nicht, die man ganz untersinkend durch Auflagegewichte zum Schweben bringt. Von diesen Gewichten (sp. G. $= \sigma$) ist in der Berechnung ihr Auftrieb p/σ im Wasser, bez. $p's/\sigma$ in der anderen Flüssigkeit abzuziehen, wo für s ein Näherungswert genügt.

Über eine Anordnung zu diesem Zweck und über die Korrektionen wegen Temperatur usw. vgl. z. B. Warrington, Phil. Mag. (5) 48, 498. 1899; Nansen, Norweg. Nord-Polar-Exp. X., Leipz. 1900.

5. Skalenaräometer. Senkwage.

Ein schwimmender Körper sinkt so weit ein, daß die verdrängte Flüssigkeit gerade sein Gewicht hat. Die Senkwage hat einen so tief liegenden Schwerpunkt, daß der Stiel beim Schwimmen aufrecht steht.

Der Teilstrich, bis zu welchem der Stiel einsinkt, zeigt ent-

weder die Dichtigkeit an, oder deren reziproken Wert, das spezifische Volumen, oder den Gehalt einer bestimmten Lösung, oder endlich sogenannte „Dichtigkeitsgrade".

Bei Baumé z. B. bedeutet	0°	13°	24°	34°	42°	49°	etc.
das spezifische Gewicht	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	

Die Ablesung des Aräometers geschieht an der Oberfläche durch die Flüssigkeit hindurch, indem man das Auge so hält, daß die Fläche als Linie verkürzt erscheint. Das Aräometer soll in Wasser von der Temperatur t die Zahl angeben, welche laut Tab. 4 zu t gehört. Man prüft andere Punkte der Skale in Flüssigkeiten von anderweitig ermitteltem spez. Gewicht. Eine große Genauigkeit wird durch die Ablesefehler und die Kapillarität verhindert.

6. Hydrometer.

Die Höhen zweier Flüssigkeitssäulen, welche sich in kommunizierenden Röhren das Gleichgewicht halten, stehen im umgekehrten Verhältnis der Dichtigkeiten. Über Kapillaritäts-Fehler oder Korrektionen s. **58** I. — Vgl. auch **44** IV 4.

Gehalt einer Lösung aus ihrem sp. Gewicht. S. hierüber **9** 4.

B. Für feste Körper.

Allgemeine Bemerkung. Dem untergetauchten Körper anhaftende Luftbläschen sind bei größeren Stücken durch wiederholtes Herausziehen oder mit dem Pinsel, bei kleinen durch Schütteln oder Auskochen oder mit der Luftpumpe zu beseitigen.

1. Wägung und Volumausmessung.

Haben m gr des Körpers das Volumen v ccm, so ist die Dichtigkeit $s = m/v$. Die Ausmessung kann bei regelmäßiger Gestalt des Körpers mit dem Maßstabe geschehen. Ein Cylinder (Draht) von der Länge l und dem Halbmesser r hat das Volumen $l \cdot r^2 \pi$, eine Kugel $\frac{4}{3} r^3 \pi$ etc.

Bei unregelmäßiger Gestalt mißt man das Volumen, um welches eine in einer kalibrierten Röhre enthaltene Flüssigkeit durch das Hineinwerfen des Körpers ansteigt. Besonders auch auf zerkleinerte Substanzen ist die Methode anwendbar. Für in Wasser lösliche Substanzen dienen z. B. Alkohol, Petroleum, Toluol oder auch eine gesättigte Lösung der Substanz. — Auch kann man den Körper in ein ganz gefülltes Gefäß mit

gut definiertem Ausguß bringen und das Volumen der ausfließenden Menge, z. B. als Gewicht durch sp. Gewicht, bestimmen.

2. Pyknometer (s. Fig. Nr. 2 u. 3, S. 67).

Dasselbe wiege mit Wasser gefüllt P, mit Wasser und dem Körper P', während der Körper selbst m wiege. Dann berechnet sich die verdrängte Wassermenge $w = P + m - P'$ und $s = m/w$. Besonders bei kleinen Körpern wird das Verfahren gebraucht, doch sind alsdann auch möglichst kleine Fläschchen anzuwenden, bei denen man sich überzeugt hat, daß sie, wiederholt mit Wasser gefüllt, nach Anbringung der Temperaturkorrektion hinreichend konstante Füllungen enthalten. Wenn die Temperatur beider Füllungen verschieden ist, so hat man (**16** II) die Füllung mit Wasser allein (Temp. $= t_0$) auf die andere Temperatur t umzurechnen. Dies geschieht bezüglich der Ausdehnung des Wassers durch Addition von $W(Q - Q_0)$, wenn Q und Q_0 die Dichtigkeiten des Wassers bei t und t_0 bedeuten (Tab. 4) und bezüglich des Glases durch Addition von $W \cdot 3\beta(t - t_0)$, wenn 3β den Volum-Ausdehnungskoeffizienten des Glases und W das Nettogewicht der ganzen Wasserfüllung bedeutet; das letztere braucht nur genähert bekannt zu sein.

Hat das Pyknometer kein Thermometer, so nimmt man entweder die Temperatur der Spritzflasche, oder man füllt zunächst nur so weit, daß man ein kleines Thermometer einführen kann. Demnächst füllt man den kleinen Rest auf und setzt den durch Aussaugen von Tropfen befreiten, mit einer unwägbaren Spur von Fett eingeriebenen Stöpsel rasch ein. Hat dieser eine hinreichende Wandstärke, so füllt er sich; man trocknet ausgespritzte Flüssigkeit sofort ab und tupft nötigenfalls mit einem Fließpapierspitzchen bis zur Marke aus. Spätere Temperaturänderungen sind gleichgültig, wenn sie nicht etwa ein Überfließen bewirken. Die Flüssigkeit soll also nicht viel kälter als die Zimmerluft sein.

3. Auftriebsmethode.

Wiegt der Körper in der Luft m, unter Wasser p, ist also der Auftrieb $w = m - p$, so ist $s = m/w$.

Mit der Wage. Man wägt den Körper für sich in Luft (m); dann, an einem dünnen fettfreien Faden oder Draht an einer

Wagschale aufgehängt (vgl. A 3) unter Wasser (p'). Das für sich bestimmte Drahtgewicht von p' abziehend erhält man p. Von dem hiermit berechneten Auftriebe ist nötigenfalls der Auftrieb des Drahtes abzuziehen, den man leicht schätzen kann, indem man aus dem Verhältnis der untergetauchten zur ganzen Länge das Gewicht des untergetauchten Drahtstückes berechnet; letzteres, dividiert durch die Dichtigkeit des Drahtes (Tab. 2), gibt seinen Gewichtsverlust im Wasser. — Ist der Draht oder ein Körbchen, welches den Körper bei der Wägung aufnimmt, von vornherein konstant untertauchend angehängt, so genügt es, ihn ein für allemal zu tarieren und nicht weiter zu berücksichtigen.

Bei der Wägung im Wasser nehmen die Schwingungen der Wage rasch ab; man wird meistens in der Ruhe beobachten müssen. — Der Aufhängefaden soll dünn sein und durch die Oberfläche nur einmal hindurchtreten, um die Kapillarkräfte möglichst zu vermindern; vgl. auch A 3. Das Wasser soll nahe Zimmertemperatur haben, oder man muß besonders geschützte Bäder anwenden. Im geschlossenen Wagekasten ist ein Thermometer von beistehender Form bequem.

In Wasser lösliche Körper wägt man in einer anderen Flüssigkeit von bekannter Dichtigkeit. Mit letzterer ist dann das wie oben berechnete Resultat zu multiplizieren.

Spezifisch leichte Körper werden durch Verbindung mit einem anderen von hinreichendem Gewicht zum Untersinken gezwungen; z. B. mit einer Metallklemme oder einer Glocke von Drahtnetz, unter welcher man den Körper aufsteigen läßt. Der Belastungskörper kann bei allen Wägungen im Wasser bleiben.

Zerkleinerte Körper legt man in ein Schälchen, welches unter Wasser hängt und tariert ist.

Kann man einen Körper nicht an die Wagschale hängen, so läßt sich vielleicht ein Gefäß mit Wasser auf die Wage stellen und seine Gewichtszunahme bestimmen, wenn der mit einem Faden an einem festen Stativ aufgehängte Körper untergetaucht wird. Diese Zunahme ist gleich dem scheinbaren Gewichtsverlust des Körpers im Wasser.

Nicholson'sche Senkwage. Man belastet die obere Schale des Schwimmers, jedesmal bis zu dessen Einsinken bis an die

Marke am Halse: 1) bloß durch Gewichte (P); 2) durch Körper und Gewichte (P'); 3) durch Gewichte, während zugleich der Körper unter Wasser auf der unteren Schale liegt (P''). Dann gibt $P - P' = m$ das Gewicht des Körpers, $P'' - P' = w$ das Gewicht des von ihm verdrängten Wassers und m/w wieder die Dichtigkeit des Körpers. — Temperaturschwankungen beeinträchtigen die Genauigkeit; um so mehr, je kleiner der Körper gegen die Senkwage ist. — Die Sicherheit der Einstellung wird durch Reinigen des Halses mit Weingeist erhöht.

Jolly'sche Federwage. Ein spiraliger Draht trägt zwei Wagschalen übereinander, von denen die untere konstant in ein verstellbares Gefäß mit Wasser taucht. Abgelesen wird eine unten am Spiraldrahte angebrachte Marke vor einer Teilung auf Spiegelglas (um die Parallaxe zu vermeiden). 0,1 mm läßt sich noch schätzen. Mit einem Gewichtsatz kann man genau wie an der Senkwage beobachten, indem man die Marke stets auf einen bestimmten Teilstrich bringt.

Ein einfacheres Wägungsprinzip mit der Federwage ist auch ohne Gewichtsatz dadurch gegeben, daß die Senkung h dem angehängten Gewichte p nahe proportional ist, wonach $p = A \cdot h$. Durch eine einmalige Belastung mit einem bekannten Gewicht kann der Faktor A bestimmt werden. — Da bei Dichtebestimmungen die Gewichtseinheit sich heraushebt, so kann man hier einfach den Skalenteil der Federwage als Einheit nehmen. Senkt sich die Wage durch Auflegen des Körpers auf die obere Schale um h, dagegen um h', wenn der Körper unter Wasser auf die untere Schale gelegt wird, so ist also $s = h/(h - h')$.

Genauer setzt man $p = Ah + Bh^2$. Man bestimmt A und B aus zwei Belastungen, deren eine etwa die größte anzuwendende Senkung bewirke, während die andere halb so groß sein mag. Hiernach läßt sich eine Tabelle aufstellen, welche zu den Senkungen die zugehörigen Belastungen angibt.

Federwagen werden bekanntlich in mannigfacher Form gebraucht; die einfachste sehr empfindliche Wage für kleine Gewichte ist z. B. ein am einen Ende befestigter horizontaler elastischer dünner Faden (Quarz, Stahl), dessen freies Ende mikroskopisch abgelesen wird. Salvioni, Beibl. 1902, 231. Auch die Torsion gespannter Drähte ist brauchbar.

4. Schwebemethode.

Sehr kleine, selbst pulverförmige Körper lassen sich bestimmen, indem man eine Flüssigkeit mischt, in welcher die Körper weder sinken noch steigen. Geeignet können Mischungen von Chloroform (1,52) oder Bromoform (2,9) oder Methylenjodid (3,3) mit Benzol (0,89), Toluol (0,89), Xylol (0,87), Acetylentetrabromid (3,0) oder wässerige Lösungen von Kaliumquecksilberjodid (Thoulet'sche Lösung; bis 3,20) sein. — Durch partielles Abdestillieren zerlegt man die Flüssigkeiten nachher wieder.

Zur genauen Abgleichung korrigiert man zweckmäßig etwa eine noch ein wenig zu leichte mit einer etwas zu schweren Mischung. Auch können zum letzten Ausgleich Temperaturänderungen dienen, da die Flüssigkeiten sich stark, die festen Körper sich schwach ausdehnen. — Anhängende Luft ist, wenn nötig mit der Luftpumpe, sorgfältig zu beseitigen.

Die Dichtigkeit der Flüssigkeit ermittelt man am einfachsten mit der Mohr'schen Wage, während die Körper schweben.

Vgl. auch Retgers, ZS f. phys. Ch. 11, 328. 1893.

16. Reduktion einer Dichtigkeitsbestimmung auf den leeren Raum und auf Wasser von 4⁰.

Von einem sp. Gewicht wird häufig die dritte, nicht selten aber auch die vierte Dezimale verlangt. Dann muß erstens der Auftrieb berücksichtigt werden, den der Körper in der Luft erfährt, und zweitens der Umstand, daß man in der Regel mit Wasser von anderer Temperatur als 4^0 arbeitet.

I. Reduktion auf den leeren Raum und auf Wasser von 4^0.

Für flüssige wie für feste Körper gelten bei den in **15** angegebenen Methoden, sowohl unter A wie unter B, folgende Korrektionen:

a) Bei Nr. 1 sind die gefundenen Gewichte, wenn die Genauigkeit es fordert, auf den leeren Raum zu reduzieren (**13** II; Tab. 1). Hieraus leitet sich die einfache Vorschrift ab: jedes spez. Gewicht, welches aus der Abwägung eines bekannten Volumens in Luft mit richtigen Messinggewichten ohne Rücksicht auf Luftauftrieb berechnet wurde, ist um $0{,}0012\,(1 - 1/8{,}4) = 0{,}00106$ zu vergrößern. Vgl. **13**, **23** und Tab. 1.

b) Bei den pyknometrischen und Auftriebsmethoden unter Nr. 2 und 3 werde zunächst zum Überfluß darauf hingewiesen,

daß von den Gewichtstücken nur ihre relative Richtigkeit in Luft verlangt wird; ein Umrechnen auf absolute Richtigkeit oder das Vakuum ist vollkommen zwecklos. Alle gefundenen Dichten sind nach folgender gemeinschaftlicher Regel auf Wasser von 4^0 und auf den leeren Raum zu reduzieren. Es bedeute:

Q die Dichtigkeit des Wassers, welches zur Beobachtung gedient hat (Tab. 4);

λ die Dichtigkeit der Luft, bezogen auf Wasser (der Mittelwert $\lambda = 0{,}00120$ genügt fast immer; andernfalls vgl. **18** u. Tab. 6);

m das scheinbare, unter Nr. 2 und 3 je so bezeichnete Gewicht, wie es sich aus den Wägungen in Luft ergeben hat;

w das scheinbare Gewicht des dem Volumen des Körpers gleichen Volumens Wasser von der Dichtigkeit Q.

Die Größe w kann also bedeuten:

1. für Flüssigkeiten: das beobachtete Gewicht des Wassers im Pyknometer, oder des von dem Glaskörper verdrängten Wassers;

2. für feste Körper: den beobachteten Gewichtsverlust des Körpers im Wasser bei einer nach dem Archimedischen Gesetz ausgeführten Bestimmung; oder das Gewicht des durch Einbringen des Körpers ausgeflossenen Wassers bei Anwendung des Pyknometers.

m/w ist das rohe unkorrigierte spezifische Gewicht. Das richtige ist

$$s = \frac{m}{w}(Q - \lambda) + \lambda \quad \text{oder auch} \quad = \frac{m}{w} Q + \left(1 - \frac{m}{w}\right)\lambda. \qquad 1.$$

Bei der Mohr'schen Wage ist Q die Dichtigkeit desjenigen Wassers, in welchem der Glaskörper den großen Reiter äquilibriert, also bei richtig auf 4^0 abgeglichenem Glaskörper $Q=1$; m/w bedeutet die Ablesung an der Wage.

Vgl. über die Rechnung auch die folgende Seite, und über ihre Vereinfachung, falls man denselben Glaskörper oder dasselbe Pyknometer wiederholt benutzt, III.

Strenge Rechnungsweisen mit Rücksicht auf die Schwankungen der Luftdichte finden sich in R. Kohlrausch, prakt. Regeln zur genauen Best. d. spez. Gewichtes. Marburg 1856.

Formel 1 korrigiert also jeden nach Nr. 2 und 3 in **15** A oder B bestimmten Wert auf den leeren Raum und Wasser von 4^0.

Beweis. Wenn der Körper, fest oder flüssig, in der Luft das Gewicht m zeigt, während er die Luftmenge l verdrängt, so wiegt er im leeren Raume $m + l$. — Bezüglich der Bestimmung von w können drei

Fälle unterschieden werden. 1. Hat man das Gewicht w des gleichen Volumens Wasser mit dem Pyknometer bestimmt, so wiegt das Wasser im leeren Raume $w + l$; 2. wenn der scheinbare Gewichtsverlust w eines festen Körpers durch Eintauchen in Wasser gemessen wurde, so ist w ebenfalls um l zu vermehren, da das Gewicht des Körpers im leeren Raume um l größer gewesen wäre; 3. ebenso ist, wenn eine Flüssigkeit dadurch bestimmt wird, daß man den scheinbaren Gewichtsverlust eines und desselben Körpers in der Flüssigkeit und im Wasser ermittelt, jeder Verlust um l zu vergrößern.

In allen Fällen wäre mithin das sp. Gew. $= (m + l)/(w + l)$, wenn das Wasser die Dichtigkeit Eins (4°) gehabt hätte. Statt dessen hatte es aber nur die Dicht. Q, mit welcher folglich das bisherige Resultat zu multiplizieren ist. Also wird $s = (m + l)\, Q/(w + l)$. Da nun $(w + l)/Q$ das Volumen der verdrängten Luft bedeutet, welche das sp. Gew. λ hat, so ist $l = \lambda(w + l)/Q$, woraus $l = w\lambda/(Q - \lambda)$. Den letzteren Wert für l in s eingesetzt, erhält man die Gleichung 1.

Beispiel. Ein Stück Silber wiege in der Luft . . . $m = 24{,}312$ gr
in Wasser von 19,4° . . . . 21,916 gr
also ist der scheinbare Gewichtsverlust im Wasser $w =$ 2,396 gr

Das unkorrigierte spezifische Gewicht ist hiernach

$$m/w = 24{,}312/2{,}396 = 10{,}147.$$

Das korrigierte erhält man, da nach Tab. 4 für 19,4° $Q = 0{,}99835$ ist,

$$s = 10{,}147\,(0{,}99835 - 0{,}00120) + 0{,}0012 = 10{,}119.$$

Man rechnet im Kopf, wenn man $0{,}99835 - 0{,}00120 = 1 - 0{,}00285$ setzt.

Wie die zweite Form von Gl. 1 zeigt, verschwindet der Einfluß des Luftauftriebes nur, wenn die Dichtigkeit nahe gleich 1 ist (er wird also klein bei verdünnten wässrigen Lösungen). Er erreicht für $s = 20$ den Wert 0,023. Würde man noch die Ausdehnung des Wassers vernachlässigen, so könnte hier ein um 0,08 zu großes Resultat entstehen.

II. Korrektionen für das Pyknometer bez. den Glaskörper wegen Temperaturschwankungen.

Hier ist neben dem vorigen noch folgendes zu berücksichtigen.

Die Wägung mit bez. im Wasser sei bei der Temp. t_0 ausgeführt und habe das scheinbare Nettogewicht bez. den Auftrieb w_0 ergeben. Man sucht aber die entsprechende Größe (w) für die, häufig von t_0 verschiedene Temperatur t, bei der die Wägung mit bez. in der zu bestimmenden Flüssigkeit (oder etwa nach Einbringen eines festen Körpers ins Pyknometer) angestellt wurde. Die Dichtigkeit des Wassers bei t_0 und t sei Q_0 und Q; der kubische Ausdehnungskoeffizient des Gefäßes oder des Senkkörpers (1/40000 für mittleres Glas) heiße 3β. Dann ist $w = w_0\,[1 + 3\beta(t - t_0)]\, Q/Q_0$, oder auch genau genug $w = w_0 + w_0\,[(Q - Q_0) + 3\beta(t - t_0)]$. 2.

Denn man kann schreiben $\dfrac{Q}{Q_0} = \dfrac{1 - (1 - Q)}{1 - (1 - Q_0)} = 1 + (Q - Q_0)$ (vgl. Formel 8 S. 9) und $(Q - Q_0)\cdot 3\beta(t - t_0)$ verschwindet gegen 1.

Das w aus Formel 2 ist in Formel 1 S. 75 einzusetzen.

Oberhalb 4^0 ist natürlich $Q - Q_0$ negativ, wenn $t > t_0$ ist. — Der ganze in steile Klammern gesetzte Ausdruck läßt sich für gewöhnliches Glas aus Tab. 4, zweiter Teil, als die Differenz der für t_0 und t gegebenen Zahlen entnehmen, wobei die für t geltende von der für t_0 geltenden abzuziehen ist.

Besonders bei der Dichtebestimmung fester Körper mit einem relativ großen Pyknometer dürfen diese Korrektionen nicht übersehen werden.

III. Zusammenfassung aller Korrektionen bei wiederholtem Gebrauch desselben Pyknometers oder Glaskörpers.

Es sei das scheinbare Gewicht der Pyknometerfüllung mit Wasser oder der scheinbare Auftrieb des Glaskörpers im Wasser bei t_0 gleich w_0 bestimmt worden. Man stelle den Ausdruck

$$W = w_0 \frac{1 + 3\beta(t - t_0)}{Q_0 - 0{,}0012o}$$

über die in Betracht kommende Temperaturstrecke als Funktion von t in einer Tabelle oder Kurve dar. Für eine bei t ausgeführte Bestimmung entnimmt man hieraus den Wert W und berechnet nun das (natürlich für t geltende) spez. Gewicht s, wenn m das scheinbare Gewicht der Flüssigkeitsfüllung oder den scheinbaren Auftrieb in der Flüssigkeit bedeutet,

$$s = \frac{m}{W} + 0{,}0012o.$$

Beweis durch Vereinigung der Formeln 1 u. 2 S. 75 u. 76.

IV. Reduktion auf eine Normaltemperatur.

s gilt für die Wägungstemperatur t. Für einen festen Körper ist t seine Temperatur im Wasser.

Hieraus wird die Dichtigkeit s' bei einer anderen Temperatur t' mit Hilfe des kubischen Ausdehnungskoeffizienten α (oder 3β; Tab. 11 u. 12) gefunden
$$s' = s[1 + \alpha(t - t')].$$

Für größere Temperatur-Intervalle muß die Ausdehnung der Flüssigkeiten aus Formeln oder aus Tabellen entnommen werden. Die Volumina derselben Flüssigkeitsmenge seien für die Temperaturen t' und t gleich v' und v angegeben; dann ist $s' = s \cdot v/v'$.

Vgl. Tab. 3a, 3b u. 12; Gerlach, Salzlösungen; Bender, Wied. Ann. 22, 179. 1884; 31, 872. 1887; Forch, Wied. Ann. 55, 100. 1895; Landolt-Börnstein-Meyerhoffer, Tab. 94 ff.

17. Volumenometer (Say, Kopp).

Das Instrument dient für Körper, die nicht in eine Flüssigkeit kommen dürfen. Angewendet wird das Boyle-Mariotte'sche Gesetz (**18**), wonach bei ungeänderter Temperatur das Produkt aus Druck und Volumen einer Luftmasse konstant ist.

Eine konstante Luftmenge ist über Quecksilber abgesperrt, zunächst unter dem Druck H mm Quecksilber (meist dem atmo-

sphärischen Barometerstand); ihr Volumen in diesem Zustande heiße V. Um V zu ermitteln, vergrößere bez. verkleinere man es um eine gemessene Größe v und beobachte die dabei stattfindende Druckänderung h mm Quecksilber, dann ist $VH = (V \pm v) \cdot (H \mp h)$, also

$$V = v \frac{H-h}{h} \text{ bez.} = v \frac{H+h}{h}.$$

Nachdem so das Volumen des leeren Gefäßes gemessen worden ist, bringt man den Körper hinein und verfährt ebenso. Die Differenz der gefundenen Werte gibt das Volumen des Körpers.

v und h dürfen nicht zu klein sein, wenn ein brauchbares Resultat entstehen soll. — Man vermeide Temperaturänderungen der abgeschlossenen Luftmenge durch die Nähe des Körpers usw. während des Versuches.

Von besonderen Formen s. u. a.: an die Form von Say angeschlossen Guglielmo, Atti d. Lincei 12 [2], 617. 1903; — dem Jolly'schen Luftthermometer ähnlich angeordnet Paalzow, Wied. Ann. 13, 332. 1881; — in einfacherer Anordnung Oberbeck, ib. 67, 209. 1899. — Ein Instrument, welches den Körper mit einer gewissen Luftmenge in eine Barometerleere aufnimmt, schon für kleine Mengen brauchbar, bei Zehnder, Ann. d. Phys. 10, 40. 1903, und für hohe Temperaturen ib. 15, 328. 1904.

18. Umrechnung der Zustände von Gasen. Berechnung der Dichtigkeit der Luft oder eines anderen Gases.

1. Gesetz von Boyle u. Mariotte; 1662 u. 1679. Bei konstanter Temperatur ist die Dichtigkeit s eines Gases seinem Drucke (Spannung; Tension) p proportional oder das Volumen v dem Drucke umgekehrt; also

$$s : s' = p : p' \quad \text{und} \quad v : v' = p' : p \quad \text{oder} \quad vp = \text{Const.}$$

2. Gesetz von Gay-Lussac; 1802. Bei konstantem Druck dehnt sich ein Gas für jeden Grad Temperaturerhöhung um gleich viel aus, nämlich um $\alpha = 0{,}00367$ oder $1/273$ des Volumens v_0, welches ihm bei 0° zukommt [1]). Also gilt

$$v = v_0 (1 + 0{,}00367\, t) = v_0 \left(1 + \tfrac{1}{273} t\right) \quad \text{oder} \quad = \tfrac{1}{273} v_0 (273 + t).$$

$273 + t$, d. h. die Temperatur auf der Centesimalskale, aber von -273°C als Nullpunkt gezählt, mit anderen Worten, wenn man an den Eispunkt statt 0 die Zahl $+273$ schreibt, heißt die absolute Temperatur T.

1) Genauer ist $0{,}00367 = 1/272{,}5$. — Unter gewöhnlichen Verhältnissen haben die meisten Gase etwas mehr als 0,00367, Wasserstoff etwas weniger. — Vgl. auch 42 u. Tab. 12a.

3. Kombination der Gesetze von Boyle (Mariotte) und Gay-Lussac: Zusammengehörige Volumina v, Dichtigkeiten s, Drucke p und Temperaturen t einer bestimmten Gasmasse sind hiernach verbunden, außer durch $vs = \text{Const.}$, durch die Beziehungen

$$\frac{pv}{1+0{,}00367t} = \text{Const.} \quad \text{oder} \quad \frac{pv}{T} = \text{Const.} \quad \text{oder} \quad \frac{p}{sT} = \text{Const.}$$

Für die Gasmenge 1 gr bezeichnet man, das Volumen in ccm, den Druck in Atmosphären gemessen,

$$\frac{pv}{T} = R$$

und nennt R die Konstante des betr. Gases (z. B. Luft, $p = 1$ Atm., $T = 273^0$, $v = 1/0{,}001293 = 773$, also $R = 773/273 = 2{,}83$). — Schreibt man die Gleichung, auf 1 Gr.-Molekül (1 „Mol“) bezogen, $pv/T = R_0$ so hat, nach dem Avogadro'schen Gesetz, R_0 für alle Gase denselben Zahlenwert und heißt allgemeine Gaskonstante; z.B. aus Sauerstoff (O_2) berechnet, für 1 Atm. und $T = 273^0$ $v = 32/0{,}001429 = 22390$, mithin $R_0 = 22390/273 = 82{,}0$. — Über die Werte im CGS-System vgl. Anh. 9a.

Nach obigem wird also aus einem, durch die zusammengehörenden bekannten Werte s_0, v_0, p_0, t_0 definierten Zustande eines Gases für einen anderen Zustand s, v, p, t abgeleitet, wenn $\alpha = 0{,}00367$ oder $\frac{1}{273}$ ist:

$$s = s_0 \frac{1+\alpha t_0}{1+\alpha t} \frac{p}{p_0} \qquad v = v_0 \frac{1+\alpha t}{1+\alpha t_0} \frac{p_0}{p} \qquad p = p_0 \frac{1+\alpha t}{1+\alpha t_0} \frac{v_0}{v}$$

oder endlich

$$\frac{v}{v_0} \frac{p}{p_0} = \frac{273+t}{273+t_0} = \frac{T}{T_0}; \quad \frac{vp}{T} = \text{Const.}$$

Abweichungen. Diese Gesetze sind in Wirklichkeit nicht streng erfüllt, besonders bei den leichter kondensierbaren Gasen, die im allgemeinen etwas größere Ausdehnungen zeigen; der wirkliche Druck (Spannung) wird mit sinkender Temperatur und meist ebenso mit steigender Dichtigkeit kleiner als der berechnete. Man unterscheidet wohl den Temperaturkoeffizienten der Ausdehnung bei konstantem Druck und den der Spannung bei konstantem Volumen. Vgl. noch **42** und Tab. 12a.

Grundzahlen für den vollkommenen Gaszustand. Vgl. D. Berthelot, ZS f. Elektroch. 1904, 621. Kritische Reduktion der Beobachtungen gibt für ein vollkommenes Gas $\alpha = 0{,}003662$, somit als absoluten Nullpunkt der thermodynamischen Temperaturskale (vgl. Anh. 9b) $-1/0{,}003662 = -273{,}1^0$ C. — Sauerstoff (O_2), wenn er vom idealen verdünnten Zustande bis 0^0 und 1 Atm. die Gasgesetze genau befolgen würde, hätte daselbst das sp. Gew. 0,0014279 (statt 0,001429 wirklich), also die auf Luft bezogene „Dampfdichte“ 0,0014279/0,001293 = 1,1043. — Im idealen Gaszustande kommt somit nach dem vorigen jedem Gr.-Molekül bei 0^0 und 1 Atm. das Volumen 32/0,0014279 = 22410 ccm oder 22,41 Liter zu, also bei t^0 und p Atm. $22{,}41(1+0{,}003662t)/p$ Liter.

Van der Waals'sche Zustandsgleichung. Die Abweichungen vom idealen Gaszustand, in Verbindung mit den Zuständen, welche ein Gas bei seiner Verflüssigung durch großen Druck und niedrige Temperatur

durchläuft, und mit dem „kritischen Zustand" lassen sich nahe zusammenfassen, indem man

$$\text{anstatt } \frac{pv}{T} = R \text{ schreibt } \frac{1}{T}\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = R.$$

Die Korrektionszahlen a und b sind Konstanten der einzelnen Gase. Vgl. hierüber und über abgeänderte Zustandsformeln, besonders von Clausius, z. B. Graetz, Winkelm. Hdb. (2) III, 1135. 1906; Chwolson, Physik III, 798ff.

Hat ein Gas die Dichtigkeit (sp. Gew.) s_0 für 0^0 und 760 mm Quecksilberdruck, so ist für t^0 und p mm, wenn $\alpha = 0{,}00367$,

$$s = s_0 \frac{1}{1+\alpha t} \cdot \frac{p}{760}.$$

Trockne atmosphärische Luft von einem Kohlensäuregehalte von 0,06 Volumprozenten hat bei 0^0 und 760 mm Hg (0^0) die Dichtigkeit (das sp. Gewicht) $\lambda_0 = 0{,}0012932$, also bei t und dem auf 0^0 reduzierten Quecksilberdruck p mm (vgl. **36** u. **37**)

$$\lambda = \frac{0{,}0012932}{1+\alpha t} \cdot \frac{p}{760} \qquad 1.$$

Man findet diese Größe in Tab. 6. — Das sp. Gew. s eines anderen Gases für p und t wird man oft am einfachsten aus seiner auf Luft bezogenen Gasdichte d (Tab. 12a) als $s = \lambda d$ berechnen.

Über die genauere chem. Zusammensetzung der Luft vgl. Tab. 6.

Dalton'sches Gesetz. Eine Flüssigkeit verdampft in einen, mit einem Gase erfüllten Raum bezüglich Dampfmenge und Dampfdruck nahe bis zu ihrem, für das Vakuum geltenden Sättigungszustande. Der Gesamtdruck im Raume ist gleich der Summe der Partialdrucke.

Ist ein Gasvolumen v über einer Flüssigkeit (z. B. Wasser) gemessen, mit deren Dämpfen der Raum v gesättigt ist, so gilt also in den vorigen Formeln als zu v gehörender Druck des trockenen Gases der Gesamtdruck minus Sättigungs-Dampfspannung der Flüssigkeit. Für Wasser vgl. Tab. 13. — Zu beachten sind etwaige Absorptionsvorgänge und chemische Wechselwirkungen zwischen Flüssigkeit und Gas.

Dichtigkeit feuchter Luft. Die feuchte atmosphärische Luft kann bis zu 1% leichter sein, als cet. par. trockene Luft. Nun ist Wasserdampf nahe $\frac{5}{8}$ so dicht wie Luft von gleichem Druck und gleicher Temperatur. Man findet also die Dichtigkeit feuchter Luft, wenn die Spannkraft (der Druck) des Wasserdampfes in derselben $= e$ ist (**47**), indem man $\frac{3}{8}e$ von dem gesamten Druck (z. B. Barometerstand) abzieht und mit dem so korrigierten Werte p in Tab. 6 oder Formel 1 eingeht.

Unter der Annahme, daß die Luft mit Wasserdampf halb gesättigt sei, kann man für Zimmertemperatur nahe so rechnen,

daß man für p den ganzen Druck nimmt, aber nunmehr rechnet:

$$\lambda = \frac{0,001295}{1+0,004t} \cdot \frac{p}{760}. \qquad 2.$$

Die größten relativen Abweichungen vom Werte Gl. 1 mögen im Freien etwa $\pm\frac{1}{3000}$ betragen. Im Zimmer treten Schwankungen durch den Kohlensäuregehalt hinzu, die $\frac{1}{1000}$ betragen können, also bei feinen Bestimmungen zu beachten sind.

Die Ausdrücke $1+0,00367t$ und $p/760$ s. in Tab. 7.

18a. Eudiometer (Volta).

Dieses dient zunächst zur Sauerstoffbestimmung der Luft. Ein einseitig geschlossenes starkes Glasrohr ist sowohl nach Volumen wie nach Länge geteilt. Zwei nahe dem geschlossenen Ende eingeschmolzene Platindrähte lassen ein brennbares Gasgemisch durch einen elektrischen Funken (Elektrisiermaschine, Elektrophor, Induktorium) entzünden.

Das Eudiometer wird, luftfrei mit Quecksilber gefüllt, über Quecksilber umgestürzt, dann die zu analysierende Luft trocken eingeleitet und ihr Volumen v_1, Druck p_1 (Barometerstand minus gehobene Quecksilberhöhe) und Temperatur t_1 gemessen. Man fügt trockenen Wasserstoff (8, 3) im Überschuß gegen den Sauerstoff hinzu und bestimmt die jetzigen Größen v_2, p_2 und t_2.

Man preßt das Rohr auf einen am Boden der Wanne befestigten Kork, läßt einige Funken durchschlagen und mißt dann, nach Ablösen vom Korke, v_3, p_3 und t_3.

Das in der Volumeinheit enthaltene Sauerstoffvolumen berechnet sich, wenn die drei Temperaturen gleich sind, zu

$$\frac{1}{3}\,\frac{v_2p_2 - v_3(p_3 - e)}{v_1p_1},$$

wo e die Spannkraft des gesättigten Wasserdampfs bei t_3 bedeutet (Tab. 13). — Wechselte die Temperatur, so ist jedes vp, bez. $v_3(p_3 - e)$ durch sein $1+\alpha t$ zu dividieren.

Beweise einfach aus **18**.

Genaueres und eudiometrische Methoden für andere Gase s. Bunsen, gasometrische Methoden; Hempel, gasanalytische Methoden, 3. Aufl. 1900.

19. Bestimmung der Dampfdichte.

Ungesättigte Dämpfe folgen, mit den S. 79 besprochenen Abweichungen, den Gasgesetzen; alle Gase sind ja ungesättigte Dämpfe.

Dampfdichte d heißt in der Physik die Dichtigkeit eines Dampfes (Gases), bezogen auf trockne atmosphärische Luft von dem Druck und der Temperatur des Dampfes als Einheit.

Dampfdichtebestimmungen bezwecken meist die Ermittelung von Molekulargewichten auf Grund des Avogadro'schen Gesetzes, nach welchem gleiche Volumina aller Gase bei gl. Druck und gl. Temperatur die nämliche Anzahl von Molekülen enthalten, mit anderen Worten, wonach das Mol.-G. eines Dampfes seiner D.-D. proportional ist.

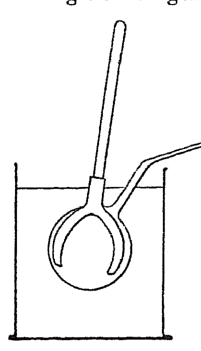
Für die Chemie ist es am übersichtlichsten, die D.-D.-Zahlen, anstatt auf Luft, auf ein fingiertes Normalgas zu beziehen, dessen Mol.-G. = 1 ist; dann wird das Mol.-G. einfach der Dampfdichte gleich. Dieses Normalgas würde genau die halbe Dichte des Wasserstoffgases (H_2) haben, wenn das System der Atomgewichte auf H = 1 aufgebaut wäre. Wegen der analytischen Methoden wird jedoch O = 16,00 zugrunde gelegt, demnach hat jenes Normalgas 1/32 der D.-D. von Sauerstoff (O_2). Nun hat, auf Luft bezogen, idealer Sauerstoff die D.-D. 1,1043 (vgl. S. 79), das Normalgas also 1,1043/32 = 1/28,98.

Eine auf Luft bezogene D.-D. ist hiernach mit 28,98 (nahe 29) zu multiplizieren, um sie auf das chemische Normalgas zu beziehen, mit anderen Worten um das Mol.-G. des Dampfes zu erhalten. Umgekehrt gibt das Mol.-Gew., durch 28,98 geteilt, die D.-D. im vollkommenen Dampfzustande; z. B. für Wasser (H_2O) $(2 \cdot 1{,}008 + 16)/28{,}98 = 0{,}622$.

Bei manchen Dämpfen dissoziieren die Moleküle sich mit wachsender Temperatur allmählich; die gefundene Dampfdichte d wird dann kleiner als die aus dem Mol.-G. folgende d_0. Man nennt bei dem Zerfall in zwei Moleküle $\frac{d_0}{d} - 1$, bei dem Zerfall in n Moleküle $\left(\frac{d_0}{d} - 1\right) \cdot \frac{1}{n-1}$ den Dissoziationsgrad, d. h. das Verhältnis der Zahl der Moleküle, welche sich gespalten haben, zu der ursprünglichen Gesamtzahl.

A. Durch Wägung eines bekannten Dampfvolumens (Dumas 1827).

Ein leichter, $\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{4}$ Liter fassender Glaskolben mit angeblasener Röhre, der eine Atmosphäre äußeren Überdrucks aushält (also keinen eingezogenen Boden haben soll), wird gut gereinigt und mittels Erwärmens und gleichzeitigen Aussaugens durch ein eingeführtes Röhrchen so getrocknet, daß nichts Dampfbildendes darin ist. Das Rohr wird dann in eine Spitze von etwa 1 qmm Öffnung ausgezogen und so gewogen. Nun bringt man einige Gramm der zu bestimmenden Flüssigkeit in den Kolben, dadurch daß man ihn erwärmt und die Flüssigkeit während des Abkühlens einsaugen läßt.



Der Kolben wird dann mit einem geeigneten Halter (z. B. Fig.) gefaßt und so in ein Bad gebracht, daß die offene Spitze herausragt; das Bad werde 10 bis 20° über den Siedepunkt der zu verdampfenden Flüssigkeit erhitzt. Ist alle Flüssigkeit verdampft, so schmelzt man den Ballon mit der Stichflamme vollständig zu,

am sichersten durch Abziehen der Spitze, und liest die Temperatur des Bades und den Barometerstand ab.

Nach dem Entfernen aus dem Bade läßt man, durch Umkehren des Kolbens, den in der Kälte sich verdichtenden Tropfen in die Spitze fließen und überzeugt sich, daß hier keine Luft eintritt. Darauf wird der abgekühlte und gut gereinigte Ballon, ev. nebst der abgezogenen Spitze, wieder gewogen, unter Beobachtung der Temperatur im Wagekasten und des Hygrometers sowie, falls ein größerer Zeitraum zwischen dem Zuschmelzen und der Wägung liegt, auch des Barometers.

Endlich hält man die Ballonspitze in vorher ausgekochtes oder unter der Luftpumpe luftfrei gemachtes Wasser [oder in Quecksilber], feilt sie an und bricht sie ab, worauf die Flüssigkeit in den Ballon steigt. Der gefüllte Ballon nebst der abgebrochenen Spitze wird wiederum gewogen, wozu eine gröbere Wage genügt.

Die Formeln gelten wesentlich auch für die Gasdichtebestimmung **20** A.

Das Gewicht des mit Luft, Dampf, Wasser [oder Quecksilber] gefüllten Ballons sei gleich m, m', M;

t und b bei dem Zuschmelzen Temperatur des Dampfes und Barometerstand;

t' und b' bei der Wägung des Dampfes Temperatur im Wagekasten und Barometerstand. Von b' (aber nicht von b) sei $\frac{3}{8}$ der Spannkraft e des Wasserdampfes (**47**) im Wagezimmer abgezogen (vgl. **18**);

λ' die Dichtigkeit der Luft, wie sie zu t', b' aus **18** oder aus Tab. 6 gefunden wird;

α = 0,00367 der Gas-Ausdehnungskoeffizient.

I. Die Dampfdichte ist, falls mit Wasser gewogen wurde,

$$d = \left(\frac{m'-m}{M-m}\frac{1}{\lambda'}+1\right)\frac{b'}{b}\frac{1+\alpha t}{1+\alpha t'}.$$

[Für Quecksilber $13{,}56/\lambda'$ anstatt $1/\lambda'$.]

Beweis. Bezeichnen D und L Dampf-, bez. Luftgewicht im Ballon, so ist offenbar $D - L = m' - m$, also $D = m' - m + L$. Die Dampfdichte d würde, wenn der Dampf wie die Luft t' und b' gehabt hätte, einfach dargestellt werden durch $d = D/L = (m'-m)/L + 1$, oder, da $L = \lambda'(M-m)$ ist, durch $d = \frac{m'-m}{M-m}\frac{1}{\lambda'}+1$. Der Faktor hinter der Klammer kommt hinzu, da der Dampf nicht bei t' und b', sondern bei t und b abgesperrt wurde.

II. Genauere Formel: mit Rücksicht auf die Ausdehnung des Glases und des Wassers und auf den Gewichtsverlust des Wassers in der Luft. Es sei

Q die Dichtigkeit des zur Wägung angewandten Wassers (Tab. 4) [oder Quecksilbers Tab. 2 u. 12];

3β der kubische Ausdehnungskoeffizient des Glases = 0,000025 = 1/40000 (vgl. auch 8, 5); so ist

$$d = \left(\frac{m'-m}{M-m}\frac{Q-\lambda'}{\lambda'}+1\right)[1-3\beta(t-t')]\frac{b'}{b}\frac{1+\alpha t}{1+\alpha t'}.$$

Beweis ähnlich wie in **16.** — Der Dichtigkeitsunterschied des zurückgebliebenen Tropfens gegen das Wasser ist in der Formel vernachlässigt.

III. Wenn der Ballon sich nach Abbrechen der Spitze unter Wasser nicht ganz füllt, so hat der Dampf die Luft nicht vollständig verdrängt. Will man hierauf keine Rücksicht nehmen, so fülle man vor der Wägung vollständig mit der Spritzflasche und rechne nach den früheren Formeln. Andernfalls tauche man den Ballon nach dem Abbrechen der Spitze so weit ein, daß die innere und äußere Oberfläche gleich hoch steht, und wäge ihn so weit gefüllt (M'). Erst dann füllt man den Rest mit Flüssigkeit und führt die Wägung M aus. Dann ist

$$d = \frac{(m'-m)\,Q/\lambda' + M' - m'}{(M-m)\frac{b}{b'}\frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t}[1+3\beta(t-t')] - (M-M')}.$$

R. Kohlrausch, Prakt. Regeln z. Best. d. spez. Gewichtes. Marburg 1856.

Beweis. Das Volumen der Luftblase, bei der Temperatur der Füllung $=\frac{M-M'}{Q-\lambda'}$, war also bei dem Zuschmelzen $v=\frac{M-M'}{Q-\lambda'}\frac{b'}{b}\frac{1+\alpha t}{1+\alpha t'}$. Der Ausdruck d unter II ist demnach die D.-D. eines Gemisches von v Luft und $V-v$ Dampf, und es ist, die Dichte des reinen Dampfes durch d_0 bezeichnet, $Vd = v + (V-v)d_0$, woraus $d_0 = (Vd - v)/(V-v)$.

Hierein den Wert für d unter II, den obigen Wert für v, endlich $V = (M-m)/(Q-\lambda')\cdot[1+3\beta(t-t')]$ eingesetzt, findet sich nach einigen Umformungen, zum Teil mittels der Formeln S. 9, der Ausdruck unter III.

Beispiel. Es wurde gefunden:

$m = 29{,}6861$ gr (Luft), $M = 142{,}41$ gr (ganz mit Wasser);
$m' = 29{,}8431$ gr (Dampf), $M' = 141{,}32$ gr (teilweise mit Wasser);
ferner $b = 745{,}6$ mm, $t = 99{,}5^0$ (beim Zuschmelzen);
$b' = 742{,}2$ mm; $e = 9{,}4$ mm $t' = 18{,}7^0$ (beim Wägen mit Dampf).

Das Wasser zur Wägung hatte $17{,}2^0$, also (Tab. 4) $Q = 0{,}9988$.

Man findet (**18**) $\lambda' = 0{,}001182$ ohne Rücksicht auf e,
$\lambda' = 0{,}001176$ mit " " "

Nach der richtigen Formel III erhält man die Dampfdichte 2,777; II ergibt 2,755, I 2,765. Durch Vernachlässigung von e würden diese Zahlen um 0,005 wachsen.

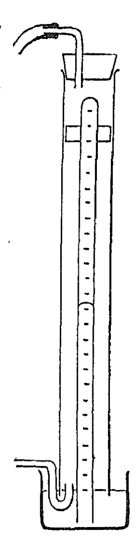
Die auf Sauerstoff $= 32$ bezogene Dampfdichte oder das Molekulargewicht des Dampfes ist also (wenn $O = 16$; vgl. S. 82) $2{,}777 \cdot 28{,}98 = 80{,}5$.

Den Ausdruck $1+\alpha t$ siehe Tab. 7. Sonst rechnete man bequemer

$$\frac{273+t'}{273+t} \text{ statt } \frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t}.$$

B. Durch Messung des Dampfvolumens einer gewogenen Flüssigkeitsmenge (Gay-Lussac 1812; Hofmann 1867).

Ein dünnwandiges Glaskügelchen, dessen Ansatzröhrchen man nach dem Füllen zuschmelzen oder, wenn es sehr fein ist, auch offen lassen kann, oder ein ganz kleines Fläschchen mit eingeriebenem Stöpsel, von



etwa $^1/_{10}$ bis $^1/_5$ ccm Inhalt, wird zuerst leer und dann mit der Substanz, deren Dampfdichte bestimmt werden soll, gewogen. Gläschen und Inhalt läßt man in einer mit trockenem und luftfreiem Quecksilber (8, 1) gefüllten und über Quecksilber umgestürzten Glasröhre aufsteigen, die von dem geschlossenen Ende an geteilt ist, entweder nach ccm oder einfach in mm, die nach **23** in Volumen verwandelt werden. Ist die Flüssigkeit leicht flüchtig, so kann das Gläschen schon während des Aufsteigens springen und durch das in das Vakuum geschleuderte Quecksilber das Rohr zertrümmern. Dies wird dadurch verhindert, daß man während des Aufsteigens die Glasröhre so weit neigt, daß das Quecksilber oben fest anliegt!

Nun umgibt man das Meßrohr mit dem Heizmantel (Fig.) und erwärmt durch einen geeigneten Dampfstrom zu einer Temperatur, die mindestens etwa 10^0 über derjenigen liegen soll, bei welcher die ganze Flüssigkeit gerade verdampft ist. Für nicht schwer flüchtige Körper genügt Wasserdampf. Es bedeute

m das Gewicht der verdampften Substanz in gr,

t, v Temperatur und Volumen des Dampfes in ccm; ist v_0 das Volumen der dampfgefüllten Glasröhre bei 18^0, so ist $v = v_0\,[1 + 0{,}000025\,(t - 18)]$ zu setzen,

b den äußeren Barometerstand,

h die Höhe der Quecksilbersäule, über welcher der Dampf sich befindet; b und h auf 0^0 reduziert (**37**),

e die Dampfspannung des Quecksilbers bei t^0 (Tab. 15); vgl. noch die Bemerkung unten.

Dann ist
$$d = \frac{m}{v}\,\frac{760}{b-h-e}\,\frac{1+\alpha t}{0{,}001293}.$$

Denn m/v ist das auf Wasser bezogene sp. Gewicht des Dampfes. Um die auf Luft von gl. Temp. u. gl. Druck bezogene Dampfdichte d zu finden, hat man also m/v zu dividieren durch das zum Druck $p = b - h - e$ und zu t gehörige spez. Gewicht der Luft $\frac{b-h-e}{760}\,\frac{0{,}001293}{1+\alpha t}$.

Um die träge Bildung des schweren Quecksilberdampfes zu beschleunigen ist eine seitliche Ausbauchung des oberen Endes des Barometerrohres zweckmäßig, in welcher beim Umstürzen ein Quecksilbertropfen liegen bleibt (Ramsay u. Steele, l. c. unten).

Genaue Bestimmungen. Um die Abweichung des Dampfes vom idealen (**18**) Gaszustand zu eliminieren, beobachtet man das Dampfvolumen v bei mehreren Drucken p. Der unvollkommene Gaszustand äußert sich darin, daß pv, anstatt konstant zu sein, mit abnehmendem Drucke etwas steigt. Man stellt nun pv über p als Abszisse graphisch dar (**6**) und extrapoliert die Kurve auf den Anfangspunkt ($p = 0$). Geradlinige Extrapolation aus zwei Werten genügt nach Reinganum im allgemeinen. — Vgl. be-

sonders Ramsay u. Steele, ZS f. physik. Ch. 44, 348. 1903, wo eine Anordnung für genaue Messungen beschrieben wird. Ferner Reinganum, 48, 697. 1904; Verh. D. Phys. Ges. 1905, 75.

Über ein instrumentell einfaches Verfahren, bei welchem anstatt des Volumens der Druck des Dampfes in einem geschlossenen Raum bestimmt wird, s. Blackman, ZS f. ph. Ch. 63, 48 u. 635. 1908.

C. Durch Luftverdrängung (V. Meyer 1878).

Das Dampfvolumen einer gewogenen kleinen Menge der Substanz wird aus der bei der Verdampfung verdrängten Luftmenge ermittelt.

Ein Glas-, oder für hohe Temperatur Porzellan (Iridium, Zirkon)-Kölbchen mit Steigrohr und einem engen, etwa 1 mm weiten Gas-Entbindungsrohre (Fig.), gut ausgetrocknet, mit etwas Asbest am Boden, wird — im Luftbade, oder im Dampfbade von Wasser, Anilin (184°), Benzophenon (306°), Schwefel (445°)[1]), oder auch in Paraffin (bis über 300°), Salpetergemisch (230 bis 600°), Blei (über 330°) etc. (Tab. 11 u. 12; auch 8, 27) — verstöpselt auf die erforderliche Temperatur oberhalb des Siedepunktes der Substanz gebracht. Man wartet, bis die Temperatur konstant geworden ist, d. h. bis aus dem Entbindungsrohre unter Wasser keine Luftblasen mehr entweichen.

Die Substanz hat man, wenn nötig, in ein Körbchen oder Glasröhrchen, oder wenn sie flüssig ist, in ein Fläschchen oder ein ganz gefülltes, zugeschmolzenes Glaskügelchen (welches durch die Ausdehnung der Substanz springt) eingewogen. Man lüftet den Kork, wirft rasch die Substanz in den Kolben und schließt die Öffnung sofort wieder. Alsdann schiebt man über das Gasentbindungsrohr einen mit Wasser gefüllten Meßcylinder, fängt in ihm die Luft auf, welche durch die verdampfende Substanz verdrängt wird, und liest ihr Volumen v ab.

(Vor Abstellen der Heizung das Rohr aus dem Wasser nehmen oder den Kork lüften!)

Bequemer als der Kork, bei welchem man sehr rasch verfahren muß, ist ein über das Verdampfungsrohr gestülpter kurzer, gut schließender Kautschukschlauch, in den ein vorn zugeblasenes (Fig.) oder, damit man bei zufälliger Temperaturerniedrigung das Eintreten von Wasser in das Rohr vermeiden kann, durch einen Hahn verschließbares Glasröhrchen gesteckt ist. In das letztere hat man den einzuwerfenden Körper gebracht und läßt ihn im geeigneten Zeitpunkt durch Aufrichten des

1) Über Abhängigkeit vom Druck vgl. 40 im Eingang u. Tab. 12.

Röhrchens hinunterfallen. Oder man hält den Körper mit einem luftdicht von der Seite eingeführten Stäbchen, durch dessen Zurückziehen man ihn hinunterfallen läßt (zweite Fig.).

Es ist wesentlich, daß der Vorgang in kurzer Zeit verläuft, damit u. a. kein Dampf in die kälteren Teile des Rohres gelangt, wo er sich kondensiert und das Volumen zu klein finden läßt. Daher soll die Temperatur des Bades beträchtlich über dem Siedepunkte der Substanz liegen. (Länger dauernde Luftentbindung kann eine Zersetzung der Substanz anzeigen.) — Es sei

m die eingebrachte Substanzmenge in gr,

v in ccm das, bei der Temperatur t des Zimmers unter dem Drucke H mm Quecksilber von 0^0 gemessene Luftvolumen.

Dann ist die gesuchte Dampfdichte

$$d = \frac{m}{v}\,\frac{760}{H}\,\frac{1+0{,}004t}{0{,}001293} = 587800\,\frac{m}{Hv}(1+0{,}004t).$$

Der Dampf hat nämlich eine Luftmenge verdrängt, welche unter gleichen Verhältnissen das gleiche Volumen besaß. Folglich gibt das Dampfgewicht m, geteilt durch das Gewicht dieser Luftmenge, die gesuchte Dampfdichte. Die gemessene Luft aber wiegt $v\,\frac{0{,}001293}{1+0{,}004t}\,\frac{H}{760}$, wonach man den obigen Ausdruck erhält. Der Faktor 0,004 ist anstatt des Ausd.-Koeff. 0,00367 genommen, um der Luftfeuchtigkeit Rechnung zu tragen. Er entspricht in gewöhnlicher Temperatur ungefähr der Annahme, daß die Luft im Kolben zweidrittel gesättigt, diejenige, welche über dem Wasser gemessen wird, ganz gesättigt ist.

Der Druck H ist gleich dem Barometerstande b, vermindert um die in Quecksilber umgewandelte Druckhöhe h der Wassersäule unter der Luft: $H = b - \frac{1}{13{,}6}h$. Taucht man bei der Ablesung das Meßrohr bis zur Gleichstellung der inneren und äußeren Oberfläche in das Wasser, so ist $H = b$.

Behufs genauer Bestimmung und Rechnung hätte man noch das Volumen v' des etwa mit eingeworfenen Fläschchens zu berücksichtigen. War ferner der Kolben vorher mit trockener Luft gefüllt worden, so rechnet man hinreichend genau

$$d = \frac{587800}{v/(1+\alpha t) + v'/(1+\alpha t')}\,\frac{m}{H-e}.$$

e bedeutet die Spannkraft des Wasserdampfes bei der Temperatur t (Tab. 13), t' die Heiztemperatur des Bades, die nur genähert bekannt zu sein braucht. α ist $= 0{,}00367$.

Vgl. V. Meyer, Ber. D. Chem. Ges. 1878, S. 2253; 1879, 610 u. 1112.

Dissoziierte Dämpfe unterliegen der unter Umständen beträchtlichen Fehlerquelle, daß in dem Diffusionsgebiet gegen die Luft ihr Dissoziationsgrad, der mit verminderter Dichtigkeit des Dampfes wächst, ein anderer ist als in dem untersten Raume.

Über eine Anordnung, um mit vermindertem Druck zu arbeiten, s. z. B. Eijkmann, Ber. d. D. Ch. Ges. 1889, S. 2754; Lunge u. Neuberg, ib. 1891 S. 729. — Auch Erdmann, ZS f. anorg. Ch. 32, 425. 1902; nach vorgängiger Beobachtung an einem Körper von bekannter Dampfdichte wird nur das Ablesen einer Druckänderung erfordert. — Eine verwandte Methode auch bei Haupt, ZS f. physik. Ch. 48, 713. 1904. — Über Messungen in sehr hoher Temp. s. u. a. V. Meyer, pyrochem. Unters., Brschw. 1885; ZS f. ph. Ch. 1, 145. 1887; Nernst, ZS f. Elektroch. 1903, 622.

D. Durch Metallverdrängung.

Der verdampfende abgewogene Körper (vgl. B und C) verdrängt eine Flüssigkeit, welche selbst eine geringe Dampfspannung besitzt (in niederer Temperatur Quecksilber, Hofmann, vgl. Tab. 15; in höherer Temperatur Wood'sches Metall (8, 12a), V. Meyer, Ber. d. D. Chem. Ges. 1876, 1216; 1877, 2068). Es bedeute

m das Gewicht der verdampfenden Substanz,

M, s und M', s' das Gewicht bez. das sp. Gewicht des Metalls vor und bei der Verdrängung,

t die Zimmer-, ϑ die Bad-Temperatur (siedender Schwefel 445°),

β den Ausd.-Koeffizienten des Gefäßes,

b den Barometerstand,

h die Druckhöhe des flüssigen Metalls im anderen Schenkel.

Man berechnet die Dampfdichte

$$d = \frac{m}{\frac{M}{s}[1+3\beta(\vartheta-t)] - \frac{M'}{s'}} \cdot \frac{760(1+0{,}00367\vartheta)}{\left(b+\frac{hs'}{13{,}56}\right)0{,}001293}.$$

Den letzten Faktor siehe in Tab. 6. — Die sp. Gewichte sind bei t

für Quecksilber	13,60 $(1-0{,}00018\,t)$
für Wood'sches Metall	9,6 $(1-0{,}00009\,t)$.

E. Durch Absorption.

Das Gewicht eines bei bekanntem Druck und bekannter Temp. gemessenen Dampfvolumens wird bestimmt, indem man den Dampf von gekühlter Holzkohle (8, 24) absorbieren läßt. Dewar u. Jones, Proc. R. Soc. A 80, 229. 1908.

F. Aus der Schallgeschwindigkeit.

Vgl. hierüber 56 IV; über eine besondere Form Wachsmuth, Ann. d. Ph. Boltzmann-Band 923, 1904.

20. Gasdichte-Bestimmung.

Die Gasdichte soll, wie im vorigen die Dampfdichte, auf Luft von gl. Temp. u. gl. Druck bezogen werden. Für die Umrechnungen kommen die Gasgesetze von 18 in Betracht. — Über Herstellung einiger Gase und deren Trocknen s. 8, 3.

A. Durch Wägung.

Um die Dichte eines permanenten Gases zu bestimmen, füllt man mit ihm einen Glasballon mit angeschmolzenem Glasrohr (am bequemsten mit Hahnverschluß), etwa indem man den Ballon zunächst mit Quecksilber füllt, ihn über einer Quecksilberwanne umstürzt und nun das Quecksilber durch das aufsteigende Gas verdrängen läßt. Der Ballon wird, wenn das Quecksilber innen und außen gleich hoch steht, d. h. unter Atmosphärendruck, geschlossen und gewogen (m'). Dann wird das Gas durch einen hinreichenden Luftstrom (Luft des Wagezimmers, nicht getrocknet) verdrängt und der Ballon offen gewogen (m). Endlich habe die Wägung mit Wasser [oder Quecksilber] das Gewicht M ergeben. Wie in **19** A sollen b und t den Barometerstand und die Temperatur im Augenblick des Abschließens des Gases bedeuten, t' und b' gelten für die Wägung des mit Gas gefüllten Ballons.

Die Gasdichte d berechnet sich nach der Formel I oder genauer II in **19** A.

Eine bei der Füllung etwa zurückgebliebene Quecksilbermenge läßt man bei allen Wägungen ungeändert.

Füllt und wägt man bei gleichen Tempp. und Drucken, so gilt bei Wasserfüllung

$$d = \frac{m' - m}{M - m} \frac{1}{\lambda} + 1 .$$

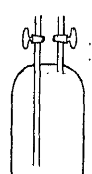
Atmosphärische Schwankungen lassen sich auch dadurch eliminieren, daß man als Hauptgegengewicht für den Ballon ein ebenso großes geschlossenes Gefäß nimmt; man vermeide dabei aber Überlegungsfehler.

Hält der Ballon einseitigen Atmosphärendruck aus, so kann er vor der Gasfüllung mit der Quecksilberluftpumpe (8, 24) evakuiert werden. Sein Volumen v bei der Gasfüllung habe sich durch Temperatur oder Luftdruckskompression (Rayleigh) bei der Leerwägung (m_0) in v_0, bei der Gaswägung (m') in v' geändert, dann ist

$$d = \frac{m' - m_0}{\lambda v} + \frac{\lambda'}{\lambda} \frac{v'}{v} - \frac{\lambda_0}{\lambda} \frac{v_0}{v} .$$

λ_0 und λ' bedeuten das spez. Gewicht der Luft bei der Leerwägung und der Gaswägung (**18**). λ gilt für trockene Luft bei dem Druck und der Temperatur des eingefüllten Gases; Tab. 6.

Verfügt man über eine hinreichend große Menge des Gases, so kann man auch ein Glaskölbchen mit zwei Ansatzrohren (oder das Pyknometer, vierte Fig. S. 67) verwenden, aus welchem man die Luft durch einen anhaltenden Gasstrom verdrängen läßt; ist das Gas schwerer als Luft, so füllt man durch das lange Rohr, und umgekehrt. — Für eine genäherte Bestimmung kann ein enghalsiges Fläschchen oder Kölbchen von 100 bis 200 ccm genügen. Je nachdem das Gas schwerer oder leichter ist als Luft, füllt man



das aufrecht oder verkehrt stehende Fläschchen durch ein bis an den Boden reichendes enges Röhrchen und verschließt endlich, indem man das Rohr langsam herauszieht, mit einem Kautschukstöpselchen. Handerwärmung ist zu vermeiden, und wegen der Diffusion muß man nun rasch wägen. Über die Berechnung s. S. 83.

Über genauere Messungen s. besonders Regnault in Relat. des Exp. etc. I, oder Mém. de l'Acad. 21. 1847; Rayleigh, Proc. R. S. 53, 134. 1893; Morley, ZS f. phys. Ch. 20, 68. 1896; Leduc, Ann. chim. phys. (7) 15, 1. 1898; Guye, Arch. sc. ph. 24, 34. 1907.

Verdrängungsmethoden mit Titrieren, z. B. für Halogene, bei Vict. Meyer, Pyrochem. Unterss., Braunschw. 1885.

B. Aus der Ausströmezeit (Bunsen).

Gasdichten verhalten sich nahe umgekehrt wie die Quadrate der Ausströmungsgeschwindigkeiten, mit denen die Gase unter gleichem Druck aus enger Wandöffnung austreten. Vergleicht man also die Zeit, welcher eine bestimmte Gasmenge zum Ausströmen bedarf, mit der Zeit, welche ein gleiches Luftvolumen unter denselben Bedingungen braucht, so gibt das Zeitverhältnis, ins Quadrat erhoben, die Gasdichte.

Der Glascylinder (Fig.) mit Hahn, oben durch einen Schliff mit aufgeschmolzenem dünnen Blech mit ganz feiner Öffnung verschließbar, wird über Quecksilber (8, 1) mit trockener, durch ein Wattefilter staubfrei gemachter Luft, bez. mit dem zu bestimmenden Gas gefüllt. Fehlt die in der Figur hierfür vorgesehene Spitzenbohrung des Absperrhahnes, so benutzt man, nach Entfernung des Schliffes, die obere Öffnung. Das Gas wird durch einen angesetzten Kautschukschlauch eingeführt. Läßt der Cylinder sich bis an den Hahn in das Quecksilber eintauchen, so füllt man, während man den Cylinder langsam hebt. Andernfalls zieht man ihn so weit heraus, daß das Quecksilber seinen unteren Rand noch eben abschließt, und leitet nun das Gas so lange durch, bis es die Luft verdrängt hat, was aber ein unsicheres Verfahren ist, weil bei dem Entweichen der Gasblasen leicht etwas Luft in den Cylinder zurückschlägt.

Nun taucht man den Cylinder so tief, und zwar bei allen Versuchen gleich tief, in das Quecksilber ein, daß der Schwimmer (Fig.) unsichtbar wird, und öffnet den Hahn. Den Gasstand, welchen das undurchsichtige Quecksilber nicht direkt ablesen läßt, beobachtet man mittels des Schwimmers, der von dem Quecksilber im Cylinder getragen

wird und zwei gut sichtbare Marken hat, eine am oberen Ende, die andere einige cm über dem unteren Ende. Man beobachtet die Zeitpunkte, wann diese Marken eben aus der Quecksilberoberfläche austreten. Ein dicht über der unteren Marke befindliches Zeichen soll auf ihren Austritt vorbereiten.

Beispiel.	Luft	Kohlensäure
Austritt der oberen Marke um	14,3 sec	42,5 sec
„ „ unteren „ „	51,2 „	1 min. 27,8 „
Dauer =	36,9 sec	45,3 sec

Also Kohlensäure, auf Luft bezogen, $d = (45{,}3/36{,}9)^2 = 1{,}507$. Auf Sauerstoff = 32 bezogen, d. h. (vgl. S. 82) Molekulargewicht $= 1{,}507 \cdot 28{,}98 = 43{,}7$ (statt $CO_2 = 44$ berechnet).

Akustische Methoden s. 56 IV.

Raummessung.

21. Längenmessung.

I. Strichmaßstab.

Als Material für bessere Maßstäbe kommen in Betracht, nach abnehmender Wärmeausdehnung geordnet (Tab. 11; über Temperatur s. S. 96), Messing, Silber (besonders als Einlage), Neusilber, Stahl, Platiniridium, Glas, Nickelstahl (Invar), für kurze Teilungen Quarz.

Nach zunehmender Brauchbarkeit bezüglich hygroskopischer Längenänderung in der Faserrichtung ordnen sich die gebräuchlichen Hölzer: Pappel, Eiche, Mahagoni, Buche, Kiefer, Linde, Ahorn, Fichte. Die Änderungen durch die gewöhnlichen Luftfeuchte-Schwankungen liegen hier zwischen etwa 8/10000 und 1/10000. Elfenbein wird stark beeinflußt. Ganz unbrauchbar ist Nußbaum. Paraffinieren der Hölzer hilft nicht viel. Besser schützt Überziehen oder noch vollkommener Tränken mit Schellack. Vgl. Hildebrand, Wied. Ann. 34, 397. 1888.

1. Freie Ablesung. Die gewöhnlichsten, aus der Parallaxe stammenden Fehler werden dadurch vermieden, daß man die Teilung mit dem Objekt zusammenfallen läßt, wozu u. a. oft ein durchsichtiger Maßstab genügt. Andernfalls sichert man das Senkrechtsehen zur Teilung durch einen mit ihr parallelen Spiegel, indem man das Spiegelbild des beobachtenden Auges in den abzulesenden Punkt bringt. Oder man hält durch Visieren nach einem fernen Punkt eine konstante Sehrichtung inne. Am sichersten liest man mittels eines zur Teilung senkrecht blickenden Fernrohrs oder schwachen Mikroskops mit Parallelverschiebung ab.

2. Komparator. a) Längs eines festen Maßstabes verschiebt sich ein Schlitten mit Mikroskop, welches man folgeweise auf beide Enden der zu messenden Länge einstellt. Die Parallelverschiebung muß um so genauer verbürgt sein, je weiter der zu messende Gegenstand von der Teilung des Maßstabes abliegt.

Aus einem Kathetometer läßt sich mittels Ersatz des Fernrohrs durch ein Mikroskop ein solcher Komparator herstellen, wenn man den Maßstab abnehmen und in ein geeignetes horizontales Gestell einklemmen kann.

b) Es wird mit einem in sich verschiebbaren Maßstabe die zu messende Länge fest verbunden und jeder ihrer

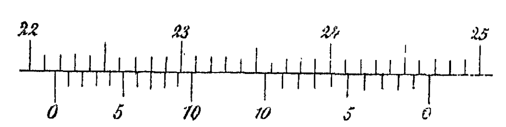
Endpunkte folgeweise unter dasselbe feststehende Mikroskop gebracht. Ein zweites festes Mikroskop liest gleichzeitig auf dem Maßstabe die Verschiebung ab.

Fehler aus unvollkommener geradliniger Führung werden am sichersten vermieden, wenn die zu messende Länge mit dem Maßstabe nicht seitlich, sondern in seiner Fortsetzung verbunden ist.

Z. B. Komparator von Abbe; Pulfrich, ZS f. Instr. 1892, 307.

c) Einwandsfrei ist auch das Auswechseln des Objekts gegen einen Normalmaßstab. Als Komparator dient entweder, wie unter a) der Maßstab mit Schlittenverschiebung eines Mikroskopes, oder ein Paar von Mikroskopen, von denen mindestens eines mit Okularmikrometer versehen ist, welche auf einer Schiene verschoben und festgeklemmt werden können. — Transversalkomparator heißt das Instrument, wenn die Auswechslung von Objekt und Maßstab bequem mittels einer Führung geschieht.

Überschüsse über ganze Teilstriche des Maßstabes können in allen Fällen durch Okularmikrometer von bekanntem Teilwert in den Mikroskopen (vgl. unten) bestimmt werden. Im Falle a) auch mit dem am Schlitten befindlichen Nonius.



Nonien, die auf Zehntel geteilt sind, haben entweder 9/10 oder 11/10 des Intervalles der Haupt-Teilung als Einheit. Beide gezeichnete Nonien zeigen die Einstellung 0,7 p an. — An Zehntel-mm-Nonien lassen sich leicht aus der Lage von Nachbarstrichen auch die Hundertel schätzen.

Bei einer feineren Messung mit Anwendung eines Nonius übersehe man nicht, erstens, daß der Nonius selbst geprüft sein muß, zweitens, daß man aus der etwaigen Fehlertabelle des Maßstabes den Fehler desjenigen Striches zu nehmen hat, an welchem die Noniusteilung einsteht.

Den Horizontalabstand zweier Punkte kann man mittels zweier von ihnen herabhängender Kokonfäden mit angehängten Gewichten messen, die, um Schwankungen zu vermeiden, in ruhiges Wasser tauchen mögen. Ebenso mißt man den Durchmesser eines horizontal gelegten Cylinders.

Einen Komparator für Abstände beliebiger Neigung s. bei F. Braun, Wied. Ann. 41, 627. 1890.

3. Teilmaschine. Diese kann zur Messung, besonders auch von kleineren Längen dienen, wenn an dem Schlitten ein Mikroskop mit Fadenkreuz sitzt. Den Wert eines Schraubenganges bestimmt man auf einem Strichmaßstabe. Wegen des toten Ganges stellt man immer von derselben Seite ein.

Über die Bestimmung der fortschreitenden und periodischen Schraubenfehler s. Bessel's Methode in Weinstein, Maßbestimmungen II, 290; Thiesen, Scheel u. Sell, ZS f. Instr. 1896, S. 328.

4. Mikroskop. Für sehr kleine Längen wird am besten ein Mikroskop mit „Okularmikrometer" angewandt. Mit einem als Objekt untergelegten Glasmikrometer von bekanntem Werte wird zuerst der Teilwert des Okularmikrometers bestimmt und dann in leicht ersichtlicher Weise verfahren. Das Okularmikrometer kann selbst aus einer Glasteilung bestehen oder aus einem mit Mikrometerschraube beweglichen Faden oder Fadenpaar. An der Trommel wird die Verschiebung abgelesen.

Man beachte, daß konstante Mikroskopvergrößerung eine ungeänderte Stellung des Okularmikrometers gegen das Objektiv voraussetzt, so daß auch die Einstellung immer für dieselbe Sehweite, z. B. stets mit oder stets ohne Brille, geschehen muß. Bei dem Ramsden'schen Okular, unter welchem das Mikrometer feststeht, ist dies nicht nötig.

5. Prüfung eines Strichmaßstabes. Besitzt man einen schon verifizierten Maßstab[1]), so ist die Aufgabe, für einen anderen Stab eine Korrektionstabelle aufzustellen, oben bereits erledigt. — Andernfalls vergleicht man die angeblich gleichen Strecken des Maßstabes mit einer und derselben Länge a und bestimmt dadurch ihr gegenseitiges Verhältnis. Die unter Nr. 2 erwähnten Komparatoren liefern das Mittel für genaue derartige Messungen. Die Länge L enthalte n Unterabteilungen $a_1 a_2 \ldots a_n$, deren Einzellängen $a_1 = a + \delta_1$, $a_2 = a + \delta_2$ etc. bis $a_n = a + \delta_n$ gefunden werden; bezeichnet man dann das Mittel der Unterschiede $(\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n)/n = \delta$, so ist

$$a_1 = L/n - \delta + \delta_1 \qquad a_2 = L/n - \delta + \delta_2 \text{ etc.}$$

Um die bei einer großen Zahl von Vergleichungen sich häufenden Fehler zu vermeiden, wird man sowohl größere wie kleinere Strecken vergleichen, z. B. bei einem in mm geteilten Stabe alle dm, alle cm und alle mm; die letzteren wohl nach

1) Durch Vermittelung der Normal-Eichungskommissionen sind geprüfte Maßstäbe zu beziehen.

Nr. 4. Jede größere Abteilung wird bei der Rechnung ihren Unterabteilungen gegenüber zunächst als Ganzes behandelt.

Die Korrektionen zweier gleichartiger Maßstäbe lassen sich durch Aneinanderlegen und mikroskopisches Bestimmen der Unterschiede korrespondierender Striche in den verschiedenen Intervallen ermitteln. Vgl. Leman, Wiss. Abh. Norm.-Eich.-K. Heft VI. 1906.

Genaue Methoden u. a.: Thiesen, Carl Rep. 15, 680. 1879; Wiss. Abh. d. P. T. Reichsanst. II, 97. 1895; Benoît, Trav. et Mém. du Bur. internat. des poids et mes. II, pag. C 35 ff.; Pernet, ib. IV, pag. B 87. 1885.

6. Herstellung von Strichmaßen. Die gewöhnliche Teilmaschine benutzt den auf einer Schraube von bekannter Ganghöhe verschiebbaren Schlitten mit Reißerwerk. Wegen des „toten Ganges" stelle man vor jedem Strichziehen immer von derselben Seite ein. Zu Holz, Elfenbein und weichem Metall dient der Stahlstichel, sonst der Diamant. Für feine Glasteilung mit dem Diamant wird Strichziehen unter Wasser empfohlen. — Meistens überzieht man das Glas warm mit einer dünnen Wachsschicht (am besten: eintauchen in weißes, in einer Röhre mittels Wasserdampf geschmolzenes Wachs, und rasch herausziehen), in welche nach dem Erkalten die Teilung eingetragen wird. Die Striche ätzt man glatt mittels Flußsäurelösung oder „Diamanttinte", die man mit dem Pinsel aufträgt, oder matt durch Dämpfe von Flußsäure (aus Flußspatpulver und Schwefelsäure) in einem Bleitroge. Andere Glasflächen, ferner die Augen und Schleimhäute, sind vor den Dämpfen zu schützen.

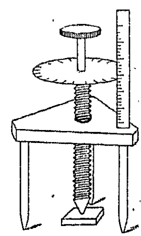
Nach Bunsen kopiert man Teilungen von einem Originalmaßstabe mittels einer langen Stange mit zwei Spitzen. Das Original und der zu teilende Stab werden in dieselbe gerade Linie festgelegt; die eine Spitze wird in die Teilstriche gesetzt, mit der anderen zieht man kurze Striche.

II. Kontaktmaßstäbe.

Den gegenseitigen Abstand zweier Endflächen eines Körpers mißt man, mit geringerer oder größerer Genauigkeit, z. B. mittels der unter dem Namen Schustermaß, Fühlhebel, Kontaktschraube käuflichen Längen- und Dickenmesser. Man achte auf die Richtigkeit ihres Nullpunktes, bez. bringe die notwendige Korrektion an.

Einen genauen Dickenmesser nach Abbe s. ZS f. Instr. 1892, 310.

7. Sphärometer. Zu feinen Dickenmessungen dient die Schraube im Sphärometer; die Höhe des Schraubenganges ist zunächst die Längeneinheit. Das in der Figur dargestellte einfachste Sphärometer wird zuerst mit seinen drei Füßen auf eine ebene Unterlage gesetzt (etwa auf eine Spiegelglasplatte, deren Vorderfläche auf große Entfernung unverzerrte Spiegelbilder gibt), wobei man die Mittelschraube gerade



bis zur Berührung einstellt (vgl. unten). Diese Stellung wird abgelesen: die Bruchteile des Schraubenganges auf der mit der Schraube drehbaren geteilten Kreisscheibe, die Ganzen durch Zählen der Umgänge oder an dem Maßstäbchen, an welchem diese Scheibe nahe vorbeistreift.

Dann dreht man die Schraube zurück, zur Sicherheit die Umdrehungen abzählend, legt den Körper unter, dessen Dicke gemessen werden soll, stellt die Schraube wieder zur Berührung ein, liest ab und nimmt die Differenz gegen die erste Einstellung; Drahtdicken u. dgl. werden zwischen Schneiden oder Platten gemessen. — Um die Dicke in mm zu haben, ist diese Differenz mit der angegebenen oder anderweitig ermittelten Höhe eines Schraubenganges (s. unten) zu multiplizieren.

Daß die Schraubenspitze gerade berührt, beurteilt man danach, daß das Instrument dann um die verstellbare Spitze zu wackeln beginnt und sich leicht auf ihr drehen läßt. — Ein sehr feines optisches Erkennungsmittel gewähren die Newtonschen Interferenzstreifen. Man legt nämlich zwischen Spitze und Unterlage noch eine Glasplatte, deren obere Fläche jetzt die Ausgangsebene darstellt. Unter der Glasplatte entstehen dann diese Streifen, besonders bei der Beleuchtung mit einer Natriumflamme deutlich sichtbar, und die eintretende Berührung wird scharf wahrnehmbar durch die zugleich eintretende Verschiebung der Interferenzstreifen.

An Stelle der ebenen Platte dient als konstante Einstellungshöhe auch wohl ein Fühlhebel oder ein Fühlniveau oberhalb der Schraube. Man stellt stets auf denselben Teilstrich des Zeigers oder auf dasselbe Einspielen der Libellenblase ein.

Die Höhe des Schraubenganges wird mit einem Körper von bekannter Dicke oder nach I 2 oder 3 bestimmt. — Über die Messung eines Krümmungshalbmessers s. **66** I. Feinere Konstruktionen von Sphärometern nach Mayer und Bamberg s. z. B. bei Czapski, ZS f. Inst. 1887, 297.

8. Der Kontaktkomparator für Vergleichung größerer Endmaße hat ebenfalls Fühlhebel und Fühlniveau, eventuell in Verbindung mit einer Mikrometerschraube. Die Messungsmethoden sind im Prinzip einfach.

S. auch die Dickenmessung durch Lichtinterferenz **65** IV.

Korrektionen. 9. Temperatur. Hat man mit einem Maßstabe von der Normaltemperatur t_0 und vom Ausdehnungskoeffizienten β_0 (**44** u.

Tab. 11) bei der Temperatur t eine scheinbare Länge l gefunden, so ist die wahre Länge $= l[1 + \beta_0(t - t_0)]$.

10. Durchbiegung. Die Länge der Axe eines Stabes ändert sich durch mäßige Durchbiegungen nur wenig; die Abstände von Punkten außerhalb der Axe können dadurch aber in leicht ersichtlicher Weise vergrößert oder verkleinert werden. Es empfiehlt sich im allgemeinen, einen Maßstab, wenn er in horizontaler Lage gebraucht wird, in zwei Querschnitten zu stützen, die je um 2/9 der Länge von den Enden abstehen. Auch die Aufbewahrung geschieht so am besten. — Normalmaßstäben gibt man einer H-Form ähnliche Querschnitte und teilt in der Axe.

Über hölzerne Maßstäbe und Luftfeuchte vgl. oben.

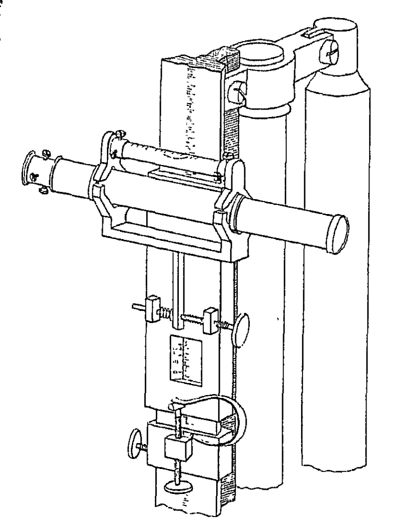
Messung einer Fläche von unregelmäßiger Gestalt. Außer dem Amsler'schen Planimeter (Mechaniker Coradi, Zürich) sei das leicht herzustellende Stabschneidenplanimeter von Prytz genannt; vgl. Hammer, ZS f. Instr. 1895, 90; auch 1902, 221; 1908, 247. — Als Hausmittel sei ferner erwähnt das Ausschneiden und Abwägen der Fläche in Karton, dessen Gewicht pro Flächeneinheit (qdm) bestimmt ist.

Über Ausmessung körperlicher Gebilde mittels Stereometerkamera s. z. B. Pulfrich, ZS f. Instr. 1908, 117.

Winkelmessung in **25, 30a, 60, 61, 70.**

22. Kathetometer (Dulong und Petit 1816).

Das Kathetometer mißt Vertikalabstände, z. B. Druckhöhen. Ein horizontales, um die Vertikale drehbares Fernrohr ist mittels Schlitten am vertikalen Maßstabe verschiebbar. Auf große Entfernungen ist das Kathetometer wegen der ungenauen Einstellung, wegen der Krümmung des Maßstabes und wegen der Fehler durch Schwankungen mit Vorsicht, unter beständiger Beachtung der Fernrohrlibelle (6, f. S.) anzuwenden.



Mit zwei Schlittenmikroskopen kann man auf die Endpunkte der zu messenden Höhe und einen daneben gestellten Maßstab nacheinander einstellen; vgl. **21** I, 2c.

Die Justierung des Instruments geschieht folgendermaßen.

1. Das Fernrohr ist um seine Sehrichtung drehbar: das Fadenkreuz wird so gestellt, daß bei dieser Drehung der anvisierte Punkt sich nicht gegen das Fadenkreuz verschiebt.

2. Daß die beiden Lagercylinder des Fernrohrs gleich dick sind, wird mit der aufzusetzenden Libelle geprüft, welche dieselbe Einstellung zeigen muß, wenn man das Fernrohr in seinen Lagern umlegt und die Libelle in ihrer alten Lage wieder aufsetzt.

3. Die Drehaxe des Kathetometers wird vertikal gemacht, indem man die Fußschrauben so reguliert, daß die Libelle des Instruments bei der Drehung eine konstante Einstellung gegen ihre Teilung ergibt. Über die Reihenfolge bei der Einstellung der Fußschrauben und das Justieren der Libelle selbst vgl. **30a.**

4. Die vertikale Stellung des Maßstabes wird hinreichend genau mit einem Senkel erkannt, bez. danach reguliert.

5. Die horizontale Richtung der Fernrohraxe erkennt man, da nach Nr. 1 die Sehaxe mit der geometrischen Axe übereinstimmt, und wenn nach Nr. 2 die beiden Lagercylinder des Rohres gleich dick sind, mit der Fernrohrlibelle, die bei dem Umsetzen die frühere Einstellung der Blase auf ihrer Teilung zeigen muß. Oder auch, da nach Nr. 3 die Drehaxe vertikal ist: man visiert einen Punkt an, dreht das Instrument um 180^0 und legt das Fernrohr um; dann muß der vorher anvisierte Punkt dieselbe Höhe gegen das Fadenkreuz zeigen.

6. Daß der Schlitten und das Fernrohr wirklich die vorausgesetzte Parallelverschiebung haben, erkennt man an der konstanten Einstellung der Libelle oder an einem vertikal gerichteten Kollimator (d. h. einem Fadenkreuz mit vorgesetzter Linse), dessen Bild dem Fernrohr mittels eines kleinen totalreflektierenden Prismas seitlich zugeführt wird. Eventuell hat man entweder vor jeder Einstellung die Lage des Fernrohres auf denselben Stand der Libellenblase, bez. auf Koinzidenz mit dem Kollimator zu korrigieren, oder man mißt noch einmal mit umgelegtem Fernrohr und um 180^0 gedrehtem Instrument und nimmt aus beiden Ablesungen das Mittel. Je weiter entfernt die zu messende Höhe, desto sorgfältiger ist dies zu beachten.

22a. Ophthalmometer (Helmholtz 1853).

Das Instrument dient zur Messung kleiner Abstände. Es besteht aus zwei gleich dicken, dicht nebeneinander vor den Objektivhälften eines Fernrohres befindlichen Glasplatten, welche sich um eine gemeinsame Axe gleichzeitig um gleiche Winkel, aber gegeneinander drehen lassen. Die

Größe der Drehung wird an Teilkreisen abgelesen. In der Nullpunktsstellung liegen beide Platten in der zur Sehlinie senkrechten Ebene.

Man stellt auf die beiden Punkte, deren gegenseitiger Abstand gemessen werden soll, gleichzeitig ein, indem man durch Drehung der Glasplatten die beiden durch die Lichtbrechung in den schrägen Gläsern abgelenkten Bilder zum Zusammenfallen bringt. Der Abstand des Objekts vom Instrument ist ohne Einfluß.

Ist α der Drehungswinkel aus der Nullstellung,
a die Dicke der Platten,
n das Lichtbrechungsverhältnis der Gläser,
so berechnet man den Abstand e der beiden Punkte

$$e = a(2 \sin\alpha - \sin 2\alpha / \sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}).$$

Beweis: s. Fig. Es ist $AB = a/\cos\beta$;
$\frac{1}{2}e = AB \sin(\alpha - \beta) = a(\sin\alpha - \operatorname{tg}\beta \cos\alpha)$.
Ferner $\sin\beta = (1/n)\cdot\sin\alpha$, also

$$\operatorname{tg}\beta\cos\alpha = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}} = \frac{1}{2}\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}.$$

Hieraus ergibt sich e.

Die Konstanten a und n des Ophthalmometers kann man einzeln direkt an den herausgenommenen Glasplatten bestimmen (**21**, insbesondere **21** 7, bez. **62** und **63** II). — Oder man stellt auf einige Abstände einer mm-Teilung ein, mindestens natürlich auf zwei. Wenn auf mehrere, so ermittelt man a und n mit kleinsten Quadraten (**3** III bis V).

Da das Instrument oft eine unvollkommene Symmetrie zeigt, so messe man zweimal mit entgegengesetzten Neigungen der Glasplatten und mittele die beobachteten α.

Etwas umständlich wird also die Konstantenbestimmung. Oft wird es genügen, zuerst eine bekannte Teilung (in $\frac{1}{2}$ mm) durchzubeobachten und dann eine Kurve der beobachteten Drehungen als Abszissen und der Längen als Ordinaten (**6**) zu benutzen. Bei diesem Verfahren hält man sich am einfachsten stets an die Drehungen in einem bestimmten Sinn.

23. Volummessung. Kalibrierung durch Auswägen.

Siehe auch Dichtigkeit (**15**, **16**) und Volumenometer (**17**).

Als Volumeinheit gilt hier das Kubikcentimeter („Milliliter") in dem Sinne, daß es genau 1 gr Wasser von 4° faßt; selbstverständlich im leeren Raum gewogen oder hierauf umgerechnet. Geometrisch ausgemessen wird das ccm um 0,000028 ccm kleiner; vgl. S. 52.

Käufliche ältere Meßgefäße sind oft sehr unrichtig. Verbreitet ist noch das „Mohr'sche" ccm, von dem scheinbaren Gewicht des Wassers von 15° in Luft abgeleitet. Dabei wird das Liter gegen richtiges Maß um 1,9 ccm zu groß. Die jetzt käuflichen geeichten Hohlmaße sind nach richtig definiertem Maße geteilt.

Das Volumen einer Flüssigkeit, die in der Luft das Gewicht m gr zeigt, beträgt in ccm
$$v = \frac{m}{s}\left(1 + \frac{\lambda}{s} - \frac{\lambda}{\sigma}\right),$$
wo s, σ und λ die Dichtigkeit der Flüssigkeit, der Gewichtstücke und der Luft (0,0012; **18** und Tab. 4 und 6) bedeuten; s. auch **13** und Tab. 1.

Man kalibriert fast ausschließlich mit Wasser oder Quecksilber. Bei der Temperatur der Messung habe Wasser die Dichtigkeit Q (Tab. 4). Ein mit Messinggewichten ($\sigma = 8{,}4$) in Luft gewogenes scheinbares Gramm hat dann das Volumen $\frac{1}{Q}\left(1 + \frac{0{,}0012}{Q} - \frac{0{,}0012}{8{,}4}\right)$ ccm, wofür merklich genau geschrieben werden kann (vgl. S. 76) $(2{,}00106 - Q)$ ccm. Ein scheinbares Gramm Wasser von 18° hat das Volumen 1,00244 ccm.

Zur Bequemlichkeit findet man für die Ausmessung eines Gefäße von gewöhnlicher Glassorte im zweiten Teil von Tab. 4 die Volumina auch bei anderen Temperaturen, und zwar bereits so korrigiert, daß sie für das Volumen des Gefäßes bei 18° gelten.

Temperatur. Das Volumen v bei der Temp. t eines Gefäßes vom linearen Ausd.-Koeff. β (**44**, Tab. 11) beträgt bei t' $v' = v[1 + 3\beta(t' - t)]$. Für gewöhnliches Glas im Mittel $3\beta = 1/40000$.

Hohlmaße können entweder für Trockenfüllung oder für Ausguß bestimmt und geprüft sein. Ersteres ist das genauere. Im letzteren Falle rechnet man natürlich das Gewicht des benetzten Gefäßes ab. Sorgfältig konstante Behandlung bezüglich der Art und Dauer des Abtropfens oder Ausblasens ist nötig, wenn dieser Gebrauch genaue Resultate geben soll.

Der Einfluß des Meniskus (vgl. auch **58** I) wird eliminiert, indem man immer in gleicher Weise abliest, und zwar in der Regel in der den Meniskus berührenden Horizontalebene. Das zur Vermeidung der Parallaxe notwendige Visieren in einer und derselben Richtung wird durch ein Fernrohr erreicht, welches an einer vertikalen Stange verschiebbar ist; einfacher dadurch, daß man stets einen und denselben fernen Punkt als Augenpunkt nimmt, oder endlich mit einem Streifchen Spiegelglas (**21** 1).

Kalibrierung eines geteilten Rohres mit Quecksilber. Die konstante und bekannte Quecksilberfüllung eines oben abgeschliffenen, mit einer Platte bedeckten, gegen Erwärmung an einem Stiel gehaltenen kleinen Gefäßes, etwa eines unten geschlossenen Glasröhrchens, wird wiederholt in das zu kalibrierende Gefäß eingegossen und darin der Stand des Quecksilbers jedesmal abgelesen. Der Einfluß des Meniskus läßt sich ermitteln, indem man eine verdünnte Lösung von Sublimat auf das abgelesene Queck-

silber aufgießt, wodurch die Oberfläche sich abflacht. (Bunsen, gasometrische Methoden.)

Pipetten. Der gewöhnliche Gebrauch auf Ausfluß bedarf höchstens des Hinweises, daß die vorausgesetzte konstante Benetzung, die man durch Abtropfen während einer bestimmten Zeit zu erzielen sucht, durch Spuren von Fett sehr beeinträchtigt wird. Genauer ist, falls man den Inhalt durch Nachspülen vollständig herausbringen kann, der Gebrauch auf Trockenfüllung. Zu diesem Zweck eicht man mittels Differenzwägung der getrockneten und der gefüllten Pipette, wobei ein Standgefäß auf der Wage, welches die Pipette und ausfließende Füllung aufnimmt, als Tara mitgewogen wird. — Aus paraffinierten Pipetten fließt auch Wasser usw. trocken aus.

Die genaue Einstellung auf den Teilstrich (Ringmarke) wird am bequemsten durch Erwärmen der Luftsäule unter dem abschließenden Finger mit der anderen Hand erzielt.

Über Volumen des Quecksilbers vgl. **24**; über seine Reinigung 8, 1. — Über die Behandlung von Meßgefäßen, besonders Pipetten u. Büretten, vgl. u. a. Ostwald-Luther, S. 132; Wagner, ZS f. phys. Ch. 28, 193. 1899; F. K. u. Maltby, Wiss. Abh. d. P.-T.-Reichsanst. III, 182. 1900.

24. Kalibrierung einer engen Glasröhre.

Das gereinigte und durch einen Luftstrom gut ausgetrocknete Rohr wird, z. B. durch Eintauchen in reines Quecksilber (8, 1) und Fingerverschluß bei dem Herausheben, mit einem Quecksilberfaden versehen und horizontal über einen Maßstab (mit Spiegel zur Vermeidung der Parallaxe) gelegt. Das Verschieben des Fadens geschieht durch Neigen und Klopfen, oder mittels eines Stückchens Kautschukschlauch am Rohre; man verschließt das Ende des Schlauches mit der einen Hand und kann nun mit der andern Hand durch Luftdruck, oder auch, wenn man den Schlauch vorher gedrückt hatte, durch Saugen, den Faden vor- oder rückwärts bewegen. Auch zum Ansaugen von Fäden mittels eines sauberen Schlauchstückchens am anderen Ende und zum Ändern der Fadenlänge kann die Vorrichtung dienen.

Ist die Röhre nur einseitig offen, so muß, um das Quecksilber einzufüllen oder zu verschieben, die unter ihm befindliche Luft zum Entweichen gebracht werden. Dies bewirkt man leicht dadurch, daß man einen reinen dünnen Eisen- oder besser Platindraht neben dem Quecksilber in das Rohr schiebt. Längs des Drahtes bildet sich von selbst ein Luftkanal.

Um die Röhre in gleiche Volumina abzuteilen, bringt man den Faden in nahe aneinander schließende Lagen und notiert seine Längen, denen dann gleiche Volumina entsprechen. Bei der Einteilung in sehr viele Abschnitte häufen sich die Ablesefehler. Es ist in diesem Falle besser, Beobachtungen mit größeren und kleineren Fäden zu kombinieren. Um z. B. in 25 Teile zu teilen, mag man zuerst mit einem Faden von $^1/_5$ der Rohrlänge

messen und die entstandenen Abschnitte dann mit einem 5 mal kleineren Faden teilen.

Eine Anordnung für nicht zu dünne Kapillaren, mit einer feinen Saugpipette, bei Hulett, ZS f. phys. Ch. 33, 238. 1900.

Die Resultate wird man in einer Tabelle oder durch eine Kurve auf Koordinatenpapier darstellen (**6**) und für zwischenliegende Querschnitte die Werte interpolieren.

Absolutes Kaliber. 1 gr gegen Messing in Luft gewogenes Quecksilber (**13** und **23**) hat bei t^0 das Volumen (ccm) $0{,}073555(1+0{,}000182\,t)$ oder $0{,}073796\,[1+0{,}000182\,(t-18)]$.

Den mittleren Querschnitt q einer gemessenen Strecke vom Volumen v ccm berechnet man, wenn l cm die Länge des Fadens ist, $q=v/l$ qcm; den Halbmesser $r=\sqrt{(q/\pi)}$.

Meniskus. Wegen der Krümmung der Endflächen wird die Quecksilbermenge, also auch der oben bezeichnete Querschnitt, zu klein sein, wenn man l zwischen den Kuppen der Menisken gemessen hat. Unter der für enge Röhren gestatteten Annahme, daß die Endflächen Kugelkappen sind, berechnet man den mittleren Querschnitt aus den Höhen h und h' beider Menisken

$$q=\frac{1}{l-\frac{1}{2}(h+h')}\left[v-\tfrac{1}{6}\pi(h^3+h'^3)\right],$$

also für beiderseits gleiches h $q=\dfrac{v-\frac{1}{3}\pi h^3}{l-h}$, nahe $=\dfrac{v-h^3}{l-h}$.

Für sehr flache Menisken verschwindet der Einfluß von h^3.

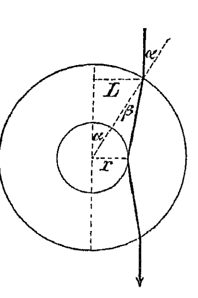
Unter mittleren Verhältnissen wird die Korrektion, die von der zwischen den Kuppen gemessenen Länge l abzurechnen ist, in engen Röhren etwa $0{,}4\,h$ für jeden Meniskus betragen.

Über Kalibrieren mit Quecksilberfäden s. auch **41** u. **95** b.

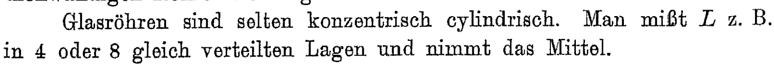
Querschnitt aus der Wägung eines Rohres. Hat ein Kreisrohr vom äußeren Durchmesser R, der Länge l und dem spezifischen Gewicht s der Rohrsubstanz das Gewicht m, so ist der innere Querschnitt $=R^2\pi-m/ls$. Für dünnwandige Röhren ist dieses Verfahren brauchbar. s bestimmt man oder setzt für gewöhnliches Glas $s=2{,}5$.

Optische Bestimmung des inneren Durchmessers. Man beleuchtet das aufrecht gestellte Rohr durchfallend mit einer schmalen Flamme, am besten mit Natriumlicht (**59**). Die Reflexion an dem inneren Cylinder läßt dessen Ränder als zwei feine Lichtlinien erscheinen, deren scheinbarer gegenseitiger Abstand mit dem Ophthalmometer (**22a**) oder, auf einen dicht vorgestellten Maßstab projiziert, mit einem Fernrohr gemessen, $=2L$ sei. Der äußere Rohrdurchmesser, der gleich mit bestimmt

werden kann, sei $= 2R$. Es besteht dann, wenn n das Lichtbrechungsverhältnis des Glases ist, die Beziehung
$$r = \frac{L}{n}\sqrt{1 + \frac{(L-r)^2}{R^2 - L^2}}.$$
Folgt aus $n = \sin\alpha : \sin\beta$ $\quad \sin\alpha = L/R$
und $\sin\beta : \sin(90 - \alpha) = r : \sqrt{R^2 - L^2 + (L-r)^2}$.



Anstatt die Gleichung nach r aufzulösen, kann man als erste Näherung $r = L/n$ setzen, hiermit einen zweiten Näherungswert berechnen usf. Bei nicht zu dickwandigen Röhren konvergiert das Verfahren rasch.



Glasröhren sind selten konzentrisch cylindrisch. Man mißt L z. B. in 4 oder 8 gleich verteilten Lagen und nimmt das Mittel.

n_{Na} beträgt für Jenaer Glas XVI 1,5268, für Glas 59 1,497.

Ist r bekannt, so kann man umgekehrt auch n bestimmen.

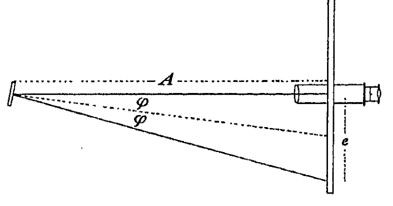
Aus der kapillaren Steighöhe. Steigt eine Flüssigkeit vom spez. Gewichte s und der Kapillarkonstante α (Wasser 7,6, Alkohol 2,4 $\frac{\text{mg}}{\text{mm}}$) in dem gut benetzten Rohre um die Höhe H an, so ist der Halbmesser an der Stelle des Meniskus $r = 2\alpha/(Hs)$. Vgl. 58.

Auf 1^0 wächst ein Querschnitt gewöhnlichen Glases um $\frac{1}{60000}$.

25. Winkelmessung mit Spiegel und Skale (Poggendorff 1827).

Die Spiegelmethode zur Messung kleiner Drehungen, neben der Einfachheit der Hilfsmittel eine unbegrenzte Empfindlichkeit bietend, findet beinahe in jedem Gebiet Anwendung. Sie darf als die bedeutendste Grundlage moderner physikalischer Messungen bezeichnet werden.

Mit dem sich drehenden Körper ist ein der Drehaxe paralleler Spiegel verbunden. Nahe der Ebene, die von der sich drehenden Spiegelnormale beschrieben wird, befindet sich, gewöhnlich in $\frac{1}{2}$ bis 5 m Abstand eine, meistens in mm geteilte Skale. Entweder beobachtet man deren reflektiertes Bild in einem auf den Spiegel gerichteten Fernrohr mit Fadenkreuz (Fig.), oder es wird



von einer Lichtquelle auf den Spiegel Licht geworfen, welches nach der Reflexion ein Bild auf der Skale erzeugt, das sich durch die Drehung verschiebt. Meist gibt man der Skale bez. dem Fernrohr oder der Lichtquelle die Stellung, in welcher bei nicht abgelenktem Spiegel nahezu der Fußpunkt des von dem Spiegel auf die Skale gefällten Perpendikels im Fadenkreuz erscheint

oder von dem Lichtbildchen getroffen wird. Dieser Punkt soll der mittlere Skalenteil heißen. Man findet ihn mit einem rechten Winkel, den man an die Skale so anlegt, daß die Visierlinie längs des anderen Schenkels den Spiegel trifft. — Daß Fernrohr oder Lichtquelle zur Skale symmetrisch stehen, ist unnötig.

Einstellung von Fernrohr und Skale. Man stellt etwa von vornherein das Fernrohr durch Verschieben des Okularrohres genähert auf die richtige Sehweite ein, d. h. auf die doppelte Entfernung der Skale vom Spiegel. Dann gibt man ihm, während das Rohr nach dem Spiegel gerichtet ist, die Stellung, bei welcher das dicht neben dem mittleren Skalenteil visierende Auge das Objektiv des Fernrohres oder das neben dem Fernrohr visierende Auge den mittleren Skalenteil im Spiegel sieht. Alsdann wird das Bild der Skale, wenn es nicht bereits im Gesichtsfelde ist, durch eine kleine Drehung darin erscheinen. Schließlich werden die feineren Einstellungen vorgenommen.

Zu diesen gehört das Deutlichsehen von Skale und Fadenkreuz. Zuerst wird das Fadenkreuz durch eigene Verschiebung oder durch Verstellen des zwischen ihm und dem Auge befindlichen Okularglases auf richtige Sehweite gebracht, dann das ganze Okularrohr verschoben, bis Skale und Fadenkreuz keine Parallaxe zeigen, d. h. bei seitlichem Bewegen des Auges vor dem Okular sich nicht gegeneinander verschieben.

Wechseln bei zusammenhängenden Ablesungen Beobachter von verschiedener Sehweite, so soll ein jeder das deutliche Bild nur durch Verstellen des zwischen Auge und Fadenkreuz befindlichen Teiles des Okulars hervorbringen. Jedes Ablesefernrohr soll also das Akkommodieren des Auges auf das Fadenkreuz durch leicht verschiebbare oder verschraubbare Linsen vor dem Fadenkreuz gestatten.

Ein terrestrisches Fernrohr läßt sich durch Herausnehmen des terrestrischen Okulars den für Skalenablesungen verlangten kleinen Sehweiten anpassen. — Ein Faden oder ein Fadenkreuz (Spinnefaden; sehr feiner Glas- oder Quarzfaden; zwischen den Fingern ausgezogener Canadabalsam läßt sich direkt aufkleben) findet auf der Okularblende Platz.

Eine über das Okular gehängte Papierblende macht das ermüdende Schließen des nicht beobachtenden Auges unnötig.

Ein Winkelspiegel, bestehend aus zwei unter nahe 90° in der Horizontalen zusammenstoßenden Planspiegeln, bietet dem einfachen Spiegel gegenüber den Vorteil, daß das Bild bei Erschütterungen nicht nickt. Northrup, Phys. Rev. 24, 222. 1907; ZS f. Instr. 1907, 167.

Objektive Beobachtung. Man läßt das Licht von einer scharf markierten Lichtquelle (Spalt; Faden vor einer Flamme; elektrische Glühlampe mit geradem Faden) durch eine Linse auf den Spiegel und von da auf die Skale fallen. Um ein objektives Bild zu geben, muß die Lichtquelle jedenfalls außerhalb des

Brennpunktes der Linse stehen. Die richtige Stellung, bei der ein deutliches objektives Bild der Marke auf der Skale entsteht, probiert man aus, wobei auch die gute Zentrierung der Linse (**67**) zu beachten ist. Ein Hohlspiegel anstatt des Planspiegels läßt die Projektionslinse ersparen. Soll in diesem Falle die Lichtquelle denselben Abstand vom Spiegel haben wie die Skale, so ist dieser Abstand gleich dem Krümmungshalbmesser (**66**) oder der doppelten Brennweite des Spiegels zu wählen.

Über Versilbern von Glasspiegeln s. 8, 6.

Reduktion der Skalenablesung auf den Winkel und seine Funktionen.

Wir nehmen an, daß die Skaleneinstellung im nicht abgelenkten Spiegel mit dem Fußpunkt der Senkrechten von dem Spiegel auf die Skale (dem „mittleren" Skalenteil) nahe zusammenfällt. Skalenausschlag heiße die Differenz e des beobachteten Skalenteils gegen diese Ruhelage.

Vorausgesetzt werde zunächst, daß der Spiegel zur Drehaxe nahe parallel ist und daß das Fernrohr (oder bei objektiver Beobachtung die Lichtquelle), also auch die Skale, der Drehungsebene der Spiegelnormale nahe liegt. Ob es dagegen dem mittleren Skalenteil nahe liegt, hat keine Bedeutung.

1. Für kleine Ablenkungen ist der Ausschlagswinkel φ dem Skalenausschlage proportional. Und zwar wird, wenn A den zur Drehaxe senkrecht gemessenen Abstand der spiegelnden Fläche von der Skale, ausgedrückt in Skalenteilen, bedeutet, der Bogenwert eines Skalenteiles gefunden: in absolutem Maße (Anh. 3) $= 1/(2A)$; in Bogengraden usw.:

$$= 28^0{,}648/A = 1718'{,}9/A = 103132''/A.$$

Ferner ist

$$\sin\varphi = \operatorname{tg}\varphi = e/(2A).$$

2. Für größere Ablenkungen gelten, wenn $e/A = p$, die Reihen

$$\varphi = 28^0{,}648\, p\left(1 - \tfrac{1}{3}p^2 + \tfrac{1}{5}p^4 \cdot\cdot\right); \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{p}{2}\left(1 - \tfrac{1}{4}p^2 + \tfrac{1}{8}p^4 \cdot\cdot\right)$$

$$\sin\varphi = \frac{p}{2}\left(1 - \tfrac{3}{8}p^2 + \tfrac{31}{128}p^4 \cdot\cdot\right); \qquad \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{p}{4}\left(1 - \tfrac{11}{32}p^2 + \tfrac{431}{2048}p^4 \cdot\cdot\right).$$

Bis zu Ablenkungen von 6^0 wird meistens das erste Korrektionsglied genügen. Man reduziert hiernach einen Skalenausschlag e auf eine dem Bogen, der Tangente, dem Sinus, dem Sinus des halben Winkels proportionale Größe, indem man $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$ oder $\frac{11}{32} \cdot e^3/A^2$ von e abzieht.

Aus Tab. 28 lassen sich die Korrektionen für einen bestimmten Skalenabstand entnehmen oder interpolieren. Zum Gebrauch ist eine graphische Darstellung (6) bequem. — Ausführliche Reduktionstafeln von Czermak, Berlin 1890; auch Kurven von Schweitzer, Zürich 1901.

3. Für beliebig große Ablenkungen ist an gerader Skale

$$\operatorname{tg} 2\varphi = e/A \quad \text{oder} \quad \varphi = \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(e/A).$$

Die Formeln Nr. 3 folgen aus Fig. S. 103, die anderen aus den Reihenentwickelungen in Tab. 50a für φ, tg φ usw.

Messung eines Skalenabstandes. Die Messung bis auf etwa ± 1 mm mit Bandmaß, mit einem Draht, den man nachher vergleicht, oder mit zwei Maßstäben, die man aneinander gleiten läßt, ist einfach. Genauer mißt man mit zwei Kontaktmaßstäbchen, von denen man den einen mit dem Spiegel, den anderen mit der Skale in Berührung bringt. Von den Maßstäbchen senkelt man, wenn ein Horizontalabstand zu messen ist, mit feinen Drähten vor einem hinreichend langen Maßstab oder auf zwei Punkte des Fußbodens, deren Abstand genau gemessen werden kann.

Papierskalen ändern ihre Länge mit der Zeit merklich; mm-Skalen auf Milchglas (z. B. von Hartmann & Braun) sind wohl die besten.

Korrektionen wegen verschiedener Umstände.

a) Wegen Deckglasdicke. Liegt in dem Wege der Lichtstrahlen eine feste Glasplatte von der Dicke d und dem Brechungsverhältnis n, so hat man von dem gemessenen Skalenabstand abzuziehen $d \cdot (n-1)/n$, also für gewöhnliches Glas nahe $\frac{1}{3}d$. (Vgl. **62** 1.)

b) Wegen Spiegeldicke. Der von der Vorderfläche eines rückwärts belegten Glasspiegels bis zur Skale gemessene Abstand A ist zu vermehren, nicht um die ganze Dicke δ, sondern nur um die optische Dicke δ/n des Spiegels, also nahe um $\frac{2}{3}\delta$. Ist die Glasdicke der Messung mit dem Maßstabe unzugänglich, so kann man diese „optische Dicke" auch mit dem Mikroskop als den halben Abstand eines Punktes auf der Vorderfläche von seinem Bilde in der spiegelnden Fläche bestimmen. Vgl. **62** 3.

c) Wegen Spiegelneigung. Die Vertikalebene der Skale werde getroffen von der Spiegelnormale in der Höhe N, von der durch den Spiegel gelegten Horizontalen in der Höhe H, von der Visierlinie in der Höhe F. Dann ist der gemessene Horizontalabstand A_0 der Skale vom Spiegel zu korrigieren um $+(N-H)(N-F)/A_0$.

d) Wegen Spiegelkrümmung. Ist ein nicht ebener Ablesespiegel in der Entfernung a von der Drehaxe angebracht, so muß der gemessene Skalenabstand A_0 für Konkavspiegel vermehrt, für Konvexspiegel vermindert werden um $A_0 a/r$, wenn r den Krümmungshalbmesser des Spiegels (**66** III) bedeutet. Da die Spiegel sich schon durch das Fassen leicht etwas verziehen, so kann diese Korrektion für stark exzentrische Spiegel beträchtlich werden.

Vgl. F. K., Wied. Ann. 31, 95. 1887; ausführliches bei Holman, Technology quarterly, Sept. 1898.

26. Ableitung der Ruhelage aus Schwingungen.

Der Skalenteil, auf den ein schwingender Zeiger oder Spiegel sich einstellen würde, wenn er in Ruhe wäre, die Ruhelage oder Gleichgewichtslage, läßt sich aus dem schwingenden Zustande auf folgende Weisen ableiten.

1. Umkehrbeobachtungen. Bei schwacher Dämpfung findet sich die Ruhelage z. B. aus je drei aufeinander folgenden Umkehrpunkten, indem das arithmetische Mittel aus Nr. 1 und 3 mit Nr. 2 zum Mittel vereinigt wird. — Oder man beobachtet eine beliebige ungerade Zahl von Umkehrpunkten, nimmt einerseits aus Nr. 1, 3, 5 . ., andererseits aus Nr. 2, 4 . . das Mittel und vereinigt beide Werte zum Hauptmittel. Vgl. z. B. **10** II. — Bei raschen Schwingungen mag man etwa je zwei überschlagen.

2. Standbeobachtungen. Wenn die Dämpfung unmerklich und die Bewegung so langsam ist, daß man in jedem Augenblick genau ablesen kann, so gibt das arithmetische Mittel aus zwei beliebigen, um die Zeit der Schwingungsdauer auseinander liegenden Ablesungen die Ruhelage.

3. Stärker gedämpfte Schwingungen (Multiplikator oder Kupferdämpfer um eine Magnetnadel usw.; Luftdämpfer). Aus zwei um die Schwingungsdauer auseinander liegenden Ablesungen p_1 und p_2, z. B. aus zwei Umkehrpunkten, findet sich die Ruhelage p_0, wenn k das Dämpfungsverhältnis ist (vgl. **27** und das Beispiel daselbst),

$$p_0 = p_2 + (p_1 - p_2)/(1 + k).$$

Über das Verfahren bei unsymmetrischen Schwingungen vgl. Richarz u. P. Schulze, Ann. d. Ph. 8, 348. 1902; Schulze ib. 8, 714; 12, 893. 1903.

Einen zum Anregen oder Beruhigen einer Magnetnadel dienenden Magnet stellt man nach dem Gebrauch hinreichend entfernt in der Höhe der Nadel vertikal auf.

27. Dämpfung und logarithmisches Dekrement.

Die Dämpfung entspringt aus Widerstandskräften, die in der Regel und wie im folgenden vorausgesetzt wird, der Geschwindigkeit proportional sind. In diesem Falle gilt der Satz (**108**), daß kleine Bogen in geometrischer Reihe abnehmen. Das konstante Verhältnis k eines Schwingungsbogens zu dem folgenden heißt Dämpfungsverhältnis und $\lambda = \log k$ das logarithmische Dekrement (Gaufs). — Eine genaue Kenntnis dieser Größen ist für manche magnetische und elektrische Messungen von Bedeutung, wo die Dämpfung schwingender Magnete oder Stromspulen von den, durch die Bewegung in benachbarten Leitern oder in ihnen selbst induzierten Strömen stammt; vgl. z. B. **94**, **114** IV, **116**.

Man erregt (etwa durch einen elektrischen Strom oder einen Magnet) Schwingungen und beobachtet eine Reihe von Umkehrpunkten. Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Umkehrpunkte, bei größeren mit dem Spiegel beobachteten Schwingungen

nach **25** auf Bogenwert korrigiert, gibt den Bogen. Ist a_p die Größe des $p$ten, a_q die des $q$ten Bogens, so gilt

$$k = \left(\frac{a_p}{a_q}\right)^{\frac{1}{q-p}} \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{\log a_p - \log a_q}{q-p}.$$

Aus einer Reihe (am besten einer ungeraden Zahl) von Umkehrpunkten wird die Dämpfung so hergeleitet, wie das folgende Beispiel zeigt; e ist die Entfernung des Umkehrpunktes vom mittleren Skalenteil (hier 500). Der Skalenabstand betrug 2600 Sk.-T., also die Korrektion der Ausschläge auf Bogenwert $\frac{1}{3}e^3/2600^2$ (**25**, 2; Tab. 28). Aus Bogen Nr. 1 und 4, 2 und 5 etc. wird λ und k erhalten.

Hinter dem Vertikalstrich ist mit dem Dämpfungsverhältnis $k = 1{,}151$ aus je 2 Umkehrpunkten die Ruhelage (**26** 3) berechnet.

Beobachtete Umk.-Punkte	e	$\frac{e^3}{3 \cdot 2600^2}$	Korrigierte Umk.-Punkte	Bogen a	$\frac{a}{2{,}151}$	Ruhelage.
285,0	215	0,5	285,5			
710,0	210	0,5	709,5	424,0	197,1	512,4
341,2	159	0,2	341,4	368,1	171,1	512,5
662,5	162	0,2	662,3	320,9	149,2	513,1
383,9	116	0,1	384,0	278,3	129,4	513,4
625,7	126	0,1	625,6	241,6	112,3	513,3
415,6	84	0,0	415,6	210,0	97,6	513,2
						512,98

Man erhält aus 1 und 4 $\lambda = \frac{1}{3}(\log 424{,}0 - \log 278{,}3) = 0{,}0610$
" 2 " 5 368,1 241,6 0,0610
" 3 " 6 320,9 210,0 0,0614
Mittel $\lambda = 0{,}0611$; $k = 1{,}151$.

Natürliche Logarithmen, oder Multiplikation der obigen λ mit 2,3026, liefern das „natürliche log. Dekrement".

Über die Theorie und über aperiodische Dämpfung vgl. **108**.

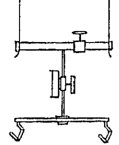
Inkonstanz der Dämpfung. Für größere Schwingungen nimmt ein durch induzierte Ströme bewirktes Dämpfungsverhältnis im allgemeinen etwas ab, und zwar ist diese Abnahme ungefähr dem Quadrate des Schwingungsbogens proportional; ihre, von den Umständen abhängige Größe wird empirisch bestimmt. Vgl. **108**.

Eliminierung fremder Einflüsse. Wird die Dämpfung gesucht, die einem Multiplikator usw. allein, z. B. ohne Luftwiderstand oder ohne die im Rähmchen einer Drehspule induzierten Ströme, zukommt, so beobachtet man sowohl bei geschlossener wie bei unterbrochener Leitung. Das log. Dekrement im letzteren von dem im ersteren Falle abgezogen gibt dasjenige des Multiplikators allein; vgl. dazu noch **94** am Schluß.

27a. Bifilare Aufhängung (Harris, Gaufs).

Anwendungen s. **73** IV, **74** II, **76a** II, **83a**, **84**, **105** II, **114** III.

Ein an zwei Fäden aufgehangener schwerer Körper ist im Gleichgewicht, wenn er die möglichst tiefe Lage hat. Dabei liegen die Fäden in derselben Vertikalebene. Für kleine Drehungen ist das rücktreibende Moment dem Sinus der Ablenkung proportional. Wenn die Länge der Fäden sehr groß gegen ihren Abstand ist, gilt dies auch für größere Ablenkungen.



Die Fäden sind gleich gespannt, wenn der Schwerpunkt des Bifilarkörpers in der mittleren Vertikalen liegt. Probe: durch Heben des Körpers an einem in dieser gelegenen Faden darf seine Neigung sich nicht ändern.

Zur bifilaren Aufhängung eines Körpers ist oft eine Suspension wie Fig. bequem. Das kleine Laufgewicht dient zum Äquilibrieren.

I. Berechnung der Direktionskraft in CGS-Einheiten (Anh. 11a). Es seien e_1 und e_2 der obere und untere Horizontalabstand der beiden Fadenenden und h die mittlere Fadenlänge in cm; laufen die Fäden nicht vertikal, so bedeutet h den mittleren Vertikalabstand der beiden Fadenenden. Endlich sei die Summe der, nahe gleichen, Vertikalspannungen der Fäden $= gm$; m bedeutet die angehängte Masse, vermehrt um die halbe Masse der Fäden in gr und g die Schwere in cm/sec² (nahe 981; vgl. Tab. 43). Die bifilare Direktionskraft der Schwere ist dann $D = gm \cdot \frac{1}{4} e_1 e_2 / h$, und dem Ablenkungswinkel α entspricht ein rücktreibendes Drehmoment $D \sin \alpha$.

Fadensteifheit. Diese wirkt so, als ob die Fäden (Drähte) verkürzt würden. Es sei ϱ ihr Halbmesser und E ihr Elastizitätsmodul in CGS (**52**; Tab. 20). Dann muß man von der gemessenen Länge h abrechnen $\delta = \varrho^2 \sqrt{2\pi \mathsf{E}/gm}$ cm.

Torsionselastizität (**55**). Ist Φ der Torsionsmodul in CGS, so beträgt die elastische Direktionskraft beider Fäden zusammen $\pi \Phi \varrho^4/h$; oder, $\Phi = \frac{2}{5}\mathsf{E}$ angenommen, $\frac{2}{5}\pi \mathsf{E} \varrho^4/h$.

Die gesamte Direktionskraft beträgt also in CGS-Einheiten

$$D = gm \frac{e_1 e_2}{4(h-\delta)} + \frac{2\pi}{5} \mathsf{E} \frac{\varrho^4}{h}.$$

Beispiel. Der Bifilarkörper wog 100 gr, die Drähte zusammen 0,42, also $m = 100{,}21$ gr und $gm = 981 \cdot 100{,}21 = 98300$ cm gr/sec². — Drahtlänge $h = 300$ cm, Dicke $2\varrho = 0{,}01$ cm. — Für Messing (Tab. 20) $\mathsf{E} = 981 \cdot 10^5 \cdot 9000 = 88 \cdot 10^{10}$ CGS, also $\delta = 0{,}005^2 \sqrt{2\pi \cdot 88 \cdot 10^{10}/98300} = 0{,}19$ cm; $h - \delta = 299{,}81$.

Ferner $\frac{2\pi}{5} \mathsf{E} \frac{\varrho^4}{h} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{5} 88 \cdot 10^{10} \cdot \frac{0{,}005^4}{300} = 2{,}3$ cm² gr sec⁻².

Endlich war $e_1 = e_2 = 12{,}00$ cm; also

$$g m \frac{e_1 e_2}{4(h-\delta)} = 981{,}0 \cdot 100{,}21 \frac{12 \cdot 12}{4 \cdot 299{,}81} = 11804 \text{ cm}^2 \text{ gr sec}^{-2}.$$

Die Direktionskraft beträgt danach $D = 11806$ cm² gr sec⁻².

Vgl. F. K., Wied. Ann. 17, 737. 1882.

II. Direktionskraft aus Schwingungsbeobachtungen. Aus dem auf die Drehaxe bezogenen Trägheitsmoment K des Bifilarkörpers und aus der Schwingungsdauer t findet sich (**29**; Anh. 12) $D = \pi^2 \cdot K/t^2$.

Zeitmessungen. Geographische Bestimmungen.

28. Schwingungsdauer.

Schw.-D. eines Pendels, einer Magnetnadel usw. nennt man die Zeit zwischen einer Umkehr und der nächsten auf der Gegenseite. (In der Akustik und Optik heißt die Zeit einer ganzen Periode die Schw.-D.)

Bei langsamen Schwingungen eignet sich die Umkehr nicht zur genauen Zeitbestimmung; man beobachtet vielmehr die Durchgangszeiten durch einen der Gleichgewichtslage benachbarten Ort und berechnet die Umkehrzeiten als arithmetische Mittel aus der vorausgehenden und folgenden Durchgangszeit. Bei Beobachtungen mit Spiegel und Skale markiert man einen der Ruhelage nahegelegenen Teilstrich durch einen kräftigen Faden. Die Zehntelsekunden schätzt man aus dem Verhältnis der Abstände der Marke vom Fadenkreuz bei den Sekundenschlägen, die dem Durchgang vorausgehen und ihm nachfolgen.

Ein Zifferblatt mit kriechendem Sekundenzeiger mag man im Fernrohr sichtbar machen. Vgl. Wood, Wied. Ann. 56, 171. 1895.

Berechnung der Schwingungsdauer. Würde man aus n so beobachteten aufeinander folgenden Schwingungsdauern einfach das Mittel nehmen, so erhielte man dasselbe Resultat, wie wenn man die Differenz der ersten und der letzten Umkehrzeit durch n dividierte. Die zwischenliegenden Beobachtungen wären also nutzlos. Um alle zu verwerten, kann man sie in zwei Hälften teilen, immer aus entsprechenden Nummern der beiden Hälften die Differenzen bilden, hieraus das arithmetische Mittel berechnen und dasselbe durch $\frac{1}{2}n$ dividieren. Über etwaige Rechnung mit kleinsten Quadraten vgl. **3** II.

Durchgang beob. min	sec	Umkehrzeit ber. Nr.	min	sec	Schwingungsdauer		sec
10	3,3						
	16,5	*1.*	10	9,90	aus Nr. *1* und *4*	39,90 : 3	= 13,30
	29,9	*2.*		23,20			
	43,0	*3.*		36,45	*2* und *5*	40,05 : 3	= 13,35
	56,6	*4.*		49,80			
11	9,9	*5.*	11	3,25	*3* und *6*	40,15 : 3	= 13,38
	23,3	*6.*		16,60		Mittel	= 13,34

Vorteilhafter aber kombiniert man einige weiter auseinander liegende Umkehrzeiten, für genaue Ansprüche z. B. folgendermaßen. Es wird zweimal (oder mehrmals) eine gerade Anzahl, z. B. sechs aufeinander folgende Durchgangszeiten durch den markierten Punkt beobachtet. Dann nimmt man in jedem Beobachtungssatz aus je zwei symmetrisch gegen die mittelste Elongation gelegenen Zeiten das arithmetische Mittel und hieraus das Hauptmittel.

Erster Satz.						Zweiter Satz.			
Durchgang.			Mittel.			Durchgang.		Mittel.	
Nr.	min	sec	Nr.	min	sec	min	sec	min	sec
1.	7	40,7				10	10,5		
2.		49,0					18,9		
3.		55,6	*3. 4.*	7	59,80		25,6	10	29,75
4.	8	4,0	*2. 5.*		59,85		33,9		29,75
5.		10,7	*1. 6.*		59,75		40,6		29,70
6.		18,8					48,9		
			Hauptmittel	7	59,80			10	29,73

Die beiden Hauptmittel sind die Zeitpunkte zweier Elongationen so genau, wie sie aus diesen Beobachtungen zu entnehmen sind. Ihr Unterschied (= 149,93 sec), dividiert durch die Anzahl der zwischen ihnen verflossenen Schwingungen, gibt die Schwingungsdauer. — Es ist nicht notwendig, diese Schwingungen gezählt zu haben; man kann die Zahl aus einem Näherungswert der Schwingungsdauer ableiten. Aus den beiden ersten und den beiden letzten Beobachtungen des ersten Satzes finden sich $7^{\text{min}}\ 44{,}8^{\text{sec}}$ und $8^{\text{min}}\ 14{,}7^{\text{sec}}$ als Zeitpunkte, zwischen denen 4 Schwingungen liegen. Danach betrüge die Schwingungsdauer $29{,}9 : 4 = 7{,}47$ sec. Dividiert man nun 7,47 in 149,93, so kommt 20,07; die gesuchte Anzahl von Schwingungen ist also ohne Zweifel 20, die Schwingungsdauer also $149{,}93 : 20 = 7{,}496$ sec. Um über die Anzahl sicher zu sein, beginne man die Beobachtungen immer mit einer bestimmten Richtung, dann weiß man, daß die Zahl eine gerade ist.

Für genaue Messungen beobachtet man eine größere gerade Anzahl $2m$ von Sätzen, kombiniert Nr. 1 mit $m+1$, 2 mit $m+2, \ldots,$ m mit $2m$ und nimmt das Mittel der einzelnen Resultate.

Folgen die Schwingungen zu rasch, um alle Durchgänge zu notieren, so überspringt man immer zwei (allgemein eine gerade Anzahl) Durchgänge, beobachtet also z. B. Nr. 1 4 7 10 13 16.

Übrigens rechnet man wie oben und teilt schließlich das Resultat durch 3.

Kurze Schwingungsdauern von wenigen Sekunden beobachtet man besser in den Umkehrpunkten, und zwar am bequemsten in lauter einseitigen Umkehrpunkten, wobei man nach Bedürfnis überspringen kann.

Die Dauer einer gedämpften Schwingung vom log. Dekrement λ verhält sich zu derjenigen ohne Dämpfung wie $\sqrt{[\pi^2 + (2{,}303\,\lambda)^2]}$ zu π (**108**, Gl. 3; Tab. 29). Nur bei starker Dämpfung wird die Korrektion beträchtlich.

Methode der Koinzidenzen siehe **35**.

Reduktion der Schwingungsdauer auf unendlich kleine Bögen.

Die Schw.-D. einer durch Torsionselastizität getriebenen Masse ist von der Amplitude unabhängig. Häufiger aber ist (Magnetnadel, Pendel) das Drehmoment dem Sinus des Ablenkungswinkels proportional. Dann wächst die Schw.-D. t mit der ganzen Schwingungsweite α nach dem Ausdruck

$$t = t_0 (1 + \tfrac{1}{4} \sin^2 \tfrac{1}{4}\alpha + \tfrac{9}{64} \sin^4 \tfrac{1}{4}\alpha + \cdots).$$

Fast immer sucht man den Grenzwert t_0, welchem die Schwingungsdauer sich annähert, wenn die Schwingungsweite verschwindend klein wird. Über die diesbezügliche Rechnung siehe für große Schwingungen Tab. 27. Da bei kleinen, mit Spiegel beobachteten Amplituden von a Sk.-T. $\tfrac{1}{4} \sin^2 \tfrac{1}{4}\alpha = \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{4}\frac{a}{2A}\right)^2 = \frac{a^2}{256\,A^2}$ zu setzen ist (**25**), wenn A den Skalenabstand in Sk.-T. bezeichnet, so ist, unter Vernachlässigung der 4. Potenz, hier von dem beobachteten t abzuziehen $t \cdot a^2/(256\,A^2)$.

Vermöge der Dämpfung ist die Amplitude nicht konstant. Meist genügt es, in die obigen Formeln das arithmetische Mittel $\mathfrak{a}$ aus dem ersten und dem letzten Bogen einzuführen. Genauer und immer genügend ist, wenn noch die Differenz des ersten und letzten Bogens mit $\mathfrak{d}$ bezeichnet wird, einzusetzen $\mathfrak{a}(1 - \tfrac{1}{24}\mathfrak{d}^2/\mathfrak{a}^2)$.

29. Trägheitsmoment.

Das T.-M. bedeutet für die Drehung dasselbe, wie die Masse für das Fortschreiten. Anwendungen z. B. Pendel, Torsionsmodul, Magnetnadeln, Drehspulen.

Das T.-M. einer punktförmigen Masse m im Abstande l von einer Drehungsaxe ist $l^2 m$. Das T.-M. mehrerer fest miteinander verbundener Punkte oder eines Körpers ist die Summe oder das Integral dieser Ausdrücke, erstreckt über alle Körperelemente. Die Einheit, nach welcher Masse und Länge gemessen sind, wird durch ein der Zahl für das T.-M. beigesetztes [gr·cm²] usw. angegeben. (Vgl. Anhang 12.)

Schwingungsdauer t, Direktionskraft D und Trägheitsmoment K hängen durch die Formel $t^2/\pi^2 = K/D$ zusammen.

I. Berechnung.

Das T.-M. regelmäßig gestalteter, homogener Körper läßt sich durch Rechnung finden. m bedeute immer die Masse des Körpers, K sein T.-M., bezogen auf eine durch den Schwerpunkt gehende Drehaxe.

Dünner Stab von der Länge l oder dünne querschwingende rechteckige Scheibe von einer Seitenlänge l. Bezogen auf die zu l senkrechte Axe ist $K = \frac{1}{12} m l^2$. 1.

Rechtwinkliges Parallelepipedum. a und b seien zwei Kanten. Das T.-M., bezogen auf die zur dritten Kante parallele Axe, ist

$$K = \tfrac{1}{12} m (a^2 + b^2). \quad 2.$$

Cylinder (auch Kreisscheibe) vom Halbmesser r. Es ist, bezogen auf die Axe des Cylinders, $K = \frac{1}{2} m r^2$. 3.

Bezogen auf den Kreisdurchmesser eines Cylinders von der Länge l ist

$$K = m(\tfrac{1}{12} l^2 + \tfrac{1}{4} r^2). \quad 4.$$

Hohlcylinder (auch Ring) von den Halbmessern r_0 und r_1. Bezogen auf die Axe ist $K = \frac{1}{2} m (r_0^2 + r_1^2)$; bezogen auf die zur Axe senkrechte Mittellinie $K = m[\frac{1}{12} l^2 + \frac{1}{4}(r_0^2 + r_1^2)]$. 5.

Kugel vom Halbmesser r. $K = \frac{2}{5} m r^2$. 6.

Hilfssatz. Ist das T.-M. K auf eine durch den Schwerpunkt gelegte Axe bezogen, K' aber auf eine dieser parallele im Abstande a befindliche Axe, so ist $K' = K + m a^2$. 7.
Z. B. ist das T.-M. eines dünnen Stabes, bezogen auf eine zum Stab senkrechte Axe an seinem Ende $= \frac{1}{12} m l^2 + \frac{1}{4} m l^2 = \frac{1}{3} m l^2$.

II. Bestimmung aus der Schwingungsdauer mit und ohne Belastung (Gaufs).

a) Das Verfahren ist anwendbar auf Körper, die mit konstanter Direktionskraft um eine vertikale Axe schwingen, also z. B. auf Magnete. Anderen Körpern kann man durch die Torsionselastizität eines Aufhängedrahtes (Stahl, Platiniridium) eine konstante Direktionskraft geben.

Man beobachtet die Schwingungsdauer t (28), vermehrt dann das gesuchte T.-M. K, ohne die drehenden Kräfte zu ändern, um eine bekannte beträchtliche Größe K_1 und beobachtet wieder die Schw.-D. t'. Dann verhält sich $K:(K + K_1) = t^2 : t'^2$, also ist

$$K = K_1 \cdot t^2/(t'^2 - t^2).$$

Das zugesetzte T.-M. K_1 kann z. B. ein ausgemessener und gewogener Ring sein; Gl. 5. — Oder es besteht aus zwei gleichen Massen (Summe $= m$), die am Schwingungskörper in gleichem Abstande l ihrer Schwerpunkte von der Drehaxe aufgehangen sind. Bedeutet K_0 die Summe der beiden zugefügten T.-M., jedes bezogen auf die Vertikalaxe durch den eigenen Schwerpunkt, so ist nach dem Hilfssatze (Gl. 7) $K_1 = m l^2 + K_0$ einzusetzen

Dies gilt jedoch nur unter der Voraussetzung genau, daß die Massen sich mit drehen, also z. B. bifilar oder auf Spitzen von großer Reibung aufgehängt oder daß sie auf Stifte aufgesteckt sind. Hingen die Massen an einzelnen, so dünnen Fäden, daß sie sich parallel bewegten, so wäre $K_1 = ml^2$ zu setzen.

Allgemeinere Fälle bei Kreichgauer, Wied. Ann. 25, 289. 1885.

l mißt man z. B. als den halben Abstand der Aufhängepunkte der Gewichte voneinander, bei bifilar aufgehangenen Massen als das Mittel der Fadenabstände längs jeder Seite. — Exzentrizität des Schwerpunktes aufgesteckter Gewichte fällt durch Drehen um 180^0 heraus.

Beispiel. Durchmesser der Belastungscylinder 1,00 cm $r = 0{,}50$ cm
Sie wiegen zusammen 50,00 gr $m = 50{,}00$ gr
Abstand ihrer Axen voneinander = 10,026 cm $l = 5{,}013$ cm
Also $K_1 = 50{,}00(5{,}013^2 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}25) = 1262{,}8$ gr·cm².
Die Schw.-D. betrug: unbelastet $t = 9{,}737$, belastet $t' = 14{,}267$ sec. Hieraus folgt $K = 1262{,}8 \cdot 9{,}737^2/(14{,}267^2 - 9{,}737^2) = 1101{,}1$ gr·cm².

b) Brauchbar ist unter Umständen auch die umgekehrte Anordnung, daß ein Schwingungskörper von bekanntem T.-M. K_0 mit dem unbekannten K belastet wird. Steigt hierdurch die Schw.-D. von t_0 auf t, so ist $K = K_0(t^2 - t_0^2)/t_0^2$.

III. Mittels bifilarer Aufhängung.

Eine ausmeßbare Bifilarsuspension (Fig. S. 109) habe leer die nach **27a** berechnete Direktionskraft D_0 und die Schw.-D. t_0. Beide Größen seien D und t, nachdem der Körper vom gesuchten T.-M. K mit zentrierter Drehaxe eingelegt ist. Dann gilt offenbar

$$K = (Dt^2 - D_0 t_0^2)/\pi^2.$$

Über die Beobachtung der raschen Schwingungen s. S. 113.

Ist der Körper magnetisiert, so beobachtet man in den zwei entgegengesetzten Meridianlagen die Schw.-D. t_1 und t_2 und setzt oben ein $t^2 = 2 t_1^2 t_2^2/(t_1^2 + t_2^2)$.

F. K., Wied. Ann. 22, 422. 1884.

29a. Messung sehr kurzer Zeiten.

Man verwendet sehr rasch laufende Uhren mit elektrischer Auslösung und Arretierung; graphische Aufzeichnung auf Flächen, die sich mit bekannter Geschwindigkeit fortschieben; als empfindlichstes Mittel endlich die Verschiebung des Reflexes an einem rotierenden Spiegel.

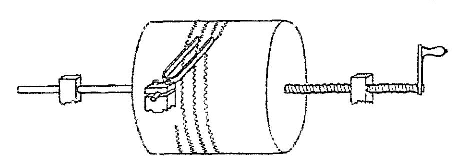
Elektrische Methoden mit dem ballistischen Galvanometer s. **109**.

1. Hipp'sches Chronoskop. Ein Uhrwerk läuft mit seinem raschesten Rad 10mal in 1 sec um. Ein Zeiger wird durch das Unterbrechen eines elektrischen Stromes mit diesem Umlauf verbunden, durch Stromschluß ausgelöst und angehalten.

Bei der Messung einer Schußgeschwindigkeit z. B. zerreißt die Kugel beim Austreten aus dem Lauf einen Leitungsdraht und schließt eine zweite Leitung beim Aufschlagen auf einen fein eingestellten Stoßkontakt. — Eine Fallzeit wird gemessen, indem das Auslösen eines Stromkontakts zugleich das fallende Gewicht auslöst, welches unten einen Stoßkontakt schließt.

Die Zeitverluste zwischen den Vorgängen und ihrer Wirkung auf das Zeigerwerk müssen zu Anfang und zum Schluß gleich sein; durch Regulieren der Stromstärke und einer Spannfeder wird dies bewirkt. Die Angaben des Chronoskops werden kontroliert bez. korrigiert nach den Fallzeiten so schwerer Kugeln (Hartblei, $1\frac{1}{2}$ cm Durchmesser), daß man auf sie während der ersten Zehntel Sekunden das Fallgesetz anwenden darf.

2. Schreibende Stimmgabel usw. Eine an einem tönenden, am besten elektromagnetisch angeregten Körper von bekannter Schwingungszahl (**57**) befestigte leichte, biegsame Spitze schreibt auf eine sich fortbewegende berußte Fläche. Die beiden Ereignisse, deren Zeitabstand zu messen ist, werden neben die entstehende Sinuskurve notiert, z. B. durch eine elektromagnetische Schreibvorrichtung, die durch die Wirkung der Ereignisse auf den Strom bewegt wird; oder durch Induktionsfunken, die von einer, neben der schreibenden Spitze befindlichen Metallspitze durch das berußte Papier auf dessen Unterlage springen und im Ruß eine Marke zurücklassen. — Auch Photographie ist anwendbar. — Siehe auch **57**, 1.



Vgl. z. B. den Siemens'schen Funkenchronograph, Pogg. Ann. 66, 435. 1845.

3. Fallender Körper, Pendel. Die Zeitmarken werden auf einen fallenden vertikalen Maßstab gezeichnet, oder auf einen Kreisbogen, der mit einem Pendel schwingt. Ihr Abstand läßt sich in Zeit umrechnen, da die Geschwindigkeit des Objekts sich aus dem Verhältnis seiner Lage im Augenblick der Messung zu der Ausgangsstellung ergibt; im ersteren Falle als $\sqrt{2gh}$, wenn h die vorher durchlaufene Fallhöhe bedeutet. — Die Lineargeschwindigkeit eines Punktes vom Radius r am Pendel beträgt $2\pi r/\tau \cdot \sqrt{\sin^2 \frac{1}{2}A - \sin^2 \frac{1}{2}\alpha}$, wenn τ die Schwingungsdauer, A der Winkel, aus dem es losgelassen wurde, und α der augenblickliche Ablenkungswinkel ist.

Siehe auch **109**, Pendelunterbrecher.

4. Rotierende Trommel. Ähnlich wie unter 2. Es wird die anderweitig gemessene Umlaufsgeschwindigkeit zugrunde gelegt.

Man beachte auch die, im Kymograph, Sphygmograph, Photochronograph usw., fein ausgearbeiteten physiologischen Methoden, u. a. von Marey.

5. Rotierender Spiegel. Die Umlaufzeit sei τ, die Drehung beträgt dann in der Zeit t den absolut gemessenen Winkel $\alpha = t \cdot 2\pi/\tau$. Das Bild eines um A vor dem Spiegel liegenden Objekts verschiebt sich bei der Drehung α um $\alpha \cdot 2A$, in der Zeit t also um $l = 4\pi A t/\tau$. Wird l gemessen, z. B. mittels eines um A hinter dem Spiegel liegenden Maßstabes, so ist also $t = \frac{1}{4\pi}\frac{l}{A}\tau$. Dieselbe Formel gibt die Zeit zwischen zwei Ereignissen, die an demselben Ort aufeinander folgen und im Spiegel gesehen um l auseinanderliegen. Ist z. B. $A = 2000$ mm, $\tau = \frac{1}{100}$ sec, $l = 1$ mm, so wird $t = \frac{1}{2500000}$ sec. Der Fehler der Längenmessung kann leicht < 1 mm gemacht, ferner A vergrößert, τ erheblich verkleinert werden, so daß kurze Zeiten auf viel weniger als 10^{-7} sec genau zu bestimmen sind.

In vielen Fällen kann man durch einen mit dem Instrument bewegten elektrischen Kontakt bewirken, daß die Ereignisse eintreten, wenn der Mechanismus die richtige Stellung hat. — Akustische Schwingungen, z. B. von Flammen, lassen sich mit langsamer, Oszillationen in einem elektrischen Entladungsfunken mit schneller Rotation sichtbar und meßbar machen. Zum Photographieren werden die Bilder mittels einer Linse oder besser dadurch, daß man einen Hohlspiegel rotieren läßt, objektiv auf der lichtempfindlichen Platte entworfen; um mehrere Bilder zu erhalten, wird die Platte parallel der rotierenden Axe bewegt. Über elektrische Schwingungen vgl. besonders Diesselhorst, Verh. D. Phys. Ges. 1908, 306.

Über Umlaufzähler (Gyrometer, Tachometer) s. **57**, 7 u. **119** V. — Über gleichmäßigen Lauf s. auch 8 Nr. 26.

6. In besonderen Fällen können sehr kleine Zeiträume (bis 10^{-8} sec) durch den in der gesuchten Zeit zurückgelegten Weg eines Lichtstrahls bestimmt werden; Abraham u. Lemoine, Ann. chim. phys. 20, 264. 1900, vgl. auch James, Ann. d. Ph. 15, 954. 1904.

30. Einige astronomische Bezeichnungen.

Vgl. die Fig. folg. S.

1. Zur Bestimmung des Ortes eines Gestirns dienen folgende Begriffe.

Azimut A: Bogen des Horizonts vom Südpunkte des Meridians zum Vertikalkreise des Gestirns (Winkel zwischen Vertikalkreis und Meridian).

Höhe h: Bogen des Vertikalkreises vom Horizont zum Gestirn.

Deklinations- oder Stundenkreise: Größte Kreise durch den Himmelspol.

Stundenwinkel t: Bogen des Himmelsäquators von dem Südpunkt des Meridians zum Deklinationskreis des Gestirns.

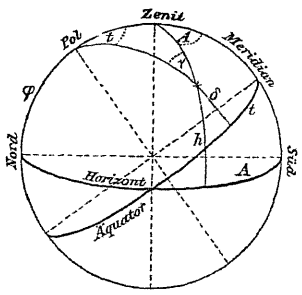
Deklination δ: Bogen des Deklinationskreises vom Äquator zum Gestirn.

Kulmination: Durchgang durch den Meridian eines Ortes.

Polhöhe φ: Geographische Breite eines Ortes.

Parallaktischer Winkel γ: Winkel zwischen Deklinationskreis und Vertikalkreis des Gestirns.

Aus dem sphärischen Dreieck von den Seiten $90 - \delta$, $90 - h$, $90 - \varphi$
und den Winkeln $180 - A$, t, γ
folgen u. a. die Gleichungen:



1. $\sin\delta = \sin\varphi \sin h - \cos\varphi \cos h \cdot \cos A$
2. $\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cdot \cos t$
3. $\cos h \sin A = \cos\delta \sin t$
4. $\cos h \cos A = -\cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cdot \cos t$
5. $\sin t \operatorname{ctg} A = -\cos\varphi \operatorname{tg}\delta + \sin\varphi \cos t.$

Frühlingspunkt: Aufsteigender Knoten der Ekliptik.

Rektaszension eines Gestirns α: Bogen des Äquators vom Frühlingspunkt zum Deklinationskreise des Gestirns. Der Äquator wird dabei in 24^h oder in 360^0 geteilt. Die Rektaszension rechnet man der täglichen Bewegung entgegen.

Die übrigen Bögen des Äquators oder des Horizontes zählen im Sinne der täglichen Bewegung.

Die Örter einiger Hauptsterne s. in Tab. 49.

2. Zur Zeitbestimmung werden die Bezeichnungen gebraucht:

Sternzeit z: Bogen des Himmelsäquators vom Südpunkt des Meridians zum Frühlingspunkt, den ganzen Äquator zu 24 Stunden gerechnet.

Sterntag: Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Kulminationen eines Fixsterns. 1 mittl. Tag = 1,002738 Sterntag = 1 Sterntag + 235,9 mittl. Sekunden.

Der Sterntag beginnt mit dem Durchgange des Frühlingspunktes durch den Meridian. Ein Gestirn passiert also den Meridian (es kulminiert) in dem Augenblick, wann seine Rektaszension gleich der Sternzeit ist. Allgemein: Die Sternzeit z ist = Stundenwinkel t + Rektaszension α eines Gestirnes, also $t = z - \alpha$.

„Wahrer" oder scheinbarer Mittag der Ortszeit: Durchgangszeit des Sonnenmittelpunktes durch den Meridian.

Sonnenzeit: Stundenwinkel der Sonne.

Zeitgleichung: Mittlere Ortszeit minus Sonnenzeit.

Bei der jetzigen Rechnung nach „Einheitszeit", welche sich auf einen Meridian von der östl. geogr. Länge l_0 Grad bezieht (15^0 für Mittel-Europa), ist für einen Ort von der östl. geogr. Länge l Grad die mittlere Ortszeit = Einheitszeit + $4(l - l_0)$ min.

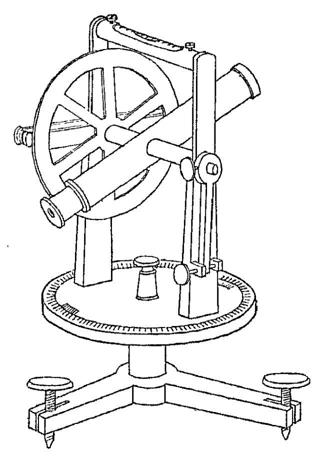
Der astronomische Sonnentag beginnt um Mittag, wird von 0 bis 24^h gezählt und führt das Datum des Tages, an dem er beginnt.

Über Deklination der Sonne, Sternzeit und Zeitgleichung s. Tab. 45.

Ausführlichere Tafeln im Nautischen Jahrbuch, dem Berliner astr. Jahrb. oder dem Nautical Almanac; auch in Bremiker's Logarithmen. Weitere oder genauere Methoden s. u. a. Brünnow, sphär. Astronomie; Jordan, Zeit- und Ortsbestimmung; Wislicenus, geogr. Ortsbestimmungen; Marcuse, Handb. d. geogr. Ortsbestimmung.

30a. Theodolit. Universalinstrument.

Das Instrument mißt Höhenwinkel sowie Azimutalwinkel, d. h. Winkel zwischen den Vertikalebenen, in denen anvisierte Punkte liegen. Zu diesem



Zweck muß die eine Drehaxe vertikal, die andere horizontal liegen; auf letzterer soll die Visierlinie senkrecht stehen.

Berichtigung der Libelle. Die Blase soll, wenn die Drehaxe des Fernrohrs horizontal liegt, in oder wenigstens nahe der Mitte einspielen. Um dies zu erkennen oder herbeizuführen, bringt man die aufgesetzte Libelle zum Einspielen und setzt sie dann auf den Zapfen der Axe um oder dreht die Vertikalaxe des Instruments um genau 180°; dann muß die Libelle wieder einspielen. Zeigt sie eine beträchtliche Abweichung, so wird deren Hälfte an der Libelle korrigiert. Die andere Hälfte korrigiert man mit den Fußschrauben und wiederholt die Prüfung. Ein grober Fehler, bei dem die Blase bis an das Ende der Libelle ausschlägt, wird zuvor durch Probieren beseitigt.

Ablesung. Um die Exzentrizität eines Teilkreises zu eliminieren, werden beide um 180° verschiedene Nonien abgelesen. Bei der Rechnung bezieht man die ganzen Grade immer auf Nonius I und nimmt nur in den Unterabteilungen das Mittel aus beiden Ablesungen.

1. Vertikale Axe.

Eine Drehaxe steht vertikal, wenn die Libelle bei der Drehung um diese Axe ihren Stand nicht ändert: man dreht die Libelle zunächst parallel der Verbindungslinie zweier Fußschrauben und bringt sie mit diesen zum Einspielen. Dann dreht man um 180° und berichtigt, falls die Blase jetzt eine andere Stellung zeigt, den halben Unterschied mit den Fußschrauben. Endlich wird um 90° gedreht und mit der dritten Fußschraube dieselbe Einstellung der Blase bewirkt, wie die soeben verlassene. Wenn das Verfahren zum ersten Male noch einen Fehler zurückgelassen hat, so wiederholt man es.

2. Horizontale Axe.

a) Stehen zwei Axen senkrecht aufeinander, so verbürgt die vertikale Stellung der einen von selbst die horizontale der anderen. Diese Bedingung kann ohne Libelle folgendermaßen geprüft werden, wenn kein Kollimationsfehler vorhanden ist (vgl. Nr. 3). Man sucht zwei möglichst entfernt übereinander liegende Objekte, die von dem Fernrohr bei Drehung um seine Axe getroffen werden. Dann dreht man um 180° um die Vertikalaxe und schlägt das Fernrohr durch; die beiden Objekte müssen dann wieder durch eine bloße Drehung um die Fernrohraxe einstellbar sein.

Selbständig prüft man die Horizontalität einer Fernrohraxe:

b) Mit der Libelle. Man prüft zuerst, ob die beiden Zapfen der Fernrohraxe gleich dick sind, indem man nach Einstellung auf

das Einspielen der Blase das Fernrohr umlegt (die Zapfen in ihren Lagern vertauscht) und die Libelle in ihrer früheren Stellung wieder aufsetzt. Die gleiche Einstellung der Blase beweist die gleiche Dicke der beiden Zapfen.

Dies vorausgesetzt wird eine horizontale Drehaxe daran erkannt, daß die auf der Axe umgesetzte Libelle den früheren Stand einnimmt.

Ob die Fernrohraxe rund ist, prüft man durch ihre Drehung unter der aufgesetzten Libelle.

c) Mit dem Senkel. Man hängt ein langes Senkel entfernt vor dem Theodolit auf und visiert nach verschiedenen Höhen. Der Kollimationsfehler muß zuvor berichtigt sein.

3. Kollimationsfehler.

a) Zur Prüfung, ob die Sehlinie auf der Drehungsaxe des Fernrohrs senkrecht ist, stellt man auf ein ungefähr in der Horizontalebene des Instrumentes gelegenes fernes Objekt ein, dreht den Horizontalkreis um genau 180° und stellt das Fernrohr mittels Durchschlagens in seine frühere Richtung. Das Objekt muß wieder genau einstehen. Ein Unterschied ist zur Hälfte durch Verschiebung des Fadenkreuzes zu berichtigen, worauf man die Prüfung wiederholt.

b) Oder man stellt wie oben ein, legt bei feststehendem Instrument das Fernrohr in seinen Lagern um und richtet es auf denselben Gegenstand; dieser muß wieder im Fadenkreuz erscheinen.

4. Absolute Höhe. Horizontal- und Zenit-Punkt.

a) Das Instrument sei nach Nr. 1 bis 3 berichtigt. Man stellt auf den Gegenstand ein und liest den Höhenkreis ab; man dreht die Vertikalaxe um 180°, schlägt das Fernrohr durch, stellt wieder ein und liest den Höhenkreis ab. Der Unterschied (Vorzeichen!) beider Ablesungen gibt den doppelten Zenitabstand des Objekts. Der halbe Unterschied von 90° abgezogen liefert also die Höhe des Objekts über dem Horizont.

Das arithmetische Mittel beider Einstellungen gibt den Zenitpunkt, die Hinzufügung von 90° zu diesem den Horizontalpunkt des Höhenkreises.

b) Quecksilberhorizont. Anstatt das Fernrohr durchzuschlagen, kann man vor das Objektiv einen Quecksilberhorizont stellen und nun durch Messung des Höhenwinkels zwischen dem (sehr entfernten) Objekt und dessen Spiegelbild sowohl die Höhe des Objektes über dem Horizont, wie auch den Zenit- und den Horizontalpunkt des Höhenkreises in leicht ersichtlicher Weise bestimmen.

Der Quecksilberhorizont erlaubt auch die absolute Höhenmessung mit einem Spiegelsextanten.

Auf Gestirne sind diese Verfahren um die Kulminationszeit direkt anwendbar. Für andere Zeiten bekommt man, wenn die Einstellungen rasch hintereinander ausgeführt werden, die Höhe für den mittleren Augenblick zwischen beiden Beobachtungen.

Die Beobachtung hochstehender Objekte mittels eines geradsichtigen Fernrohrs kann man dadurch ermöglichen oder erleichtern, daß man vor dem Okular ein kleines, total reflektierendes Prisma befestigt. Um das Fadenkreuz zu erhellen, genügt es, einige qmm weißes Papier schräg vor das Objektiv zu halten und seitlich zu beleuchten.

Winkel zwischen zwei Objekten. Aus den Höhenwinkeln h und h' und ihrem gegenseitigen Azimutwinkel A wird der Winkelabstand w zwischen beiden gefunden aus der Gleichung $\cos w = \sin h \sin h' + \cos h \cos h' \cdot \cos A$.

31. Bestimmung der Meridianrichtung eines Ortes.

Der Meridian ist die Vertikalebene, in der die Gestirne kulminieren; oder die Vertikalebene des Sonnenmittelpunktes am „wahren" Mittag; oder die vertikale Halbierungsebene zwischen den zwei Azimuten eines Gestirns, denen dieselbe Höhe entspricht, vorausgesetzt, daß das Gestirn inzwischen keine eigene Höhenbewegung ausgeführt hat.

I. Aus der größten Ausschreitung eines Gestirns. Man beobachtet einen Circumpolarstern, am besten den Polarstern selbst, zu der Zeit seiner größten östlichen oder westlichen Ausschreitung. Da zu dieser Zeit die Bewegungsrichtung des Sternes vertikal ist, so kann man bequem und scharf einstellen.

Beobachtet man die östliche und westliche Ausschreitung, so geht der Meridian durch die Halbierungslinie. Insofern die Deklination δ des Gestirns und die Polhöhe (geogr. Breite) φ bekannt sind (Tab. 44, 49), genügt auch eine einseitige Beobachtung. Es bildet nämlich der Vertikalkreis der größten Ausschreitung mit der Nordrichtung den Winkel ϑ, den man erhält aus $\sin \vartheta = \cos \delta / \cos \varphi$.

Denn Meridian, Vertikalkreis und Stundenkreis des Sterns bilden dann ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $90 - \varphi$, der einen Kathete $90 - \delta$ und dem der letzteren gegenüberliegenden Winkel ϑ.

Der Polarstern hat in mittlerer geogr. Breite seine größte Ausschreitung ungefähr um $7^h\ 20^{min}$ bez. $19^h\ 30^{min}$ Sternzeit (Tab. 45).

II. Am Polarstern zu irgend einer bekannten Zeit. Aus dieser ergibt sich die Sternzeit z (Tab. 45), aus letzterer und der Rektaszension α des Polarsterns (Tab. 49) sein Stundenwinkel $t = z - \alpha$, und endlich sein Azimut A gegen den Meridian aus **30** Gl. 5, oder, in mittleren Breiten auf einige Minuten genau, $\vartheta = (90 - \delta) \sin t / \cos \varphi$.

III. Aus korrespondierenden Höhen. Man stellt den Theodolit mit vertikaler Drehaxe (**30a**, 1) auf das Gestirn ein und liest den Horizontalkreis ab. Ohne an der Höheneinstellung etwas zu ändern, beobachtet man dasselbe Gestirn noch einmal nach seiner Kulmination, den Horizontalkreis so einstellend, daß es wieder durch das Fadenkreuz geht. Die Halbierungslinie der beiden Einstellungen liegt im Meridian des Ortes. Ein Höhenkreis ist unnötig.

Für die Genauigkeit ist günstig, daß das Gestirn rasch ansteigt, also dem Meridian nicht zu nahe steht.

Bei Benutzung der Sonne stellt man den Vertikalfaden Vormittags auf den einen, Nachmittags auf den andern seitlichen Rand ein, während der Horizontalfaden z. B. den oberen Rand berührt. Die Halbierungslinie der beiden Einstellungen geht aber im allgemeinen nicht genau durch den Meridian, sondern erfordert wegen der Deklinationsänderung der Sonne die folgende „Meridianverbesserung".

Es sei τ der halbe Zeitunterschied der beiden Beobachtungen von einander in Stunden, der Stundenwinkel der Sonne in Graden also $= 15\,\tau$. Es sei ferner ε die tägliche Änderung der Sonnendeklination (Tab. 45 oder Bremiker, fünfstellige Logarithmen S. 141), also $\varepsilon\tau/24$ diese Änderung in der halben Zwischenzeit. Dann beträgt die Meridian-Verbesserung

$$\frac{1}{\cos\varphi}\,\frac{\varepsilon\tau}{24}\,\frac{1}{\sin(15\tau)^0}.$$

Für mittlere europäische Breiten und bei Beobachtungen, die zwischen 8 und 10^h Vm., bez. 2 und 4^h Nm. angestellt werden, genügt innerhalb einer Bogenminute Genauigkeit, die Korrektion $= 0{,}27\,\varepsilon$ zu setzen.

Selbstverständlich richtet sich die Korrektion im Frühjahr nach Osten, im Herbst nach Westen und verschwindet in den Tagen der Sonnenwenden.

Beweis. Es sei die Deklination der Sonne zwischen beiden Durchgängen durch die Höhe h um $\varDelta\delta$ gewachsen und dadurch das zweite Azimut um $\varDelta A$ zu groß gefunden. Zwischen $\varDelta\delta$ und $\varDelta A$ wird durch Differentiation der Gl. 1 (**30**) die Beziehung gefunden $\varDelta\delta\cdot\cos\delta = \varDelta A\cdot\cos\varphi\cos h\sin A$. Ersetzt man hierin $\cos h\sin A$ nach Gl. 3 durch $\cos\delta\sin t$, so kommt $\varDelta\delta = \varDelta A\cdot\cos\varphi\sin t$. Um $\frac{1}{2}\varDelta A = \frac{1}{2}\varDelta\delta/(\cos\varphi\sin t)$ wird man das arithmetische Mittel aus den beiden Beobachtungen korrigieren müssen. Man braucht nur noch $\frac{1}{2}\varDelta\delta = \frac{1}{24}\varepsilon\tau$ und $\sin t = \sin 15\tau$ zu setzen, um den obigen Ausdruck zu erhalten.

IV. Aus der Beobachtung der Sonne um Mittag. Kennt man die Ortszeit (**33**), so liefert die Beobachtung des Sonnenmittelpunktes um 12^h „wahrer" Sonnenzeit (= mittlerer Ortszeit minus Zeitgleichung, Tab. 45) den Meridian. Man stellt dabei den Theodoliten auf den westlichen oder den östlichen Sonnenrand ein und berichtigt das beobachtete Azimut nach Osten oder nach Westen um $\varDelta = \varrho/\sin(\varphi-\delta)$, wo ϱ den Halbmesser (rund $0^0{,}27$), δ die Deklination der Sonne und φ die Polhöhe bedeutet; Tab. 47, 45 u. 44.

Beweis. Meridian, Höhenkreis des Sonnenrandes und Halbmesser

der Sonne nach ihrem Berührungspunkt mit dem Höhenkreis bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $\varphi - \delta$, worin die Kathete ϱ dem Winkel $\varDelta$ gegenüberliegt. Es ist also $\sin \varDelta : 1 = \sin \varrho : \sin(\varphi - \delta)$. Für $\sin \varDelta$ und $\sin \varrho$ kann man $\varDelta$ und ϱ setzen.

32. Polhöhe eines Ortes (geographische Breite).

I. Die Polhöhe wird am leichtesten aus der Höhe eines Gestirns bei seiner Kulmination abgeleitet. Kennt man den Meridian (**31**), so beobachtet man bei dem Durchgang durch diesen; andernfalls folgt man mit dem Fernrohr dem Objekt in der Nähe des Meridians und liest die höchste bez. niedrigste Einstellung ab.

Die beobachtete Höhe muß wegen der atmosphärischen Strahlenbrechung um die aus Tab. 48 zu entnehmende „Refraktion" vermindert werden. Nennt man die so korrigierte Höhe h, ist ferner δ die Deklination des Gestirnes (Tab. 49), so wird die Polhöhe

$$\varphi = 90 - h + \delta \quad \text{oder} \quad \varphi = 90 + h - \delta,$$

je nachdem die Kulmination eine obere oder eine untere war.

Über die Deklination der Sonne vgl. S. 124 und Tab. 45. Selbstverständlich muß hier die beobachtete Einstellung, da sie auf den oberen oder den unteren Rand stattfindet, um den Sonnenhalbmesser (Tab. 47) abgeändert werden.

Am Polarstern sind wegen seiner langsamen Bewegung die Messungen am bequemsten und genauesten.

Um die Kulminationszeit eines Gestirns voraus zu kennen, zieht man die Sternzeit um Mittag von der Rektaszension des Sternes (Tab. 49) ab; dann erhält man die Tageszeit seiner oberen Kulmination, gerechnet vom Mittage ab in Sternstunden. 1 Sternstunde = 0,9973 mittl. Stunden.

Die Sternzeit um Mittag siehe in Tab. 45. Wegen der periodischen, durch die Schaltjahre ausgeglichenen Verschiebung des Frühlingsanfangs, und ferner, weil der Sonnenmittag für westliche Orte später fällt als für östliche, kann diese Tabelle nicht für alle Jahre und für alle Orte dieselbe sein. Wenn an einem Orte von der östlichen geogr. Länge l^0 von Greenwich die Sternzeit für die mittlere Ortszeit T gesucht wird, so hat man deswegen nicht mit T selbst, sondern mit einem, in Bruchteilen des Tages ausgedrückten, korrigierten Werte

$$T + k + \tfrac{1}{360}\,(15^0 - l)$$

als Argument in die Tabelle einzugehen. k hat für jedes Jahr einen andern Wert, den man in Tab. 46 findet. l endlich wird aus Tab. 44 oder aus einer Landkarte entnommen. — Ist T die mitteleuropäische „Einheitszeit", so ist nur $T + k$ zu nehmen.

II. Man beobachtet mit feststehendem Horizontalkreis des Theodoliten die beiden Höhen des Polarsterns, in denen dieser während eines Umlaufs den vertikalen Faden passiert, und nimmt das Mittel, welches, wegen der Refraktion korrigiert, die Polhöhe gibt.

III. Eine einzelne Beobachtung des Polarsterns zu genähert

bekannter Zeit gibt die Polhöhe, da $(90-\delta)\cos t$ (vgl. **31** II) meistens genügend genau als vertikale Erhebung des Sterns über den Pol angesehen werden kann.

33. Zeitbestimmung aus Sonnen- oder Sternhöhen.

Vorausgesetzt wird die Kenntnis der geogr. Breite φ und bei Sonnenbeobachtungen der genäherten geogr. Länge l des Beobachtungsortes. — Je näher der Kulmination des Gestirns, desto weniger genau wird die Messung.

I. Aus einer einzelnen Höhe.

Sonne. Man mißt die Höhe des oberen oder unteren Randes mit dem Sextanten oder dem Theodoliten. Aus der wirklichen Höhe h des Sonnenrandes wird der Stundenwinkel t der Sonne oder die „Sonnenzeit" im Augenblicke der Beobachtung erhalten aus (Formel 2, S. 118).

$$\cos t = \frac{\sin h - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta}.$$

Ist dann der Stundenwinkel t den trigonometrischen Tafeln in Bogengraden entnommen, so wird er durch 15 geteilt, um die Sonnenzeit in Stunden zu erhalten. t ist Vormittags negativ, Nachmittags positiv zu rechnen.

Korrektionen. 1) Von der beobachteten Höhe, die wegen der atmosphärischen Strahlenbrechung zu groß ist, subtrahiert man nach Tab. 48 die Refraktion.

2) Man addiert bez. subtrahiert den Halbmesser der Sonne (Tab. 47). Dieser eliminiert sich von selbst, wenn man, um unabhängig vom Horizontalpunkt des Höhenkreises zu sein, mit Durchschlagen (**30a**, Nr. 4) zweimal einstellt und zwar einmal auf den unteren, das andere Mal auf den oberen Rand. Um das Mittel aus beiden Beobachtungen für die Zeit zu nehmen, in welcher der Sonnenmittelpunkt die mittlere Höhe passiert, müssen beide Beobachtungen rasch aufeinander folgen, da die Erhebung der Sonne nicht gleichförmig geschieht.

Geographische Breiten können aus einer guten Karte auf $0{,}01^0$ entnommen werden. Vgl. auch **32** u. Tab. 44.

Deklination der Sonne. Man interpoliert diese aus Tab. 45 für die Beobachtungszeit, welche man um $+k$ (Tab. 46) bez. um $+k+\frac{1}{360}(15-l)$ korrigiert hat. Vgl. hierüber S. 123. Ein Fehler von 3 min in der Zeit gibt höchstens einen Fehler von δ um $0{,}001^0$, so daß die Bahn-, unter Umständen auch die Turmuhrzeit genügt.

Mittlere Zeit. Zu der wahren Sonnenzeit t fügt man zur Reduktion auf mittlere Ortszeit die aus Tab. 45 zu entnehmende „Zeitgleichung" hinzu; auf mitteleuropäische Einheitszeit außerdem $+(15-l)\times 4$ min.

Andere Gestirne. Man wählt ein Gestirn von bekannter Deklination und Rektaszension (Tab. 49), welches weder dem Horizonte noch dem Pole zu nahe steht. Dann bedeutet das aus der Formel im Eingang berechnete t den Stundenwinkel des Gestirns. Fügt man zu t die Rektaszension des Sternes, so erhält man die für den Augenblick der Beobachtung geltende Sternzeit, zu der dann die mittlere Zeit aus Tab. 45 oder genauer nach den astronomischen Jahrbüchern gefunden wird.

Die gegebenen Vorschriften und Tabellen vernachlässigen Korrektionen, welche unter 0,01° liegen.

II. Aus korrespondierenden Höhen.

Hier genügt, außer einer gleichmäßig gehenden Uhr, ein in der Höhe klemmbares Fernrohr mit vertikaler Drehaxe (**30a**, 1), ohne jede Kreisteilung. Bei der Sonne stellt man jedesmal auf denselben unteren oder oberen Rand ein, ohne auf den Mittelpunkt umrechnen zu müssen.

Im Interesse scharfer Zeitbestimmung beobachtet man die Gestirne entfernt vom Meridian.

Ein Gestirn passiere vor und nach seiner Kulmination den Horizontalfaden eines Fernrohres, welches auf konstante Höhe eingestellt ist. Das arithmetische Mittel der beiden Uhrzeiten gibt für ein Gestirn ohne Eigenbewegung die Uhrzeit, für welche es kulminiert. Die absolute Zeit der Kulmination findet sich aus den Tabellen.

Fixsterne. Für das Mittel aus beiden Durchgangszeiten gibt die Rektaszension des Sternes (Tab. 49) die Sternzeit, aus welcher man die mittlere Zeit nach Tab. 45 oder einem astronomischen Jahrbuche entnimmt.

Sonne. Dem Zeitpunkte des Sonnendurchgangs durch den Meridian entspricht der scheinbare oder Sonnenmittag; die mittlere Ortszeit hat dann den durch die Zeitgleichung (Tab. 45) gegebenen Wert. In den Tagen der Sonnenwenden erhält man aus den Zeiten zweier Durchgänge durch die gleiche Höhe die Zeit des Durchgangs durch den Meridian genau als das arithmetische Mittel. Im allgemeinen aber kommt noch wegen der täglichen Deklinationsänderung der Sonne eine Korrektion, die „Mittagsverbesserung", hinzu, da die Sonne ihren höchsten Stand in der ersten Jahreshälfte etwas hinter, in der zweiten Hälfte etwas vor dem Meridian erreicht.

Es sei φ die Polhöhe des Ortes, δ die Deklination der Sonne,

ε ihre tägliche Änderung in Bogengraden (Tab. 45; Bremiker, 5stell. Log.) und τ der halbe Zeitunterschied zwischen den beiden Beobachtungen in Stunden (also $\pm 15\tau$ der Stundenwinkel der Sonne in Bogengraden). Die Mittagsverbesserung beträgt in Zeitsekunden $10\varepsilon\tau \cdot (\mathrm{tg}\,\varphi - \mathrm{tg}\,\delta \cos 15\tau)/\sin 15\tau$.

Beweis. Es bedeute (Fig. zu **30**) t den Stundenwinkel der Sonne bei der Beobachtung. Ohne Deklinationsänderung würden die absoluten Werte von t Vor- und Nachmittags gleich sein. Ist vom ersten bis zum zweiten Durchgang durch die Höhe h die Deklination um $\Delta\delta$ gewachsen, so wird t bei dem zweiten um eine Größe Δt zu groß gefunden, für welche man durch Differentiation von Gleichung 2 (**30**) die Beziehung erhält

$$0 = \Delta\delta \cdot (\sin\varphi \cos\delta - \cos\varphi \sin\delta \cos t) - \Delta t \cdot \cos\varphi \cos\delta \sin t.$$

Also ist $\Delta t = \Delta\delta\,(\mathrm{tg}\,\varphi - \mathrm{tg}\,\delta \cos t)/\sin t$. An dem arithmetischen Mittel aus beiden beobachteten Durchgangszeiten ist offenbar, um es auf den Durchgang durch den Meridian zu reduzieren, die Korrektion $\frac{1}{2}\Delta t$ anzubringen. Beachtet man noch, daß $t = 15\tau$ und daß $\frac{1}{2}\Delta\delta$ in Bogengraden $= \varepsilon\tau/24$, also in Zeitsekunden $= 86400/360 \cdot \varepsilon\tau/24 = 10\varepsilon\tau$, so kommt der obige Ausdruck für diese Korrektion.

34. Bestimmung des Ganges einer Uhr oder Festhaltung einer absoluten Zeit.

Zwei absolute Zeitbestimmungen (**33**) liefern den Gang der zur Beobachtung dienenden Uhr. Einfacher und häufig genauer sind aber Beobachtungen eines Gestirns in einem bestimmten Azimut. — Zwischen zwei Durchgängen eines Fixsterns durch denselben Punkt liegt ein Sterntag, der um 3 min 55,9 sec = 0,002730 Tag kürzer ist als der mittlere Tag.

I. Beobachtung an Fixsternen. Zu diesem Zwecke genügt jedes Fernrohr mit Fadenkreuz und einer horizontalen Drehungsaxe. Das konstante Azimut wird nötigenfalls auf eine entfernte irdische Einstellungsmarke bezogen.

Noch einfacher und leicht auf 1 sec genau ist das mit bloßem Auge beobachtete Verschwinden oder Auftauchen eines Fixsterns hinter einem fernen Objekt. Ist dieses mindestens 100 m entfernt, so genügt als fester Punkt für das Auge der Rand eines Fensterkreuzes oder ähnliches. Geheizte Schornsteine u. dgl. sind als bedeckende Objekte ungeeignet.

Am besten wählt man einen Stern, der dem Äquator nahe steht und beobachtet ihn nicht weit vom Meridian.

II. Beobachtungen an der Sonne. Zwei aufeinander folgende Sonnendurchgänge durch den Meridian liefern, unter Berücksichtigung der täglichen Änderung der Zeitgleichung

(Tab. 45 oder Bremiker, 5st. Log. S. 141), die Länge des mittleren Tages. Es wird nicht gefordert, daß der Meridian ganz genau sei; ein konstanter Fehler von 1^0 macht den beobachteten Tag höchstens etwa um 2 sec unsicher. Sowohl um die Tag- und Nachtgleichen wie um die Sonnenwenden ist diese Unsicherheit am kleinsten.

Gebraucht wird ein feststehendes Fernrohr mit horizontaler Drehaxe, an dessen Fadenkreuz man den Antritt und den Austritt der Sonne beobachtet. — Für mäßige Ansprüche genügt auch der Schatten eines Senkels oder das von einer engen Öffnung entworfene Sonnenbildchen. Man nimmt den Zeitpunkt, in welchem dieser Schatten oder das Sonnenbild von einer auf dem Fußboden oder auf einer gegenüberstehenden Wand angebrachten Marke halbiert wird. Auch eine gute Sonnenuhr läßt den Gang einer Uhr in größeren Zeiträumen einigermaßen genau bestimmen.

Eine einmal gewonnene absolute Zeit läßt sich durch diese einfachen Mittel festhalten.

35. Schwere; Länge des Sekundenpendels. Gravitationskonstante.

Die Konstante g der Schwere, d. h. die Geschwindigkeitszunahme des frei fallenden Körpers in 1 sec, beträgt in Meereshöhe unter 45^0 Breite $g = 980{,}6$ und für die geogr. Breite φ und die Höhe H m üb. Meer

$$g = 980{,}6\,(1 - 0{,}0026 \cdot \cos 2\varphi - 0{,}0000002 \cdot H)\ \mathrm{cm/sec^2}.$$

Für $H = 0$ siehe Tab. 43. Der kleinste und der größte Wert, am Äquator und an den Polen, weicht hiernach um etwa $\pm 2{,}5$, vom Mittelwerte 980,6 ab; lokale Unterschiede gegen die Formel erreichen sehr selten 0,2. — Ebensoviel beträgt der Einfluß der Höhe auf 1000 m Erhebung; $0{,}0_6 2$ ist ein Mittelwert, der natürlich durch die Bodenbeschaffenheit beeinflußt wird.

Bei sehr kleiner Schwingungsweite ist die (einseitige) Schwingungsdauer eines punktförmigen Pendels von der Länge l gleich $\pi\sqrt{(l/g)}$; die eines beliebig gestalteten Pendels gleich $\pi\sqrt{(K/D)}$, wo K das Trägheitsmoment und D die Direktionskraft bedeutet, d. h. $D = a \cdot gM$, wenn M die schwingende Masse und a der Abstand ihres Schwerpunkts von der Drehaxe ist; vgl. **29**.

Der Punkt eines Pendels, der, wenn er allein vorhanden wäre, die gleiche Schw.-D. zeigen würde, heißt Schwingungspunkt. Es gilt der Satz, daß, wenn man ein Pendel umkehrt und im Schw.-P. aufhängt, dieselbe Schw.-D. entsteht; s. Reversionspendel.

Bestimmung von g mit dem Fadenpendel. (Als Übungsaufgabe beschrieben, denn es wird im allgemeinen nicht leicht sein, g genauer

zu bestimmen, als es aus der Formel berechnet wird.) Eine gut abgedrehte, möglichst schwere Kugel von etwa 2 cm Durchmesser hänge an einem leichten und weichen Faden über eine Schneide bereits eine so lange Zeit, daß eine konstante Pendellänge entstanden ist. Diese Länge l sei gezählt von der Schneide bis zum Mittelpunkt der Kugel; sie wird also mit einem spiegelnden Maßstab (21, 1) oder mit dem Kathetometer (22) gemessen als das arithmetische Mittel aus den Abständen bis zum obersten und dem untersten Punkte der Kugel.

Schwingungsdauer τ. Finden in t sec k Schwingungen statt, so ist $\tau = t/k$. Wenn die Länge zwischen 99 und 100 cm gewählt wird, so kommt die Dauer der Sekunde nahe, und man beobachtet nach der Methode der Koinzidenzen. Liegt zwischen zwei aufeinander folgenden Koinzidenzen der Pendelschwingung mit einer vollen Sekunde eine Zeit $= n$ sec, so ist $\tau = n/(n-1)$ oder $n/(n+1)$, je nachdem das Pendel hinter der Uhr zurückbleibt oder ihr vorauseilt. Die Koinzidenz wird mit dem Auge beurteilt oder nach dem Gehör auf die Umkehr des Pendels oder auf seinen Durchgang durch die Mitte bezogen. Eine längere Beobachtungsreihe kann man, wenn die Amplitude klein oder wenig veränderlich war, nach 3 II berechnen.

Korrektionen der beobachteten Schw.-Dauer τ.

1. Amplitude. Die ganze Schwingungsweite sei $= \alpha$; es genügt meistens das Mittel aus dem ersten und letzten Bogen. Die beobachtete Schw.-D. ist, gemäß der Formel in 28, zu dividieren durch $1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{1}{4}\alpha$. Da die Korrektion klein ist (bei $\alpha = 10^0$ erst $\frac{1}{2}$ Promille), so kann man (Formel 4, S. 9) statt dessen von τ abziehen $\tau \cdot \frac{1}{4}\sin^2\frac{1}{4}\alpha$. Siehe Tab. 27.

2. Trägheitsmoment der Kugel. Eine punktförmige Masse würde rascher schwingen als die Kugel vom Radius r. Korrektion $= -\tau \cdot \frac{1}{5} r^2/l^2$.

3. Faden. Der mitschwingende Faden hat die Schw.-D. der Kugel allein vermindert. Korrektion $= +\tau \cdot \frac{1}{12}\mu/m$, wenn μ und m die Masse des Fadens und der Kugel.

Beweis zu 2 u. 3. Ein Punkt-Pendel von der Länge l würde haben $\tau_0 = \pi\sqrt{l/g}$; unser Pendel, wenn K sein Trägheitsmoment und D die Direktionskraft ist (vgl. S. 114 „Kugel" und „Hilfssatz"), hat:

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{K}{D}} = \pi\sqrt{\frac{l^2 m + \frac{2}{5}r^2 m + \frac{1}{3}l^2\mu}{g(lm + \frac{1}{2}l\mu)}} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{2}{5}r^2/l^2 + \frac{1}{3}\mu/m}{1 + \frac{1}{2}\mu/m}}.$$

Die gesuchte Schw.-D. eines punktförmigen Gewichtes an einem Aufhängefaden ohne Masse oder $\pi\sqrt{l/g}$ ist demnach gleich τ multipliziert mit

$\sqrt{\dfrac{1+\frac{1}{2}\mu/m}{1+\frac{2}{5}r^2/l^2+\frac{1}{3}\mu/m}}$, wofür nach Formel 8 u. 3, S. 9 geschrieben werden kann $\sqrt{(1-\frac{2}{5}r^2/l^2+\frac{1}{6}\mu/m)}$ oder $1-\frac{1}{5}r^2/l^2+\frac{1}{12}\mu/m$, q. e. d.

4. Luftauftrieb. Die Kugel wäre im leeren Raum im Verhältnis $1+\lambda/s$ schwerer gewesen, wo λ und s die Dichtigkeit der Luft (18) und der Kugel (Tab. 2) bedeuten. Korrektion der Schw.-D. $= -\tau\cdot\frac{1}{2}\lambda/s$.

5. Mitschwingende Luftmasse. Diese wird erfahrungsgemäß genähert berücksichtigt, wenn man die Auftriebskorrektion mit $\frac{3}{2}$ multipliziert.

6. Inhomogenität der Kugel. Man hängt die Kugel, oben und unten vertauscht, um, beobachtet wieder und nimmt das Mittel.

Nicht berücksichtigt ist die Fadensteifheit.

Die so korrigierte Schw.-D. heiße τ_0, dann ist $g=\pi^2 l/\tau_0^2$. Die Länge l_s des Sekundenpendels würde sein $l_s = l/\tau_0^2$.

Reversionspendel. Dasselbe hat zwei parallele, zum Schwerpunkt unsymmetrisch liegende Axen. Durch deren Verstellung oder durch Ändern der Massenverteilung bewirkt man, daß für beide Axen die gleiche Schw.-D. τ gilt, dann enthält jede Axe den Schwingungspunkt der andern (S. 127); also ist, wenn l ihr Abstand, $g=\pi^2 l/\tau^2$. — Sind beide Schw.-D. verschieden $=\tau_1$ bez. τ_2, so bezeichne man die Abstände des Schwerpunktes von den Schneiden bezüglich mit s_1 und s_2 und rechne

$$g=\pi^2 l\,\frac{s_1-s_2}{\tau_1^2 s_1-\tau_2^2 s_2} \quad \text{oder} \quad =\frac{\pi^2 l}{\tau^2}\,\frac{1}{1+\delta^2+2\delta l/(s_1-s_2)},$$

wo im zweiten, zum Rechnen bequemeren Ausdrucke τ das arithm. Mittel $\tau=\frac{1}{2}(\tau_1+\tau_2)$ und $\delta=\frac{1}{2}(\tau_1-\tau_2)/\tau$ ist.

Lokale Variationen von g pflegen mit dem Sterneck'schen Pendel (ZS f. Instr. 1888, 157), zeitliche Änderungen der Schwererichtung mit dem Zöllner'schen Horizontalpendel (Pogg. Ann. 150, 134. 1873) beobachtet zu werden. Über letzteres besonders auch Rebeur-Paschwitz, z. B. Astr. Nachr. 1892, 193. — Genaue Pendelmessungen s. Bessel, Abh. III, S. 137.

Atwood'scher Fallapparat.

Um aus Beobachtungen an diesem bekannten Instrument g abzuleiten, muß die als Übergewicht treibende Masse m im Verhältnis zum äquilibrierten Teil M der Gesamtmasse bekannt sein. Wenn die Beschleunigung b beobachtet wird, so ist $g\cdot m = b\cdot(M+m)$, also $g=b(M+m)/m$.

In M ist die der Trägheit des Rades äquivalente Masse x enthalten, die auf zweierlei Weise in Rechnung gesetzt werden kann:

1. Man eliminiert x durch Beobachtungen an zwei Paaren von Massen am Faden; diese zusammen sollen je M_1 bez. M_2 heißen. Dann

folgt also aus den zugehörigen beiden Beschleunigungen b_1 bez. b_2 $gm = b_1(M_1 + m + x)$ und $gm = b_2(M_2 + m + x)$, woraus man erhält

$$m + x = \frac{b_1 M_1 - b_2 M_2}{b_2 - b_1} \quad \text{und} \quad g = \frac{b_1 b_2}{b_2 - b_1} \cdot \frac{M_1 - M_2}{m}.$$

2. Man bestimmt das Trägheitsmoment K der Rolle durch Beobachtung (**29** IIb). Dann ist einzusetzen $x = K/r^2$, wenn r den Halbmesser der Rolle bedeutet. — Denn die Winkelbeschleunigung durch das Drehmoment $p \cdot r$ einer Kraft p am Faden beträgt (Anh. 12) $p \cdot r/K$, die Linearbeschleunigung des Fadens hierdurch also $p \cdot r^2/K$. Demnach vertritt K/r^2 die Trägheit einer äquivalenten, in der Peripherie konzentrierten Masse.

Absolute Gravitationskonstante G.

G ist die zwischen zwei Masseneinheiten im Abstande Eins bestehende Anziehung d. h. die Konstante des Newton'schen Gravitationsgesetzes $k = G \cdot mm'/r^2$. Die Bestimmung ist ausgeführt worden:

A) mit der Coulomb'schen Drehwage. Das Drehmoment, welches eine oder mehrere passend angebrachte feste Massen auf eine oder zwei an dem Wagebalken befestigte Massen ausüben, wird mit der Direktionskraft der Aufhängung verglichen, meist durch die hervorgebrachte Ablenkung (Cavendish 1798, Reich, Baily, Cornu, Boys, Braun, Poynting). Auch die durch die Annäherung der Massen bewirkte Änderung der Schwingungsdauer kann benutzt werden.

B) mit der Wage. Man bestimmt die Änderung des Gewichts, welche eine angehängte Masse durch eine feste Masse erfährt, die man ihr von unten nähert (Jolly, Poynting), oder indem man die bewegliche Masse abwechselnd ober- und unterhalb einer festen wägt (Richarz u. Krigar-Menzel).

Als bisheriges Resultat ist anzunehmen, daß zwei Grammpunkte aus 1 cm Abstand gegenseitig die anziehende Kraft $= 6{,}68 \cdot 10^{-8}$ Dynen ausüben, d. h. $G = 6{,}68 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{cm^3\,gr^{-1}\,sec^{-2}}$.

Über Unabhängigkeit der Schwerekonstante von der Natur des Körpers s. Bessel, Abh. III, S. 217. 1876; von der Temperatur: Poynting u. Phillips, Proc. R. Soc. (A) 76, 445. 1905. — Über die Konstanz des Gewichtes in chemischen Verbindungen: Landolt, Sitzungsber. Berl. Ak. 1908, 354.

Druck.

36. Druckmessung. Manometer.

Den Begriff Druck gebraucht man für einen Zustand, wo Kräfte stetig verteilt sind. In ruhenden flüssigen, sei es tropfbaren oder gasförmigen Mitteln erfährt jedes Flächenelement (df), unabhängig von seiner Richtung, im Innern sowohl wie an der Wand, eine zu ihm senkrechte Druckkraft (dk). Druckgröße an einem Orte ist der Quotient dk/df daselbst, oder, bei gleichmäßiger Druckverteilung, die auf die Flächeneinheit kommende Kraft. — Über den Druck in festen Körpern vgl. **55 b**.

Als Grundlage dient die Messung durch Flüssigkeitshöhen; diese bieten eine im ganzen Meßbereich konstante Empfindlichkeit.

I. Flüssigkeitsmanometer.

Eine Säule von der Höhe h cm und dem spez. Gewicht s stellt den Druck sh gr-Gew./cm^2 oder in CGS-Einheiten (Anh. 7; 8) $= gsh$ Dyne/cm^2 dar; g ist die Fallbeschleunigung in cm/sec^2.

Gebräuchlich sind Quecksilber und Wasser. Auch wohl H_2SO_4 (1,83) oder Glyzerin (1,26); konzentriert sind beide stark hygroskopisch.

Der Druck von 76 cm Quecksilber von 0^0, streng genommen unter der Schwere in 45^0 geogr. Breite, heißt eine Atmosphäre. Diese entspricht also einem Drucke von $13{,}596 \cdot 76 = 1033{,}3$ gr-Gew./cm^2. Für Druckmessung hat man $g_{45} = 980{,}66$ cm/sec^2 angenommen[1]), also ist 1 Atm. $= 980{,}66 \cdot 1033{,}3 = 1013300$ Dyne/cm^2. Unter 50^0 Breite ($g = 981{,}1$) gilt 1013800 für 760 mm, also wird hier der normale Atmosphärendruck durch 759,6 mm Hg von 0^0 dargestellt.

Man erhält aus einer beobachteten Druckhöhe h einer Flüssigkeit vom spez. Gewicht s die Höhe h' einer anderen Flüssigkeit s', welche denselben Druck gibt, als $h' = h \cdot s/s'$. Eine bei der Temperatur t gemessene Quecksilberdruckhöhe h wird also auf t' umgerechnet durch Multiplikation mit dem Faktor $1 + 0{,}000182\,(t' - t)$, der hier gleich s/s' ist; vgl. S. 102.

Ablesung. Man projiziert auf einen hintergestellten Maßstab, mit dem Auge unter Vermeidung der Parallaxe durch einen Spiegel, oder mit einem parallel verschiebbaren Fernrohr; oder man mißt mit dem Kathetometer (**22**). Abgelesen wird immer die horizontale Tangente des Meniskus, also an Quecksilberflächen der obere, an den übrigen Flüssigkeiten der

1) Sonst pflegt man 980,60 anzunehmen.

untere Rand. Zum scharfen Erkennen der Kuppe schirmt man von oben kommendes Licht ab, oder bringt ein Ölpapier mit schrägen Strichen hinter der Kuppe an (Röntgen); kann man dicht über, bez. unter der Oberfläche eine Spitze anbringen, so stellt man auf die Mitte zwischen ihr und ihrem Spiegelbild ein.

Bei dem Ablesen auf einem hintergestellten Maßstab kann an einer breiten, also in der Mitte ebenen Fläche ebenso die Mitte zwischen einem Teilstrich und seinem Spiegelbild zur Einstellung und zur Schätzung oder Messung des Abstandes der Kuppe vom nächsten Teilstrich benutzt werden.

Vgl. Thiesen, ZS f. Instr. 1886, 89.

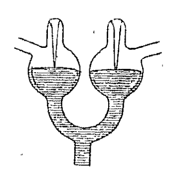
In einem offenen Schenkel ist, wenn im geschlossenen stets eine bestimmte Höhe innegehalten wird (vgl. Luftthermometer), oft ein verschiebbarer Maßstab mit Spitze zu gebrauchen, die zur Berührung eingestellt wird. Der Nullpunkt der Teilung findet sich aus der Einstellung bei beiderseitig gleichem Druck. Schema s. Fig.

Kapillar-Korrektion. Die Oberfläche hat gewöhnlich nicht eine so große Breite, daß ihr höchster (bez. tiefster) Teil eben ist; dann kommt zu dem Gewichtsdruck der Kapillardruck der Krümmung an der Kuppe; die abgelesene Höhe ist zu niedrig (bez. zu hoch). Die Korrektion wächst mit abnehmender Rohrweite. In kommunizierenden gleichen Röhren hebt sie sich bei beiderseitig gleicher Benetzung und Kapillarkonstante natürlich heraus. — Die „Kapillardepression" des Quecksilbers läßt sich wegen der Veränderlichkeit des Randwinkels nicht als bloße Funktion der Rohrweite darstellen. Ist aber außer der Rohrweite die Höhe des Meniskus bekannt, so kann man die Depression, freilich mit der nicht unbeträchtlichen Unsicherheit, die aus Veränderungen der Kapillarkonstante selbst erwächst, aus Tab. 18a entnehmen. Bei einer Rohrweite von 15 mm beträgt sie höchstens 0,1 mm. Vgl. auch **37**, 1 bis 5.

Formeln für die „Kapillarerhebung" in benetzten Röhren s. **58** I.

Kleine Druckunterschiede. 1. Die beiden Drucke werden auf verschiedene Oberflächenteile einer Flüssigkeit in einem geschlossenen, oben durch eine Scheidewand geteilten Gefäß übertragen, welches vorn und hinten durch ebene Glasplatten geschlossen ist. Die Hinterwand ist horizontal durchlaufend geteilt. Die Oberflächen seien so groß, daß ihre Mitten merklich eben sind. Man bestimmt mittels Mikroskops die beiden Höhen aus dem Abstande direkt gesehener Teilstriche von ihren Spiegelbildern. Unsymmetrien werden durch Vertauschen der Drucke eliminiert. — Thiesen u. Scheel, Wiss. Abh. d. P.T. Reichsanst. III, 12 u. 76. 1900; ZS f. Instr. 1901, 177.

2. Man benutzt zwei Spitzen in kommunizierenden, etwa 25 mm weiten Druckkammern; man stellt durch eine mit Spiegel und vertikaler Skale (**25**) gemessene Neigung des Systems immer auf die Berührung beider Quecksilberflächen mit den Spitzen ein. Als bewegliche Verbindungen dienen Kundt'sche Glasfedern (**8**, 24). Zum Zwecke der Regulierung der mittleren Niveauhöhe steht das Quecksilber (wie bei der Quecksilberluftpumpe oder dem Luftthermometer; **8**, 24 u. **42**) durch einen Schlauch in Verbindung mit einer freien Oberfläche, die man heben oder senken kann; die Feineinstellung geschieht mittels einer Klemmschraube am Schlauch. — Rayleigh, Phil. Trans. (A) 196, 208. 1901; ZS f. phys. Ch. 37, 716. 1901.

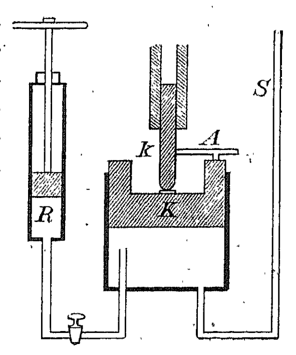


3. Von den beiden (Quecksilber-)Oberflächen wird die eine durch mikrometrische Höhenverstellung eines äußeren Niveaus mit einer konstanten Platinspitze in Kontakt gebracht; auf die andere wird eine Schraubenmikrometerspitze (vgl. **8**, 24) eingestellt. — Hering, Ann. d. Ph. 21, 320. 1906. — Vgl. auch VII.

Große Drucke. Quecksilbermanometer gewöhnlicher Form für eine größere Anzahl von Atmosphären werden an Hauswänden usw. befestigt. — Tragbaren Instrumenten gibt man eine gebrochene Form, in welcher die Drucke mehrerer Säulen in **U**förmigen Röhren durch Wasser usw. aufeinander übertragen und summiert werden.

Vgl. hierüber Thiesen, ZS f. Instr. 1881, 114. — Bis 100 Atm. Kamerlingh Onnes, Commun. Phys. Lab. Leiden Nr. 44. 1898. — Das 300 m hohe offene Manometer am Eiffelturm besteht aus einem 4½ mm weiten Stahlrohre. Zum Ablesen dienen seitlich angesetzte je 3 m lange Glasröhren, die, außer beim Ablesen, durch Doppelhähne abgesperrt sind. Vgl. Cailletet, Comptes rendus 112, 764. 1891. — Die mittlere Temperatur einer Säule wird am besten nach dem elektrischen Widerstande (**43** II) eines an das Rohr gebundenen Drahtes (Nickel) beurteilt; Holborn u. Henning, Ann. d. Ph. 26, 833. 1908.

Druckreduktion durch Kolbenübertragung. Um Drucke von Hunderten oder Tausenden von Atmosphären bei der Übertragung auf Quecksilber zu verkleinern, benutzt man das umgekehrte Prinzip der hydraulischen Presse. Der große Druck wirkt auf den Kolben k (Querschnitt q), der die Kraft auf den Kolben K (Querschnitt Q) überträgt und unter K den Druck im Verhältnis q/Q reduziert auftreten läßt. Die übertragenden und zugleich dichtenden Flüssigkeiten sind Rizinusöl oder bei sehr großen Drucken Melasse.



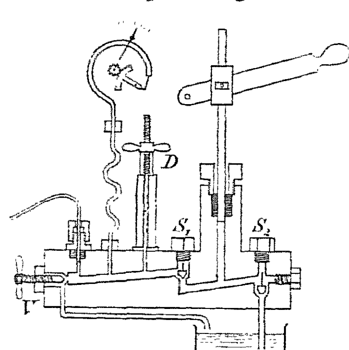
Die Reibung wird durch drehende Bewegungen vermindert, die man während der Messung dem Kolben durch einen eingeschraubten Arm *A* mitteilt. Der weite Cylinder enthält unten Quecksilber, welches mit dem Steigrohr *S* kommuniziert. Die mit Rizinusöl gefüllte Regulierpumpe *R* läßt den Druck, trotz Austreten von etwas Flüssigkeit an den Kolbenwänden, konstant erhalten. — Näheres bei Amagat, Ann. chim. phys. (6) 29, 68. 1893; Wagner, Ann. d. Ph. 15, 906. 1904.

Versuche mit hohen Drucken. Bei Messungen ist die Kompressionswärme (**55 b**) zu beachten und also mit der Beobachtung bis zum wiedererfolgten Temperaturausgleich zu warten.

Gase usw., die dem Druck zu unterwerfen sind, werden gewöhnlich über Quecksilber beobachtet, welches anderseitig, mittels einer Wasserstrecke, durch die Kapillare (s. unten) mit der Pumpe verbunden ist. Bei mäßigem Druck kann ein dickwandiges Glasrohr in die Luft ragen.

Glasröhren sind für inneren einseitigen Druck über höchstens 400 Atm. nicht brauchbar zu machen und müssen höher hinauf in Metallcylindern beiderseitig gedrückt werden. Volumänderungen von Gasen oder Flüssigkeiten in solchen Röhren (Piezometern) können dann, ohne daß die Röhren sichtbar sind, vermöge elektrischer Kontakte beobachtet werden, die in die Röhre eingeschmolzen und durch dünnen Platindraht hintereinander verbunden sind. Jedes Herantreten des Sperrquecksilbers an einen folgenden Kontakt schaltet Widerstand aus und ist dadurch (**90** bis **93**) zu erkennen (Amagat l. c.).

Cailletet'sche Pumpe, Ducretet & Lejeune, Paris. Bis 300 Atm. kann der Pumpkolben gebraucht werden, dann die (in Wirklichkeit seitlich angebrachte) Druckschraube *D*. Alle Dichtungsschrauben sind sehr fest anzuziehen. Sorgfältig sauber müssen die kleinen Hartkautschukventile gehalten werden. — Ventilschraube *V* dient zum Abspannen des Druckes. Als Füllung kann destilliertes Wasser gebraucht werden; bei längerem Nichtgebrauch ist die Pumpe durch Lüften der Schraube S_1 zu entleeren und bis zum Austrocknen offen zu lassen.



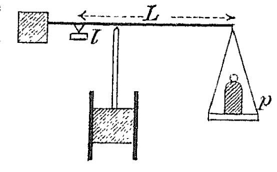
Die Kupfer- (oberhalb 700 Atm. besser Stahl-)Kapillare links gibt den Druck weiter. — Man kittet mit Marineleim, bis 100 At. auch Siegellack.

Änderungen der Konstruktion bei Petavel, Phys. ZS 1908, 74.

Über die Anordnung von Versuchen mit hohem Druck s. außer **55 b** u. a.: Elektr. Leitvermögen: Fink, Wied. Ann. 26, 481. 1885; Lussana, Cim. (4) 12, 237. 1900. — Lichtbrechung: Röntgen u. Zehnder, ib. 44, 24. 1891. — Dielektr.-Konstanten: Röntgen, ib. 52, 593. 1894; — c_p/c_v: P. P. Koch, Ann. d. Ph. 27, 311. 1908. — Auch das Preisverzeichnis von Ducretet & L. —

Eine Übersicht über Meßmethoden: Wiebe, ZS f. komprim. u. flüss. Gase 1, 8 ff. 1897. — Firmen: z. B. Dreyer, Rosenkranz & Droop, Hannover; Schäffer & Budenberg, Magdeburg; Stückrath, Friedenau.

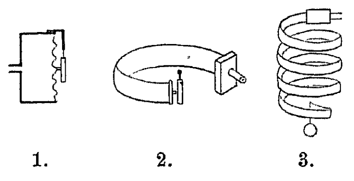
II. Wage(-Kolben)manometer. Der Druck auf den Kolben vom Querschnitt q wird auf einen äquilibrierten Wagebalken mit Wagschale übertragen und durch Gewichte p gemessen. In der Figur mit Hebelübertragung ist der Druck $= \frac{p}{q} \cdot \frac{L}{l}$. — Eine Manschette aus Goldschlägerhaut dichtet den lose eingeschliffenen Kolben; drehende Bewegungen vermindern die Reibung. Man mittelt die Ablesungen bei steigendem und fallendem Druck.



III. Gasmanometer. Der Druck wird auf eine abgesperrte Gasmenge in einem kalibrierten Rohr durch eine Flüssigkeit übertragen, welche das Gas nicht absorbiert. Der Druck ist dem Volumen umgekehrt proportional. Veränderliche Druckhöhen der Sperrflüssigkeit oder Temperaturwechsel lassen sich nötigenfalls leicht in Rechnung setzen. Die Empfindlichkeit der Messung nimmt dem Drucke proportional ab. Für große Drucke müssen die Abweichungen des Gases vom Mariotte'schen Gesetz bekannt sein.

Präzisionsmanometer bis 64 Atm. bei Kamerlingh Onnes, Commun. Phys. Lab. Leiden Nr. 50. 1899.

IV. Metallmanometer. Der Druck wird durch die Durchbiegung einer Metallmembran oder die Krümmung einer Metallröhre (Bourdon) gemessen, deren Bewegung auf einen Zeiger übertragen ist. Der zu messende Druck kann von innen oder von außen wirken. Die Eichung erfolgt empirisch mittels des Quecksilbermanometers. Geringe Druckvariationen können mittels eines drehbaren Spiegelchens, welches durch Kontakt mit dem Manometer bewegt wird (1 u. 2) oder sich mit dem Ende einer mehrfach gewundenen Bourdon'schen Röhre dreht (3), mit Fernrohr und Skale beobachtet werden.


1. 2. 3.

1. Röntgen, Pogg. Ann. 148, 580. 1873; 2. F. K., ib. 150, 423. 1873; 3. Barus, ZS f. Instr. 1896, 253. Über elast. Nachwirkung (**55c**) vgl. z. B. Wagner, Ann. d. Ph. 15, 936. 1904. — Anwendung auf kleine Druckunterschiede bei Dieterici, Wied. Ann. 50, 55. 1893; 62, 624. 1897.

V. Elektrische Widerstandsmanometer. Nur für sehr hohe Drucke. Die kleine Änderung des Widerstandes von Manganindrähten durch den Druck (etwa + 0,000002 auf 1 Atm.) verläuft bis 3000 Atm. nahe linear. Bei Messung des Widerstandes in der Wheatstone'schen Brücke (**93** I) wird von 500 Atm. aufwärts eine Genauigkeit auf 1/1000 als erreichbar angegeben, porenfreies Metall und Temperaturgleichheit vorausgesetzt.

Lisell, Öfv. K. Vetensk. Akad. 55, 697. 1898; Beibl. 1899, 393; ausführl. Dissert. Upsala 1902.

VI. Ausflußmanometer. Mittels einer durch ein Kapillarrohr hinausgedrückten Flüssigkeitsmenge nach dem Poiseuille'schen Gesetz (**58 a**); vgl. Perot C. R. 145, 1157. 1907.

VII. Drucklibelle für sehr kleine Drucke (Toepler). Ein unter sehr stumpfem Winkel $180^0 - 2\alpha$ geknicktes Glasrohr von etwa 3 mm Weite enthält eine etwa $^1/_4$ m lange Säule Petroleum oder Xylol vom spez. Gewicht s. Ein einseitiger Druck, welcher eine Verschiebung um l cm bewirkt, ist gleich $(2s \cdot \sin\alpha) l$ gr-Gew./cm². Den konstanten Faktor $2s \cdot \sin\alpha$ kann man beliebig klein machen.

Oder, wenn der Abstand der beiden Kuppen $= a$ ist, und wenn ein Druck p kompensiert wird durch eine Neigung des Rohres um den Winkel φ, so ist $p = sa \cdot \sin\varphi$. Der Neigungswinkel wird durch die Drehung der Fußschraube an der Libelle hervorgebracht und gemessen.

Mit mikroskopischer Ablesung ist eine Druckänderung von 10^{-8} Atm. noch bemerkbar und selbst die Temperatur drückender Gassäulen scharf zu messen.

A. Toepler, Wied. Ann. 56, 611. 1895.

VIII. Messung sehr kleiner Gasdrucke (Arago). Man verkleinert das Volumen in gemessenem Verhältnis; der Druck steigt in gleichem Verhältnis. Die Ausführung, z. B. an einer Quecksilberluftpumpe, zeigt die Figur (häufig nach Mc Leod benannt). Das an die obere Birne angesetzte Rohr ist in mm geteilt und außerdem relativ zu dem bis an den Punkt P gerechneten Volumen der Birne kalibriert. Hebung der unteren Birne mit Quecksilber schließt durch dessen Ansteigen die Luft der oberen ab und drängt sie in das Meßrohr. Der Höhenunterschied gegen das Quecksilber im ebenfalls geteilten Verbindungsrohr gibt den Drucküberschuß des komprimierten Gases gegen das ursprüngliche, der, durch das jeweilige Volumverhältnis geteilt, den ursprünglichen Druck darstellt. 1000 malige Vergrößerung läßt diesen auf wenige Zehntausendtel mm messen; vollkommenes vorgängiges Trocknen vorausgesetzt!

An modernen Quecksilberpumpen kann man mittels des gebogenen Verbindungsrohres am Rezipienten (Fig. zu 8, 24) oft eine ähnliche Anordnung improvisieren.

Über eine handliche Form s. Reiff, Phys. ZS 8, 124. 1907.

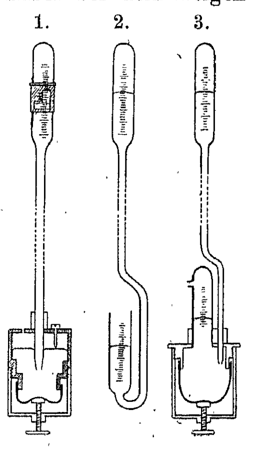
Weitere Methoden für kleine Gasdrucke: 1. Mittels des Crookes'schen Radiometers (Lichtmühle); vgl. Dewar, Proc. R. S. (A) 79, 529. 1907. — 2. Mittels der Temperatur, welche ein elektrisch geheizter Leiter unter dem Zusammenwirken von Stromwärme und Wärmeabgabe erreicht, z. B. aus der Hitzdrahtausdehnung: Pirani, Verh. D. Ph. Ges. 1906, 686; Berndt (Siemens u. Halske), ib. 1907, 249. — 3. Vermittelst eines durch Wechselstrom geheizten Thermoelementes: Voege, Phys. ZS 7, 498. 1906. — 4. Aus dem Widerstand eines schmalen Bolometerstreifens: Warburg, Leithäuser und Johansen, Ann. d. Ph. 24, 25. 1907. — 5. Aus den Lichterscheinungen in Geifslerschen Röhren. — Vgl. auch kleine Drucke unter I und VII.

37. Atmosphärischer Druck (Barometerstand).

Eine genaue Messung des Luftdrucks wird, außer für meteorologische Zwecke, u. a. verlangt bei Höhenmessungen, für die Kenntnis der Dichtigkeit der Luft, dann bei der Bestimmung von Dampfdichten, Dampfspannungen, Siedepunkten, Thermometerprüfung.

Unter Barometerstand versteht man die Höhe einer Quecksilbersäule von 0°, die dem Luftdruck das Gleichgewicht hält. Für genaue Zwecke fügt man hinzu, daß die auf das Quecksilber wirkende Schwere diejenige unter 45° Breite am Meeresspiegel sein soll; vgl. 5. Die Korrektion kann 1,8 mm erreichen. — Als mittlerer („normaler") Barometerstand am Meeresspiegel gilt 760 mm; vgl. S. 131.

Luft oder Wasserdampf über dem Quecksilber erniedrigen durch ihren eigenen Druck den Stand. Die Abwesenheit von Luft erkennt man an dem scharfen Klange, mit welchem das Quecksilber bei dem Neigen des Instrumentes oben anstößt. Schwieriger zu erkennen ist das Vorhandensein von Wasserdampf, welcher sich nur bei größeren Mengen durch einen Beschlag bemerklich macht, der sich bei dem Neigen an der Glaswand bildet.



Kann man durch Heben des Quecksilbers usw. das Vakuum über dem Quecksilber verkleinern und zugleich die Druckhöhe beobachten, so läßt sich eine vorhandene kleine Luft- oder Dampfmenge daran erkennen, daß die Höhe sich vermindert, und der Einfluß kann vermittelst Messung dieser Depression in Rechnung gesetzt werden. Das Wild-Fuess'sche Heberbarometer (Skizze in Fig. 3) läßt diesen Zweck durch Hinaufdrücken des Quecksilbers, in welches die beiden Schenkel eintauchen,

mittels des Lederschlauchs erreichen. Eine etwas andere Konstruktion hat einen mit Schraube komprimierbaren Lederdeckel.

Am Heberbarometer (Fig. 2) liest man beide Kuppen ab und nimmt ihre Höhendifferenz. — Am Gefäßbarometer (Fortin, Fig. 1) stellt man den durch eine Stahl- oder Elfenbeinspitze gebildeten Nullpunkt des Maßstabes auf die am Reflex scharf zu erkennende Berührung mit der unteren Quecksilberfläche ein und liest oben ab. Hat ein Gefäßbarometer diese Höhenverstellung nicht, so sind die beobachteten Schwankungen mit $1 + q/q'$ zu multiplizieren, wenn q bez. q' den Querschnitt des Rohres bez. des Gefäßes bedeuten. Häufig ist die Teilung an derartigen Instrumenten gleich in diesem Verhältnis verkleinert.

Die Ablesung der Kuppe geschieht mit bloßem Auge oder durch Einstellung eines verschiebbaren Index, unter Anwendung eines Spiegels zur Vermeidung der Parallaxe (**21**, 1); oder mit einer Visiervorrichtung aus gespannten Fäden, oder dem Mikroskop. Ein Barometerrohr ohne Maßstab beobachtet man mit dem Kathetometer (**22**). Über den Nonius siehe **21**.

Wegen der Reibung des Quecksilbers klopft oder neigt man vor der Ablesung. Vorteilhaft ist, auch wegen der Kapillarität, bei dem Heberbarometer das Quecksilber in beiden Schenkeln vor dem Ablesen ansteigen zu lassen (Fig. 3 v. S.).

Barometerablesungen verlangen folgende Korrektionen:

1. Temperatur des Quecksilbers. Das Quecksilber dehnt sich für 1^0 C. um 0,000182 seines Volumens aus. Ist demnach l der bei der Temperatur t des Barometers abgelesene Barometerstand, so ist der auf 0^0 reduzierte (**4**, Beispiel Nr. 2)

$$b = l - 0{,}000182\, lt.$$

2. Temperatur des Maßstabes. Bei genauen Messungen muß auch die Länge des Maßstabes auf seine Normaltemperatur t_0 reduziert werden, was durch Addition von $\beta(t - t_0)l$ geschieht, worin β den Ausdehnungskoeffizienten des Maßstabes (0,000019 für Messing; 0,000008 für Glas) bedeutet.

Wenn wie gewöhnlich die Normaltemperatur $t_0 = 0$ ist, so beträgt also die gesamte Temperaturkorrektion $-(0{,}000182 - \beta)lt$. Der Zahlenfaktor wird für Messing 0,000163, für Glas 0,000174. — Tab. 8 erspart das Ausrechnen.

Bei dem gewöhnlichen Barometerstande kommt auf 1^0 nahe $\frac{1}{8}$ mm und es wird oft genügen, vom beobachteten Stande $\frac{1}{8}t$ mm abzuziehen.

3. Kapillardepression eines Gefäßbarometers. Um diese zu korrigieren, mag man zu dem an der Kuppe des Meniskus abgelesenen Stande den aus Tab. 18a zu dem inneren Durchmesser der Röhre und der Höhe des Quecksilbermeniskus entnommenen Wert hinzufügen (vgl. 6 und S. 132).

4. Spannkraft des Quecksilberdampfes. In höherer Temperatur bewirkt diese eine kleine Depression (Tab. 15), die aber erst oberhalb 40^0 0,01 mm erreicht.

5. Schwere-Reduktion auf 45^0. Der Druck einer Quecksilbersäule ist der Schwere am Orte proportional. Mit dem Ausdruck (**35**) $1 - 0{,}0026 \cos 2\varphi - 0{,}0000002\, H$, dessen letztes Glied übrigens nur in großen Höhen merklich wird, ist ein beobachteter Barometerstand zu multiplizieren, um den Stand zu erhalten, welcher demselben Luftdruck unter 45^0 am Meeresspiegel entspricht.

Aus dem reduzierten Barometerstande b in cm berechnet man den Druck in gr-Gewicht/cm² als $b \cdot 13{,}596$; in CGS-Einheiten, d. h. in Dynen/cm² oder in $[\mathrm{cm}^{-1} \cdot \mathrm{gr} \cdot \mathrm{sec}^{-2}]$ (Anh. 8) als $b \cdot 13{,}596 \cdot 980{,}66 = b \cdot 13333$; vgl. **36** I.

Die Bemerkungen Nr. 1 bis 5 gelten für jede genaue Druckmessung mit Quecksilbersäulen.

6. Normalbarometer. Die aus der Kapillardepression entstehende Unsicherheit läßt sich nur durch ein weites Rohr (25 mm und für äußerste Genauigkeit noch weiter) vermeiden, welches die Depression ausschließt. Die Füllung geschieht zur Vermeidung von Luft oder Wasserdampf mit der Quecksilberluftpumpe. Über reines Quecksilber s. 8, 1. — Durch Vergleichung eines anderen Instrumentes mit diesem Normalbarometer bestimmt man die Korrektionen des ersteren empirisch.

Über Formen von Barometern, deren Luftgehalt stets zu kontrolieren oder zu beseitigen ist, vgl. L. Weber, ZS f. Instr. 13, 63. 1893. Über das Wild-Fueß'sche Barometer Wiss. Abh. d. P. T. Reichsanst. I, 93. 1894. — Barographen, die den Luftdruck registrieren, sind an Aneroidbarometer angeschlossen oder sie benutzen die Variation des Gewichtes der gehobenen Quecksilbersäule (Sprung), vgl. z. B. Scheel, ZS f. Instr. 1895, 133.

Aneroidbarometer werden durch Vergleichung mit dem Quecksilberbarometer justiert bezw. mit einer Korrektionstabelle versehen. Man bringt das Instrument z. B. unter die Luftpumpe und verbindet mit dem Rezipienten ein hinreichend weites Glas-

rohr, in welches Quecksilbersäulen angesaugt werden. Nachdem man dann wegen der elastischen Nachwirkung, welche den Messungen rasch wechselnder Drucke mit dem Aneroid als Fehlerquelle anhaftet, längere Zeit gewartet hat, liest man das Aneroid, die gehobene Säule und den äußeren Barometerstand ab. Die letzteren beiden, auf 0^0 reduzierten Höhen, von einander abgezogen, geben den der Einstellung des Aneroids zugehörenden Barometerstand. — Die Temperaturkorrektion eines Aneroids ist empirisch zu bestimmen. — Über Einflüsse der elastischen Nachwirkung s. **55c**. Ihre Elimination ist schwierig.

Variometer für Luftdruck. Zu Messungen dauernd brauchbar sind die unter **36** IV beschriebenen Spiegelinstrumente, wenn die Mündung verlötet ist. Die Temperatureinflüsse auf die Elastizität der Wände und des Luftgehalts lassen sich großenteils dadurch kompensieren, daß die Luft bis auf einen geeigneten kleinen Rest ausgepumpt wird.

Sehr empfindlich mißt die Schwankungen auch eine, durch einen Tropfen (Petroleum, Toluol) in einer geteilten Röhre abgesperrte, größere Luftmenge, solange ihre Temperatur konstant erhalten wird. Vgl. v. Hefner-Alteneck, Wied. Ann. 57, 468. 1896. — Ferner M. Toepler, Ann. der Ph. 12. 787. 1903 über die Anwendung der unter **36** VII beschriebenen Drucklibelle.

38. Barometrische Höhenmessung (Halley, Laplace).

Mit wachsender Höhe nimmt der hydrostatische Druck der Luft ab. Bei dem Ansteigen vermindert sich die Quecksilbersäule, welche dem Luftdruck das Gleichgewicht hält, um eine Länge, die sich zu dem Höhenunterschiede verhält, wie das spez. Gewicht der Luft zu dem des Quecksilbers, unter gewöhnlichen Umständen also wie 0,0012:13,6 oder ungefähr wie 1:11000; d. h. auf 11 m Anstieg sinkt das Barometer um etwa 1 mm. — Da die Luft ein dem Barometerstande selbst proportionales, also mit der Höhe kleiner werdendes spez. Gewicht hat, so nimmt der Barometerstand nicht gleichmäßig mit der Höhe ab, sondern in geometrischer Progression. Folglich muß der Logarithmus des Barometerstandes mit wachsender Höhe gleichmäßig abnehmen, denn ein Logarithmus ändert sich gleichmäßig, wenn die Zahl sich in geometrischem Verhältnis ändert; $\lg ax = \lg x + \lg a$. — Vgl. auch die Ableitung folg. S. — Anleitung, Tafeln usw. z. B. bei Liznar, die barometrische Höhenmessung, 1903.

I. Der Höhenunterschied h zwischen benachbarten Stationen, an denen gleichzeitig die Barometerstände b_0 und b_1 bestehen, ist proportional $\lg b_0 - \lg b_1$, und zwar beträgt h in Metern:

$$h = 18400\,(1 + 0{,}004\,t)\,(\lg b_0 - \lg b_1),$$

wofür bis zu Höhendifferenzen von etwa 1000 m auch der be-

quemere genäherte Ausdruck gesetzt werden kann

$$h = 16000\,(1 + 0{,}004\,t)\cdot(b_0 - b_1)/(b_0 + b_1).$$

t bedeutet die mittlere Temperatur der Luftsäule.

In diesen Formeln ist halbe Sättigung der Luft mit Wasserdampf und die für 45^0 geltende Schwere angenommen. Die Logarithmen sind die gewöhnlichen briggischen.

II. Um die Veränderlichkeit der Schwere und der Luftfeuchtigkeit zu berücksichtigen, bezeichnen wir mit

φ die geographische Breite,

H die mittlere Meereshöhe der beiden Orte in Metern (der Einfluß wird selten merklich);

e_0 und e_1 die Spannkraft des Wasserdampfes an den beiden Stationen (47) und setzen zur Abkürzung

$k = \frac{1}{2}(e_0/b_0 + e_1/b_1)$.

Dann berechnet man die Höhendifferenz

$$h = 18430\,(\lg b_0 - \lg b_1)\,(1 + 0{,}00367\,t)$$
$$\cdot(1 + 0{,}0026 \cos 2\varphi + 0{,}0000002\,H + \tfrac{3}{8}k).$$

Beweis der Formeln. Man geht von einer so kleinen Höhenänderung dH aus, daß innerhalb dieser Höhe die Dichtigkeit der Luft λ als konstant angenommen werden darf. Sie beträgt (18 u. S. 127), wenn wir $0{,}0026 \cdot \cos 2\varphi = \delta$, $0{,}0000002 = \varepsilon$ und $0{,}00367 = \alpha$ setzen,

$$\lambda = \frac{0{,}001293}{1 + \alpha t}\,\frac{b - \frac{3}{8}e}{760}\,(1 - \delta - \varepsilon H).$$

Die Dichtigkeit des Quecksilbers von 0^0 ist $= 13{,}596$. Folglich gilt, wenn zu dH die Änderung $-db$ des Barometerstandes gehört, $13{,}596 \cdot (-db) = \lambda \cdot dH$, und man hat

$$-db = \frac{0{,}001293}{13{,}596 \cdot 760}\,(b - \tfrac{3}{8}e)\,\frac{1 - \delta - \varepsilon H}{1 + \alpha t}\,dH.$$

Hierin ändern sich eigentlich, in unbekannter Weise, t und e mit der Höhe; wir setzen die aus den beiden Endstationen erhaltenen Mittelwerte von t und von $e/b = k$ ein. Rechnet man dann den Zahlenfaktor aus und behandelt die kleinen Größen $\frac{3}{8}k$, δ und εH nach S. 9 als Korrektionsgrößen, so kann man schreiben

$$-7991000\,(1 + \alpha t)\,(1 + \delta + \tfrac{3}{8}k)\cdot db/b = (1 - \varepsilon H)\,dH.$$

Wird jetzt integriert, auf der linken Seite von b_0 bis b_1, auf der rechten von H_0 bis H_1, so kommt

$$7991000\,(1 + \alpha t)\,(1 + \delta + \tfrac{3}{8}k)\,(\lg\text{nat}\,b_0 - \lg\text{nat}\,b_1)$$
$$= (H_1 - H_0)\,[1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon(H_1 + H_0)].$$

Endlich setzen wir $\lg\text{nat}\,b = 2{,}3026 \lg\text{brigg}\,b$, behandeln $\frac{1}{2}\varepsilon\,(H_1 + H_0) = \varepsilon H$ als Korrektionsglied und erhalten

$$H_1 - H_0 = h = 18400000\,\text{mm}\cdot(\lg b_0 - \lg b_1)\,(1 + \alpha t)\,(1 + \delta + \varepsilon H + \tfrac{3}{8}k).$$

Der Faktor 18400 m ist wegen der bisher vernachlässigten Abnahme der Schwere des Quecksilbers mit der Höhe noch um $\frac{1}{6}$ %, also auf 18430 zu vergrößern. Denn auf 1 m Erhebung beträgt jene $\frac{1}{5000000}$, während der Druck um $\frac{1}{8000}$ abnimmt. Also war die Höhen-Abnahme des Barometerstandes um $\frac{8000}{5000000} = \frac{1}{600}$ zu groß angesetzt.

Die Näherungsformel I ergibt sich, wenn man halbe Sättigung der Luft mit Wasserdampf annimmt, nach **18** Formel 2.

Die unter I für kleine Höhenunterschiede gegebene Formel ist nichts anderes als die obige Differentialformel, welche mit Mittelwerten von δ und k wird $-7990000(1+\alpha t)\,\mathrm{d}b/b = \mathrm{d}H$; $\mathrm{d}H$ ist der Höhenunterschied. Für den Unterschied der Barometerstände $-\mathrm{d}b$ schreiben wir $b_0 - b_1$, setzen den mittleren Stand $b = \frac{1}{2}(b_0 + b_1)$, lassen beim Übergange vom mm zum m 3 Nullen fort und erhöhen 7990 wegen der Schwerekorrektion um $\frac{1}{600}$ auf rund 8000.

Sehr große Höhen. Ballonhöhen von vielen tausend Metern sollen nach der vollständigen Formel zu klein ausfallen und zutreffender ohne individuelle Rücksicht auf Temperatur usw. als $h = 18590(\lg b_0 - \lg b_1)$ berechnet werden. Maillard, C. R. 136, 1427. 1903; ZS f. Instr. 1904, 123.

Hypsometer. So nennt man einen leicht transportabelen Apparat, der die Siedetemperatur des Wassers sehr genau bestimmen läßt; Tabelle 14a gibt die zusammengehörigen Siedetemperaturen und Barometerstände. Da 1 mm Barometerstand etwa $\frac{1}{25}$ Grad entspricht, so werden große Vorsichtsmaßregeln der Temperaturbestimmung (**40** II) verlangt. Neuerdings ist aber die Sicherheit der Messung bis auf etwa $\pm 0{,}02$ mm des Barometerstandes gesteigert worden.

Vgl. z. B. Grützmacher, ZS f. Instr. 1897, 193; Mohn, Videnskabsselsk. Skriften I, Math. nat. Kl., Kristiania 1899 Nr. 2; Meteor. ZS 25, 193. 1908; Hecker, Best. der Schwerkraft auf d. Atlant. Ozean etc. Berlin 1903.

Reduktion eines Barometerstandes auf Meereshöhe. Die internationale Meteorologie korrigiert einen für die Höhe H geltenden Barometerstand b auf Meereshöhe, indem sie zu $\lg b$ die Größe addiert:

$$\frac{H(1-\frac{3}{8}e/b)}{(18429+67{,}5t+0{,}003H)(1+0{,}0026\cos 2\varphi)}.$$

Wärme.

39. Temperaturmessung. Formen von Thermometern.

Da fast jeder Vorgang von der Temperatur abhängt, so bietet grundsätzlich fast jedes Gebiet von Erscheinungen ein Mittel zur Temperaturmessung. Bevorzugt werden bis jetzt Ausdehnung, Strahlung, Elektrizitätserregung, elektrische Leitfähigkeit.

Über Temperaturbäder etc. s. 8, 27.

„Luftfreie" Quecksilberthermometer können von -39^0 bis etwa $+300^0$ brauchbar sein; meistens zerreißt der Faden bereits in tieferer Temperatur, besonders wenn Luftspuren sich im Quecksilber befinden. Man beseitigt diese, indem man mittels Abkühlung durch Kältemischungen, verdampfenden Äther, feste Kohlensäure, das Quecksilber sich ganz in die Kugel zusammenziehen läßt. Endigt die Kapillare oben in eine Erweiterung (Birne), die auch gegen das Zerspringen bei unvorsichtiger zu hoher Erwärmung schützt, so bringt man den am Luftbläschen abgerissenen Faden in die Birne. Das übrige Quecksilber läßt sich dann durch Umkehren des Thermometers oder nötigenfalls durch Anwärmen gleichfalls bis in die Birne bringen. Dort läßt man die Quecksilbermengen zusammenfließen und kühlt nun langsam in vertikaler Stellung ab.

Die Erweiterung dient oft auch zum Abtrennen eines Teiles des Quecksilbers, um dasselbe Instrument in höherer Temperatur gebrauchen zu können, als die Skale angibt. Man vergleicht nachher einen Punkt der Skale mit einem Normalthermometer. Außerdem ist aber der Skalenwert, wenn man a Grade abgetrennt hat, im Verhältnis $1 + 0{,}00016\,a$ größer anzunehmen, weil die abgetrennte Säule selbst um $0{,}00016\,a$ Grade (**40** V) auf jeden Grad wachsen würde.

1. 2.

130 120 110 100 30 20 10 0

3 2 1 0

Unter dem Namen Beckmann'sches Thermometer ist, besonders bei Gefrierpunktsbestimmungen, die Form 1 gebräuchlich, welche eine sehr weite Teilung hat. Abgeänderte Formen ZS f. phys. Ch. 51, 329. 1905. — Nr. 2 ist zunächst von 0 bis 30^0 und von 100 bis 130^0 brauchbar. Die obere Erweiterung läßt Quecksilber abtrennen, um die verwendbaren Intervalle von 30 Graden höher legen zu können.

Ein Quecksilberthermometer zeigt wegen des „toten Ganges" bei sinkender Temperatur weniger sicher als bei steigender. Klopfen mit einem Stückchen Holz vor der Ablesung ist bei genauen Messungen stets anzuraten.

Für die Gestalt der Gefäße kann in Betracht kommen: eine große Oberfläche im Interesse raschen Wärmedurchganges, unter Umständen eine gestreckte Form auch zu dem Zwecke, die Mitteltemperatur eines Raumes

anzuzeigen; geringe Wandstärke für Wärmedurchlaß, andererseits nicht zu geringe wegen Zerbrechlichkeit und Einfluß des Druckes und der Neigung (**40** III). — Größere Quecksilbermassen sind wegen der zum Wärmeausgleich nötigen Zeit sehr vorsichtig zu gebrauchen.

In hoher Temperatur achte man auch auf etwaiges Abdestillieren von Flüssigkeit.

Hochgehende Thermometer enthalten über dem Quecksilber Stickstoff oder Kohlensäure. Mit Hilfe des schwer schmelzbaren Jenaer Glases Nr. 59 werden jetzt Skalen bis 550° ermöglicht; bei solchen Thermometern ist auf Explosionsgefahr zu achten, da der Druck über dem Quecksilber wegen dessen Dampfspannung 14 Atmosphären übersteigen muß.

Flüssigkeiten für Temperaturen unterhalb — 39°. Bis — 100° etwa kann Alkohol oder besser Toluol gebraucht werden, bis zur Temp. der siedenden Luft bleiben Petroläther, der durch Fraktionieren auf etwa 15° Siedepunkt gebracht ist, oder besser „technisches Pentan" hinreichend beweglich. Solche Flüssigkeiten haben den Nachteil erstens daß sie die Wärme schlecht leiten, zweitens daß sie die Kapillare benetzen. Man tauche anfangs nur die Kugel ein, so daß die Flüssigkeit im Rohre nicht zähe wird, ehe sie ihrem tiefsten Stande nahe gekommen ist. — Wegen der ungleichförmigen Ausdehnung nehmen die Gradlängen nach unten ab. Die Skale kann nach Ausdehnungsformeln geteilt werden, ist aber nach einem Normal oder nach dem Gasthermometer (**42**) oder nach bekannten Fixpunkten (z. B. feste Kohlensäure; vgl. S. 46) zu kontrolieren.

Vgl. z. B. Holborn u. Wien, Wied. Ann. 59, 213. 1896; F. K. ib. 60, 463. 1897; Hoffmann u. Rothe, ZS f. Instr. 1907, 265.

Ablesung. „Einschlußthermometer" mit feiner Kapillare vor der Teilung können mit bloßem Auge, mit Lupe oder Fernrohr abgelesen werden. Zu feineren Ablesungen an Stabthermometern benutzt man das Fernrohr: man richtet z. B. das Thermometer durch Visieren nach einem Senkel, Fensterrahmen u. dergl. vertikal und bringt das Fernrohr in die Höhe des abzulesenden Teilstriches. Am sichersten, besonders bei geringem Abstande des Fernrohrs (Mikroskops) liest man ein durchsichtiges Stabthermometer von vorn und rückwärts ab und nimmt das Mittel; dabei dreht man das Thermometer in sich, ohne es der Länge nach zu verschieben.

Einfacher dient zur Vermeidung der Parallaxe ein hinter das Thermometer angedrücktes Spiegelstreifchen; man hält das Auge so, daß sein Spiegelbild in der Höhe der Quecksilberkuppe liegt. Bei der Ablesung mit einer Lupe bietet auch die Krümmung der in unrichtiger Höhe liegenden Teilstriche ein Mittel zur richtigen Augenstellung.

40. Quecksilberthermometer. Eispunkt und Siedepunkt.

Zunächst werde das Quecksilberthermometer für sich betrachtet und als richtig („in sich richtig" pflegt man zu sagen) bezeichnet, wenn seine beiden fixen Punkte 0^0 bez. 100^0 der Temperatur des schmelzenden Eises, bez. des bei 760 mm Quecksilberdruck (**37**) siedenden Wassers entsprechen und wenn zweitens alle Skalenteile gleiches Volumen haben. — Über die weitere Aufgabe, das Instrument auf die, wissenschaftlich angenommene Gas-Temperaturskale zu reduzieren, siehe VII.

Das Quecksilberthermometer verdankt seine jetzige Brauchbarkeit als genaues Instrument wesentlich den neuen, gut definierten und mit den Fehlern der alten Glassorten nur noch wenig behafteten, großenteils aus dem Jenaer Glaswerk stammenden Thermometergläsern. Bei feinen thermometrischen Messungen ist freilich auch hier, wenn die Temperatur größeren Schwankungen unterliegt, Rücksicht darauf zu nehmen, daß der Stand des Thermometers, wegen der Nachwirkung von Ausdehnungen des Glases, durch die vorausgehenden Zustände etwas beeinflußt wird; vgl. III.

Wir setzen indessen zunächst voraus, daß das Instrument bei jeder Messung schon so lange in der Nähe der abgelesenen Temperatur verweilt habe, daß es zur Ruhe gekommen ist. Als („stabiler") Nullpunkt soll also der Punkt gelten, an welchem sich nach längerem, wenn das Thermometer vorher stark erwärmt war, unter Umständen nach sehr langem Verweilen im Eise das Quecksilber einstellt. — Über eine andere Art zu rechnen vgl. IV.

Eine Zusammenstellung der bei dem Quecksilber-Thermometer in Betracht kommenden Gesichtspunkte s. z. B. bei Scheel, Vereinsbl. d. Deutsch. Ges. f. Mech. u. Opt. 1897, 91, 97, 105.

Andere Fixpunkte. Umwandlungstemperaturen wasserhaltiger Salzkristalle. $Na_2SO_4 + 10\,H_2O$ (Glaubersalz) schmilzt bei $32{,}38^0$, d. h. es verwandelt sich in wasserfreies Salz und Wasser; Richards u. Wells, ZS phys. Ch. 43, 465. 1903. Über Methode und andere Salze s. ib. 56, 348. 1906 (NaBr); 61, 313. 1908 ($MnCl_2$); Ostwald-Luther S. 71. —

Siedepunkte; s. Tab. 12 u. 12a. Nach Crafts und Holborn u. Henning (Ann. d. Ph. 26, 865. 1908) gilt unter dem Druck $(760 + h)$ mm für:

Naphthalin	$218{,}04^0 + 0{,}0585\,h - 0{,}000025\,h^2$
Benzophenon	$306{,}08^0 + 0{,}0638\,h - 0{,}000025\,h^2$
Schwefel	$445{,}0^0 + 0{,}0912\,h - 0{,}000042\,h^2$.

I. Eispunkt.

Man taucht das Thermometer in reinen schmelzenden Schnee oder reines (gewaschenes), fein zerstoßenes, besser etwa mit einem Böttchermesser geschabtes oder auf einem Reibeisen zerkleinertes oder endlich durch Gefrieren destillierten Wassers in einer Kältemischung (8, 27) gebildetes, salzfreies Eis, mit

destilliertem Wasser zu einem Brei angefeuchtet; künstliches Handels-Eis ist wegen Salzgehaltes bedenklich.

Die Quecksilbersäule soll möglichst ganz in das Eis eintauchen; Einschlußthermometer sind bis über den Nullpunkt einzusenken und nur während der Ablesung oben soweit nötig vom Eise zu befreien, nicht etwa herauszuziehen, da hierbei die Luft einströmt. Besondere Beachtung verlangt das etwaige Abschmelzen des Eises von der Quecksilberkugel, welches beträchtliche Fehler bewirken kann. Die Fehlerquellen werden viel kleiner, wenn man die Bestimmung in einer Umgebung vornehmen kann, deren Temperatur wenig über 0^0 liegt.

Dem Punkte, auf welchen sich die Quecksilbersäule einstellt, nachdem das Thermometer die Temperatur des Eises angenommen hat, entspricht die Temperatur Null.

Der stabile Nullpunkt ist vor dem Siedepunkt zu bestimmen; vgl. III, 3.

II. Siedepunkt.

Man bringt das Thermometer in die Dämpfe von Wasser, welches in einem Metallgefäß oder auch einem Glasgefäß mit hineingeworfenen Metallstücken kräftig siedet. Die Temperatur des Wasserdampfes ergibt sich aus dem Druck, unter welchem das Wasser siedet, d. h. aus dem nach **37** reduzierten Barometerstande mit Hilfe von Tab. 14a. Bis auf $\frac{1}{100}$ Grad richtig findet man zwischen 715 und 775 mm für den Barometerstand b die Siedetemperatur t

$$t = 100^0 + 0{,}0375^0 \cdot (b - 760).$$

Die Thermometerkugel wird nicht in das siedende Wasser gebracht, sondern etwas über die Oberfläche. Es soll möglichst die ganze Quecksilbersäule sich im Dampf befinden. — Der Ausgang für die Dämpfe muß so weit sein, daß im Siedegefäß kein Überdruck entsteht, oder man mißt den Überdruck mittels eines aus dem Dampfraum am Thermometer kommenden Wassermanometers. Der 14. Teil der gehobenen Wassersäule wird zu dem Barometerstande hinzugezählt. — Die Flamme soll die nicht benetzten Teile der Gefäßwände nicht bespülen. — In dem neben gezeichneten Gefäß

braucht die Quecksilberkugel nicht dicht über dem Wasser zu stehen. — Die Durchwärmung bedarf besonders bei Einschlußthermometern einiger Zeit. Man lese also erst ab, wenn der Stand unveränderlich ist.

Beispiel. Reduzierter Barometerstand (37) = 742 mm. Also wahre Siedetemperatur (Tab. 14a) = 99,33° (aus der Formel 100 — 0,0375·18 = 99,33°). Das Thermometer zeigte 99,80. Folglich liegt die Temp. 100° bei dem T. Str. 99,80 + 0,67 = 100,47; Korrektion der Ablesung = — 0,47°.

III. Veränderlichkeit der Fixpunkte.

1. Neigung und Druck. Die meisten Thermometer sind darauf berechnet, daß sie in vertikaler Stellung gebraucht werden. Man muß das bei langen Thermometern beachten, da sie in anderer Stellung wegen des verminderten Innendrucks etwas höher zeigen. Der Einfluß wird empirisch bestimmt: Zeigt das Thermometer dieselbe Temperatur in horizontaler Lage um δ höher an als in vertikaler, so beträgt die Korrektion des Thermometers auf vertikale Lage bei einer Neigung um den Winkel φ gegen diese $\delta \cdot \sin\varphi$. Der Faktor δ ist der von der Mitte des Quecksilbergefäßes gemessenen Höhe der Quecksilbersäule proportional, also mit der Temperatur variabel (aber bei eingeschalteten Erweiterungen nicht der Anzahl der Grade proportional). — Eis- und Siedepunkt lassen sich unschwer auch in horizontaler Lage ermitteln. Vgl. z. B. Melander, ZS f. Instr. 1894, 139.

Auf empfindliche Thermometer hat auch veränderlicher äußerer Druck, z. B. die Tiefe des Eintauchens oder der wechselnde Barometerstand einen der Änderung proportionalen Einfluß, den man empirisch ermitteln, aber in der Regel auch um etwa 10 Proz. kleiner als den inneren Druckkoeffizienten δ ansetzen kann. δ beträgt durchschnittlich auf eine Druckzunahme um 1 mm Quecksilber etwa $\frac{1}{8000}$° C.; δ ist also für eine l mm lange Quecksilbersäule durchschnittlich auf $\frac{1}{8000}\,l$° C. zu schätzen.

2. Allmähliches Aufrücken der Fixpunkte. Wegen der langsamen Zusammenziehung des geblasenen Glases rücken die beiden festen Punkte neu hergestellter Thermometer aufwärts, und zwar um nahe gleich viel. Das Aufrücken dauert mit verminderter Geschwindigkeit unter Umständen jahrelang fort und kann mehr als 1° betragen; durch „künstliches Altern“, d. h. langes Erwärmen, etwa auf Siedetemperatur, wird der Prozeß beschleunigt. Bei den neueren Thermometergläsern Jena Nr. XVI und besser noch bei Nr. 59 tritt diese und die unter Nr. 3 genannte Veränderlichkeit nicht mehr so stark auf.

3. Depression der Einstellungen nach Erwärmungen. Das Glas erreicht ein durch Temperaturänderung ihm endgültig zukommendes neues Volumen erst im Laufe der Zeit. In höherer Temperatur, z. B. schon bei 100° verläuft der Prozeß rasch, in niedriger Temperatur viel langsamer. Es läßt also jede Erwärmung eine Erweiterung des Gefäßes (Nachwirkungs-Dilatation) und dadurch einen tieferen Stand des Queck-

silbers, eine nach der Glassorte und der Größe und Dauer der Erwärmung verschiedene „Depression des Nullpunktes" zurück. Dieselbe verliert sich mit der Zeit anfangs rascher, später langsamer und kann nach längerer stärkerer Erwärmung wochenlang merkbar bleiben.

Dies ist der Grund, aus welchem der stabile Eispunkt eines Thermometers nicht kurze Zeit nach einer erheblichen Erwärmung, im allgemeinen also z. B. vor dem Siedepunkt zu bestimmen ist.

Bei Thermometern, die in höherer Temperatur gebraucht werden, ist das Warten oft unbequem. Zur Kontrole ihrer Unveränderlichkeit kann aber anstatt des stabilen Eispunktes auch der „für 100° maximal deprimierte Eispunkt" dienen, d. h. der Punkt, den das Instrument nach längerem, etwa halbstündigem Verweilen in siedendem Wasser gleich nachher als vorübergehenden tiefsten Stand im Eise zeigt. Dieser Punkt charakterisiert das Thermometer mit derselben Bestimmtheit wie der stabile Eispunkt.

Die Anfangsdepression nach langer Erwärmung auf t^0 läßt sich durch den Ausdruck $at + bt^2$ darstellen; a und b hängen von der Glassorte ab. Zwischen 0 und 100° ist für mittleres Thüringer Glas (welches Kali und Natron enthält) a, für Jenaer Thermometerglas und das französische Thermometerglas Verre dur (die wesentlich nur ein Alkali enthalten) b klein gefunden. Nach längerer Erwärmung auf t^0 beträgt die Depression in Hunderteln Grad für Jena XVI $0{,}065\,t + 0{,}0003\,t^2$; Jena 59 $0{,}049\,t - 0{,}00015\,t^2$; Verre dur $0{,}100\,t + 0{,}00009\,t^2$. (Thiesen, Scheel und Sell, ZS f. Instr. 1896, 58.) Für $t = 100^0$ bez. 0,09, 0,03 und 0,11°; mittl. Thür. Glas etwa 0,5°.

4. Aufrücken durch starkes Erhitzen. Verweilen in sehr hoher Temperatur kann, auch ohne Einwirkung des Luftdrucks, ein dauerndes, Zusammenziehen des Glases und dadurch ein, unter Umständen erhebliches Hinaufrücken (bis + 20°) der festen Punkte zur Folge haben. Thermometer für hohe Temperaturen sind vor der Ingebrauchnahme einige Tage lang zu erhitzen und langsam zu kühlen. Öfteres Kontrolieren des Eispunktes ist stets anzuraten.

IV. Thermometrie mit steter Nullpunktsbestimmung.

Bei der eingangs gegebenen Definition der Temperaturskale wurde, dem gewöhnlichen Gebrauch des Thermometers entsprechend, angenommen, daß dieses bei allen Messungen, auch bei der Nullpunktsbestimmung zur Ruhe kommt. Wird das Thermometer nur in mittleren Temperaturen benutzt, so variiert der Nullpunkt selbst bei Intervallen von 20° höchstens um einige Hundertel Grad. Sind dagegen die Schwankungen groß, so führt zu einer weit höheren Genauigkeit ein anderes, freilich für gewöhnliche Zwecke zu umständliches Verfahren (Pernet).

Insofern nämlich der Abstand zwischen dem Siedepunkt (100°) und dem gleich nach diesem bestimmten Nullpunkt konstanter und außerdem leichter zu bestimmen ist, als das gewöhnlich benutzte Intervall, weil man hier unter Umständen lange warten muß; weiter, da vorausgegangene

andere Temperaturen die folgenden Einstellungen beeinflussen; endlich, da die Depression des Nullpunktes nicht der Temperatur proportional ist (wodurch zwischen den beiden Definitionen sogar eine kleine Differenz entsteht), so brauchen feine thermometrische Messungen die folgenden Definitionen:

1. Grad ist der 100te Teil der Strecke zwischen dem Siedepunkt und dem gleich nach dem Sieden gefundenen Eispunkt.

2. Die Temperatur t wird immer von demjenigen Nullpunkt gerechnet, welchen man unmittelbar nach der Temperaturbeobachtung findet oder finden würde. (Der Nullpunkt ist in dieser Definition also eine veränderliche Größe.) Vgl. über die Berechnung III 3.

Literatur zu III u. IV: Pernet, Thermometrie in Winkelmann, Handbuch II 2; Guillaume, Traité prat. de la thermométrie, Paris 1889; Pernet, Jaeger u. Gumlich, Abh. d. P. T. Reichsanst. I; ZS f. Instr. 1895, 2, 41, 81 u. 117. Siehe daselbst die frühere Literatur, u. A. von Benoît, Guillaume, Thiesen, Wiebe.

V. Herausragender Faden.

Darin daß es oft nicht möglich ist, das Thermometer ganz in den Raum einzutauchen, der gemessen werden soll, liegt eine empfindliche, mit der Höhe der Temperatur beschleunigt steigende Fehlerquelle.

Die Thermometerskale nimmt an, daß das ganze Quecksilber die zu messende Temperatur hat. Bleibt, wie gewöhnlich, ein Teil des Fadens außerhalb, und hat die Umgebung eine andere Temperatur, so ist folgendermaßen zu korrigieren. Der „scheinbare Ausdehnungskoeffizient" des Quecksilbers im Glase, d. h. der Unterschied der Volum-Ausdehnungskoeffizienten beider Substanzen beträgt für gewöhnliches und Jenaer Thermometerglas Nr. XVI 0,000157, für Jen. Therm.-Glas Nr. 59 0,000163, für Verre dur 0,000158; also hat man zu der Ablesung t hinzuzufügen

$$0{,}000157 \text{ bez. } 0{,}000163 \text{ oder } 0{,}000158 \times a(t - t_0), \qquad 1.$$

wenn t_0 die Mitteltemperatur, a die in Graden ausgedrückte Länge des herausragenden Fadens ist. Bezüglich t_0 muß man sich häufig mit einer Schätzung begnügen; am sichersten ist es also, herausragende Fäden zu vermeiden. Die Ermittelung von t_0 geschieht folgendermaßen:

1. Man nimmt ein kleines Hilfsthermometer, dessen Gefäß etwa in der mittleren Höhe des herausragenden Fadens angebracht ist, oder mehrere in verschiedenen Höhen angebrachte, und beurteilt die Temperatur des Fadens aus den Ablesungen am Hilfsinstrument.

Über die Anwendung einer Korrektionsröhre neben dem Thermometer vgl. Guillaume, C. R. 112, 87. 1891. Über ein Fadenthermometer hierfür s. Mahlke, ZS f. Instr. 1893, 58; 1894, 73; auch Adam, ib. 1907, 101.

2. Ein anderes Verfahren ist das folgende (Mousson, Wüllner). Man setzt für den herausragenden Faden die Temperatur des Zimmers, aber als Fadenlänge, welche sich auf dieser Temperatur befindet, nicht die ganze herausragende Länge, sondern man zieht von dieser Länge eine

konstante Größe α ab, welche sich folgendermaßen bestimmt. Das Thermometer zeige in einem warmen Bade von konstanter Temperatur (etwa dem Siedegefäß S. 146) die Einstellung T, wenn es ganz eintaucht, während es, um $\varDelta$ Grade herausgezogen, nach einiger Zeit nur t anzeige. τ_0 sei hierbei die Lufttemperatur. Den scheinb. Ausd.-K. des Quecksilbers im Glase $= 0{,}00016$ gesetzt berechnet man die Konstante dann

$$\alpha = \varDelta - \frac{1}{0{,}00016} \cdot \frac{T - t}{t - \tau_0} . \qquad 2.$$

Das so gefundene α ist also bei diesem Thermometer immer von der herausragenden Fadenlänge a abzuziehen und dann die Korrektion nach der Formel 1, v. S., aber mit t_0 als Lufttemperatur zu berechnen.

Tabellen für gebräuchliche Thermometerformen s. in Landolt-Börnstein-Meyerhoffer Tab. 3. Aufl. 1905.

VI. Trägheit des Thermometers.

Die Zeit bis zum Ausgleich der Temperaturen von Thermometer und Umgebung ist oft größer als man denkt. Sie hängt einerseits von Volumen, Gestalt und Wandstärke des Thermometergefäßes, von Leitvermögen, Wärmeausdehnung, Zähigkeit und spez. Wärme der Thermometerflüssigkeit ab, andrerseits von Wärmeleitvermögen, spez. Wärme und insbesondere dem Bewegungszustande des umgebenden Mediums. — Je höher die Temperatur, desto rascher pflegt, z. B. auch durch die Strahlung begünstigt, der Ausgleich zu verlaufen.

Hinter einer raschen Temperaturänderung bleibt, trotz Rühren usw., jedes Thermometer zurück. Um diese „Trägheit" größenmäßig zu berücksichtigen, darf der Vorgang im allgemeinen nach dem Newton'schen Abkühlungsgesetz beurteilt werden, wonach die Änderungsgeschwindigkeit $dt/d\tau$ (τ die Zeit) des Thermometers dem derzeitigen Temperaturunterschied t gegen die Umgebung proportional ist. $k \cdot dt/d\tau$, wo k die Trägheitskonstante darstellt, gibt also den Betrag, um welchen die Thermometertemperatur in dem betreffenden Augenblicke hinter der gesuchten zurück ist.

Ermittelung von k. (Es wird vorausgesetzt, daß Thermometer und Umgebung sich in demselben Zustande befinden, wie bei der zu korrigierenden Messung.)

1) Man bringt in den Raum, zugleich mit dem zu untersuchenden, ein zweites, so kleines Thermometer (am besten Thermoelement oder Widerstandsthermometer; vgl. **43**) daß dieses der Temperatur merklich sofort folgt. Bleibt bei der Änderungsgeschwindigkeit $dt/d\tau$ das zu untersuchende Thermometer um $\varDelta$ zurück, so ist $k = \varDelta : (dt/d\tau)$.

2) Man bringt das vorher erwärmte (oder gekühlte) Thermometer in den betreffenden Raum von konstanter (nötigenfalls durch ein zweites Thermometer kontrolierter) Temperatur und verfolgt den Ausgleich mit der Uhr. Am einfachsten stellt man diesen Gang in einer Kurve dar, mit τ als Abszisse, t als Ordinate und bestimmt mit dem Lineal das Gefälle

$dt/d\tau$ an einem Punkte. Hat dieser die Ordinate t, so findet man wieder $k = t : \frac{dt}{d\tau}$; aus der Übereinstimmung der an mehreren Punkten gefundenen k wird ersehen, wie nahe das Newton'sche Gesetz gilt.

Statt dessen kann man auch die Beobachtungen durch die Formel $t = A \cdot e^{-k\tau}$ darstellen; k ist dann die Trägheitskonstante. Über kleinste Quadrate s. S. 18.

Vgl. u. a. F. K. u. Loomis, Pogg. Ann. 141, 487. 1870; Jaeger u. v. Steinwehr, Verh. D. Ph. Ges. 1903, 50 u. 353; ZS f. physik. Ch. 54, 428. 1906; Richards, Lawrence, Henderson u. Forbes, ib. 52, 551. 1905.

Eine andersartige, mit der Reibung des Quecksilbers usw. zusammenhängende, besonders bei fallendem Thermometer merkliche Trägheit, der „tote Gang", wird durch Klopfen mit einem Holzstäbchen vor dem Ablesen beseitigt.

VII. Korrektion auf das Gasthermometer (42).

Das Quecksilber dehnt sich, verglichen mit vollkommenen Gasen, nicht genau gleichförmig, sondern etwas beschleunigt aus. Sein Volumen bei t^0 Wasserstofftemperatur beträgt zwischen 0 und 100°:

nach Thiesen, Scheel und Sell $v_t = v_0(1 + 0{,}0001816\,t + 0{,}0_8 78\,t^2)$,

nach Chappuis $v_t = v_0(1 + 0{,}00018169\,t - 0{,}0_8 2951\,t^2 + 0{,}0_9 11456\,t^3)$.

Dasselbe gilt vom Glase, aber nach den Sorten in verschiedener Stärke. Offenbar würde eine Glassorte, die eine ebenso starke (absolute) Ungleichmäßigkeit der Volumausdehnung zeigte, wie das Quecksilber, ein Thermometer ergeben, dessen Angaben mit dem Gasthermometer übereinstimmen. In Wirklichkeit aber zeigen die Quecksilberthermometer aus den meisten Glassorten, wenn Eispunkt, Siedepunkt und Kaliber richtig sind, zwischen 0 und 100 etwas zu hoch; weiter hinauf verhalten sie sich verschieden. Die Abweichungen können bei ungünstigen Glassorten bis 150 0,5°, bis 250 4°, bis 350 10° erreichen.

Die Korrektionen der modernen Thermometergläser, bis 100° auf Wasserstoff, oberhalb 100° auf Luft, s. in Tab. 10. Einen Vergleich der Wasserstoff- mit der Luft-Skale s. S. 160.

Über ungleiche Ausdehnung von Skalen- und Thermometerglas, besonders bei Glas 59, vgl. Wiebe u. Moeller, ZS f. Instr. 1908, 137.

In den Prüfungsscheinen sind diese Korrektionen bereits berücksichtigt!

Zahlenzusammenstellungen nach den Beobachtungen von Chappuis, Grützmacher, Lemke, Thiesen, Scheel und Sell, Wiebe und Böttcher s. bei Scheel, Wied. Ann. 58, 168. 1896; Grützmacher, Wied. Ann. 68, 769. 1899. — Über das relative Verhalten von Stickstoff und Wasserstoff Chappuis, Trav. et Mém. du Bur. int. des poids et mes. XIII, 1903. — Vgl. auch **42**, S. 160.

41. Kalibrierung eines Thermometers.

Ein Thermometer ist in sich richtig, wenn die Fixpunkte stimmen und das Volumen aller Skalenteile gleich groß, d. h. bei linearer Einteilung,

wenn der Querschnitt konstant ist. Wegen der Abweichungen von der letzteren Bedingung sind käufliche Thermometer in hohen Temperaturen zuweilen sehr unrichtig.

Eine Korrektionstabelle wird durch Kalibrieren mittels eines von der übrigen Masse abgetrennten Quecksilberfadens in Verbindung mit der Bestimmung der Fixpunkte folgendermaßen erhalten.

(Über die Korrektion auf die Gasskale vgl. **40** VII u. Tab. 10.)

Ablösen eines Fadens. Man hält das, als luftleer vorausgesetzte, Thermometer verkehrt und führt einen leichten Stoß gegen das Ende aus. Bei einem Einschlußthermometer muß man, damit nicht die Kapillare bricht, vorsichtig sein und statt des Stoßens mit einem plötzlichen Schnellen auszukommen suchen. Es löst sich entweder ein Faden ab oder es fließt das ganze Quecksilber, indem es sich in der Kugel von der Wandung löst. Das Abreißen wird meistens durch ein irgendwo dem Glase anhaftendes mikroskopisches Luftbläschen bewirkt, welches sich zu einer größeren Blase ausdehnt. Reißt das Quecksilber in der Kugel, so läßt man durch rasches Aufrichten des Thermometers die dort gebildete Blase in den Eingang der Röhre aufsteigen, was mit einiger Geduld immer gelingt. Dann reißt die Säule im Eingang der Röhre ab.

Wenn dieser Faden um p Grade länger ist, als gewünscht wird, so erwärmt man, während der Faden abgetrennt ist, die Kugel; die Luft wird vor dem ansteigenden Quecksilber fortgeschoben. Darauf läßt man den Faden rasch zum übrigen Quecksilber zurückfließen und merkt sich die obere Einstellung E im Augenblick des Zusammenfließens. Das Luftbläschen bleibt, wenn die beiden Quecksilbermassen in Berührung getreten sind, im Vereinigungspunkte an der Glasröhre haften. Nunmehr läßt man langsam abkühlen und trennt durch Neigen und Erschüttern einen Faden in dem Augenblick ab, wo die Einstellung $= E - p$ ist.

Ist umgekehrt ein Faden um p zu kurz, so vereinigt man ihn mit der übrigen Masse und erwärmt nach der Vereinigung um p, dann reißt beim Erschüttern usw. die gewünschte Länge ab.

Nach einigen Wiederholungen wird es gelingen, bis auf Bruchteile eines Grades genau Fäden von willkürlicher Länge zu erhalten. Nur für sehr kurze Fäden versagt das Verfahren wohl, so daß man kombinierte Beobachtungen mit verschiedenen Fäden anwenden muß; vgl. unten.

Einstellung und Ablesung des Fadens. Durch gelindes Neigen und Erschüttern läßt sich das eine Ende des Fadens auf einen beliebigen Teilstrich einstellen. Es genügt aber auch, genähert einzustellen und die Zehntel Grade an beiden Enden des Fadens abzulesen. Man mache mindestens zwei Reihen von Beobachtungen im Hin- und Rückgang, um den Temperaturgang zu eliminieren.

Zur Vermeidung der Parallaxe legt man eine Spiegelplatte

unter und hält das Auge so, daß sein Bild mit dem abgelesenen Teilstrich zusammenfällt; liegt das Thermometer hierbei senkrecht zur Verbindungslinie der beiden Augen, so braucht man kein Auge bei dem Ablesen zu schließen. — Oder man stellt eine Lupe oder ein Fernrohr fest auf und verschiebt das Thermometer parallel mit sich selbst. Stabthermometer werden mit Teilung vorn und Teilung hinten beobachtet.

Beobachtung und Berechnung. Das Kalibrieren kann man verschieden ausführen. Um nicht nachher auf verwickelte Rechnungen angewiesen zu sein, stellt man den Plan vorher fest. Eis- und Siedepunkt sollen jedenfalls Endpunkte verglichener Volumina bilden. Beobachtungen nach dem folgenden Schema, mit Fäden von 20° für eine von 0 bis 100 reichende Skale oder auch von 50° für höhere Temperaturen, bei denen ohnehin die Fehlerquellen beträchtlich sind, werden für gewöhnliche Zwecke genügen, vorausgesetzt, daß die Teilung an sich gut und daß das Rohr nicht in besonders hohem Grade unkalibrisch ist.

Die Fadenlänge a, mit welcher kalibriert werden soll, sei in 100 teilbar, also $n = 100/a$ eine ganze Zahl. Der Faden wird folgeweise auf die Strecken von nahe 0 bis a, a bis $2a$ usw. gelegt; er nehme die Anzahl Teilstriche ein:

$$a + \delta_1 \quad a + \delta_2 \cdots\cdots\cdot \quad a + \delta_n \qquad \text{usw.}$$

auf der Strecke 0 bis a $\quad a$ bis $2a \cdots (n-1)a$ bis 100.

Ferner liege 0° bei dem T.-Str. p_0 und 100° bei $100 + p_1$ [man nennt $(p_0 - p_1)/100$ die Gradwert-Korrektion].

Die Größen $\delta_1\ \delta_2 \ldots$ sowie p_0 und p_1 sind also kleine, positive oder negative Zahlen, in Skalenteilen und deren Bruchteilen ausgedrückt. Setzt man nun zur Abkürzung

$$s = \frac{1}{n} \cdot (p_0 - p_1 + \delta_1 + \cdots + \delta_n)$$

(!die Summe der δ nur zwischen 0 und 100 genommen!), so ist

für den Teilstrich	die Korrektion
0	$-p_0$
a	$s - p_0 - \delta_1$
$2a$	$2s - p_0 - \delta_1 - \delta_2$
.	. . . . . .
ma	$ms - p_0 - \delta_1 - \delta_2 - \cdots - \delta_m$.

Oder auch: für den Teilstrich ma ist die Korrektion Δ_m, wenn Δ_{m-1} diejenige für den Teilstrich $(m-1)a$ war,

$$\Delta_m = \Delta_{m-1} + s - \delta_m.$$

Die unter „Korrektion" enthaltenen Größen geben, der danebenstehenden Ablesung algebraisch, d. h. mit Rücksicht auf das Vorzeichen, hinzugefügt, den Stand, welchen das Thermometer mit richtigem Kaliber, Nullpunkt und Siedepunkt zeigen würde.

Für die zwischenliegenden Grade interpoliert man eine Tabelle auf gewöhnlichem Wege, am besten graphisch (**6**).

Beweis. Der Faden, $n$mal aneinandergelegt, nimmt das Volumen von Teilstrich 0 bis 100, vermehrt um $\delta_1 + \cdots + \delta_n$ ein. Da aber 0° bei p_0, 100° bei $100 + p_1$ liegt, also der Vermehrung des Quecksilbervolumens von Teilstrich 0 und 100 eine Temperaturzunahme von $100 + p_0 - p_1$ Graden entspricht, so bedeutet das Volumen des Fadens die Temperaturzunahme

$$1/n \cdot (100 + p_0 - p_1 + \delta_1 + \cdots + \delta_n) = a + s \text{ (s. oben).}$$

Also entspricht einem Steigen des Quecksilbers

vom T.-Str. 0 bis a die Temperatur-Zunahme $a + s - \delta_1$,

" " a " $2a$ " " " $a + s - \delta_2$ usw.

oder vom T.-Str. 0 die Temperatur-Zunahme

bis a	$a +$	$s - \delta_1$
" $2a$	$2a +$	$2s - \delta_1 - \delta_2$
. .	. . .	. . . .
" ma	$ma +$	$ms - \delta_1 - \delta_2 - \cdots - \delta_m$.

Die Ausdrücke hinter dem Strich würden die Thermometer-Korrektionen sein, wenn der T.-Str. 0 richtig wäre. Da ihm die Temperatur $-p_0$ entspricht, so ist überall noch p_0 abzuziehen.

Beispiel. Ein Thermometer für höhere Temperaturen soll, was für gewöhnliche Zwecke genügt, von 50° zu 50° kalibriert werden; also $n = 100:50 = 2$. Ein Faden nahm die Strecken ein

von T.-Str.	0,0	bis	50,9	$\delta_1 = +0,9$
	50,0	"	100,4	$\delta_2 = +0,4$
	100,1	"	150,3	$\delta_3 = +0,2$
	149,8	"	199,6	$\delta_4 = -0,2$ usw.

Der Eispunkt war auf T.-Str. +0,6, die Temperatur 100° auf T.-Str. 99,7 gefunden; also $p_0 = +0,6$, $p_1 = -0,3$ und

$$s = 1/n \cdot (p_0 - p_1 + \delta_1 + \delta_2) = \tfrac{1}{2}(+0,6 + 0,3 + 0,9 + 0,4) = +1,1.$$

Also für Teilstrich	beträgt die Korrektion	
0	$-0,6$	$= -0,6$
50	$1,1 - 0,6 - 0,9$	$= -0,4$
100	$2,2 - 0,6 - 0,9 - 0,4$	$= +0,3$
150	$3,3 - 0,6 - 0,9 - 0,4 - 0,2$	$= +1,2$
200	$+1,2 + 1,1 + 0,2$	$= +2,5$ usw.

Die für 100 berechnete Korrektion liefert teilweise eine Probe der Richtigkeit der Rechnung.

Kalibrieren mit mehreren abgelösten Fäden. Der Faden von der Länge a läßt sich durch mehrere längere Fäden ersetzen, die verschiedene Vielfache von a sind. Durch den Faden ka kann man das Volumen 0 bis a mit ka bis $(k+1)a$ vergleichen, indem man ihn zwischen 0 und ka und zwischen a und $(k+1)a$ bringt usw.; denn das Volumen, welches bei der Verschiebung auf der einen Seite frei wird, ist gleich dem auf der anderen Seite neu eingenommenen.

Um aber alle Teile auf dasselbe Maß zurückzuführen, müssen mehrere Fäden genommen werden, z. B. von der Länge $2a$ und $3a$. Mittels dieser führt man die zu vergleichenden Volumina alle auf möglichst kurzem Wege auf ein und dasselbe Vergleichsintervall zurück, z. B. auf das mittelste. Ein Beispiel wird genügen.

Beispiel. Kalibrierung der Strecke 0 bis 100 von 20 zu 20° mittels zweier Fäden von etwa 40 bez. 60° Länge. Wir wollen alle Beobachtungen auf einen Faden F reduzieren, der das mittelste Volumen von T.-Str. 40 bis 60 gerade ausfüllen würde. Nach früherer Bezeichnung setzen wir also $\delta_3 = 0$.

Der 40°-Faden reiche von $+0,3$ bis 40,0 und von 20,7 bis 60,0. Der Faden F würde somit gereicht haben

von T.-Str. $+0,3$ bis 20,7; also $\delta_1 = +0,4$.

Ebenso führt man durch Beobachtung von 40 bis 80 und 60 bis 100 die Strecke 80 bis 100 auf F zurück. Man finde $\delta_5 = -0,7$.

Dann legen wir einen 60°-Faden zwischen 0 und 60, sowie 20 und 80. Dadurch wird 60 bis 80 auf 0 bis 20 reduziert, und da letzteres bereits mit 40 bis 60 verglichen worden ist, auch auf den Faden F. Die eingenommenen Strecken seien T.-Str. 0,0 bis 60,2 und 20,0 bis 79,6; also ist 0 bis 20 gleich 60,2 bis 79,6. Der Faden F aber ist um 0,4 länger als 0 bis 20, würde also von 60,2 bis 80,0 gereicht haben; also $\delta_4 = -0,2$.

Endlich sei ebenso durch Beobachtungen zwischen 20 bis 80 und 40 bis 100 gefunden $\delta_2 = +0,3$.

Ferner sei $p_0 = +0,1, \quad p_1 = +0,8,$

die Anzahl der Teilstrecken zwischen 0 und 100 ist $n = 5$, also (S. 153)

$$s = \tfrac{1}{5}(+0,1 - 0,8 + 0,4 + 0,3 + 0,0 - 0,2 - 0,7) = -0,18.$$

Die Korrektionstabelle wird unter Benutzung der Formel S. 154:

$$\Delta_m = \Delta_{m-1} + s - \delta_m$$

Teilstrich	Korrektion
0	$-0,10$
20	$-0,10 - 0,18 - 0,4 = -0,68$
40	$-0,68 - 0,18 - 0,3 = -1,16$
60	$-1,16 - 0,18 + 0,0 = -1,34$
80	$-1,34 - 0,18 + 0,2 = -1,32$
100	$-1,32 - 0,18 + 0,7 = -0,80.$

Die letzte Zahl ist eine Probe für die Richtigkeit der Rechnung.

Thermometer mit größeren Korrektionen. Die obigen Schemata setzen voraus, daß das Rohr nicht in hohem Grade unkalibrisch ist. Denn es wurde nicht berücksichtigt, daß δ_1 δ_2 . . . eigentlich nicht Temperaturgrade, sondern Skalenteile bedeuten; auch nicht, daß manche Strecken von dem Faden nicht bedeckt oder doppelt bedeckt waren. Je unrichtiger das Thermometer ist, desto weniger sind diese Vereinfachungen gestattet.

Es wird meist genügen, in einem solchen Falle so zu verfahren: Man wählt einen Faden, der, $n$mal aneinander gelegt, die Strecke vom Eispunkt bis zum Siedepunkt nahe ausfüllen würde, und beobachtet ihn, vom Eispunkt anfangend, in solchen Lagen, daß die nächste sich der vorigen anschließt. Dann rechnet man gerade so wie vorhin. Die Korrektionen gelten aber nicht genau für die Teilstriche 0, a, $2a$ etc., sondern für die ihnen benachbarten Grenzpunkte der Teilstrecken. Eine handliche Korrektionstabelle wird graphisch abgeleitet.

Thermometer für Kalorimeter. Bei diesen kommt höchstens die Strecke 11° bis 28° in Betracht. Um diese einfach zu erhalten, bestimmt man an einem Normalthermometer mit Fäden von 50° bez. 33,3°, deren Länge durch zwei-, bez. dreimaliges Ansetzen zwischen 0 und 100 ermittelt ist, die Punkte 50, 33,3 und 16,7°. Mit diesen Punkten wird dann das kalorimetrische Thermometer im Bade verglichen. Durch einen Faden von 11,1° ermittelt man an ihm selbst noch die Punkte 11,1, 22,2 und 27,8 (Pfaundler). Die meisten kalorimetrischen Versuche kann man so leiten, daß die Temperaturen den genannten Punkten nahe liegen.

Über feinere Methoden und Ausgleichsrechnungen (Bessel, Neumann, v. Oettingen) vgl. z. B. Thiesen, Carl Rep. 15, 285. 1879; Marek, ib. S. 300.

Vergleichung zweier Thermometer.

Meist berichtigt man ein Thermometer durch Vergleich mit einem Normalthermometer. Beide Instrumente werden, die Kugeln dicht nebeneinander, in ein Bad, und zwar wenn die Temperatur von der Umgebung abweicht, in ein reichlich großes Bad gebracht, welches mit Filz und Deckel gegen Wärmeabgabe möglichst geschützt ist. Den Gang der Temperatur eliminiert man durch alternierendes Ablesen. Vor jeder Ablesung wird gerührt. In hohen Temperaturen ist anzuraten, daß ein Beobachter die Ablesungen in regelmäßiger Reihenfolge nach der Uhr macht und ein zweiter, der zugleich beständig rührt, sie aufschreibt.

Schema:	Therm. A	68,50	68,49	68,47	68,43
	" B	67,96	67,94	67,92	
	Mittel A	68,49	68,48	68,45	
	Also $A - B =$	+0,53	+0,54	+0,53.	

(Ein gleichmäßiger Temperaturgang läßt sich oft durch Wiederholen der Ablesungen in umgekehrter Reihenfolge und Mittelnehmen eliminieren.)

42. Gas- oder Luftthermometer.

Die allgemein angenommene Temperaturskale ist dadurch definiert, daß ein vollkommenes Gas auf jeden Grad Temperaturzuwachs bei konstantem Druck eine gleiche Volumzunahme (Ausdehnungskoeff.) oder bei konstantem Volumen eine gleiche Druckzunahme (Spannungskoeff.) erfährt. Das Ansteigen beträgt für $+1^0$ C rund je 1/273 des für 0^0 geltenden Betrages. Wir nehmen zunächst an, daß die Füllung des Thermometers diesem Gesetze genau folgt. Über die Abweichungen bez. Korrektionen s. S. 160.

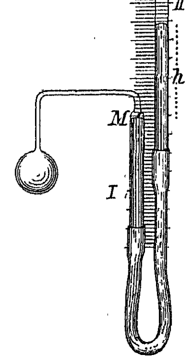
Gasthermometer können für konstanten Druck, oder in einfacherer Form für konstantes Volumen angeordnet sein. Wir behandeln nur die letztere, fast immer gebrauchte Anordnung.

Gasthermometer mit Druckänderung bei konstantem Volumen.

α bedeutet den Spannungskoeffizienten des Gases.

Der Druck H ist bestimmt durch die Formel $H_t = H_0(1 + \alpha t)$. Wenn also das auf konstantem Volumen gehaltene Gas bei 0^0 den Druck H_0 hat, so zeigt der Druck H die Temperatur $t = \frac{1}{\alpha}\frac{H - H_0}{H_0}$ an, oder, $\frac{1}{\alpha} = 273$ gesetzt, $t = \frac{1}{\alpha}\frac{H}{H_0} - 273$. Am einfachsten drückt sich die absolute Temperatur $T = 273 + t$ aus, nämlich $T = \frac{1}{\alpha}\frac{H}{H_0}$.

Bei der Messung treten zwei unvermeidliche, mit der Temperatur beschleunigt wachsende Korrektionen auf, nämlich wegen der Gefäßausdehnung und wegen des „schädlichen Raumes", d. h. des nicht mitgeheizten Raumes, der das Meßvolumen mit dem Manometer verbindet. Daß dieser Raum möglichst klein werde, ist besonders für hohe Temperaturen wichtig. Eine Anordnung zu diesem Zwecke von Chappuis zeigt die Figur. Die kurze Einstellspitze sitzt unter einem eingekitteten ebenen Stahldeckel. Die Verbindung mit dem Thermometergefäß geschieht durch eine in den Deckel eingekittete Platinkapillare.



Modell von Jolly für mäßige Temperaturen. Ein mit trockenem Gas gefüllter Glasballon von etwa 50 ccm steht durch ein Kapillarrohr mit einer vertikalen Glasröhre I in Verbindung, in welcher das Gas über Quecksilber abgegrenzt wird. Durch die Erhöhung oder Vertiefung des Quecksilberstandes in dem mit I kommunizierenden Rohre II kann man die Oberfläche in I bis zu einer nahe an der Mündung des Kapillarrohres befindlichen Marke M (meist eingeschmolzene Glasspitze) „einstellen". Die Verhältnisse sind so zu wählen, daß an Dichtungsstellen oder Schlauchverbindungen das Quecksilber auch bei den niedrigsten Temperaturen überall unter innerem Überdruck steht, weil anderenfalls leicht Luft einsickert.

Erstes Verfahren. Um irgend einen beobachteten Druck auf die ihm entsprechende Temperatur umrechnen zu können, genügt es, den Druck bei einer bekannten Temperatur bestimmt zu haben. Wir wählen hierzu den Eispunkt. Man umgibt also die Kugel mit schmelzendem Eise (**40** I), stellt das Quecksilber ein und beobachtet den Barometerstand b_0 und die Höhe h_0 der Kuppe in II über derjenigen in I. Wir setzen $b_0 + h_0 = H_0$, wo h_0 negativ ist, wenn das Quecksilber in II tiefer steht. Alle b und h werden auf dieselbe Temperatur, z. B. 18^0 oder 0^0, reduziert (**37**).

Um eine Temperatur zu messen, wird diese der Kugel mitgeteilt, die Luft wieder auf ihr Normalvolumen gebracht und die jetzige Quecksilberhöhe h und der Barometerstand b beobachtet. Dann ist, wenn $b + h = H$ gesetzt wird und α den Gasausdehnungs-Koeffizienten bedeutet, von Korrektionen abgesehen,

$$T = \frac{1}{\alpha}\frac{H}{H_0} \quad \text{und} \quad t = \frac{1}{\alpha}\frac{H - H_0}{H_0}. \qquad 1.$$

Korrektion wegen der Gefäßausdehnung. Der kubische Ausdehnungskoeffizient der Kugel heiße γ. Dann ist

$$T = \frac{1}{\alpha}\frac{H(\alpha - \gamma)}{\alpha H_0 - \gamma H} \quad \text{und} \quad t = \frac{H - H_0}{\alpha H_0 - \gamma H}, \qquad 2.$$

oder nahe (Formel 4, S. 9)

$$T = \frac{1}{\alpha}\frac{H}{H_0}\left(1 + \frac{\gamma}{\alpha}\frac{H - H_0}{H_0}\right) \qquad t = \frac{1}{\alpha}\frac{H - H_0}{H_0}\left(1 + \frac{\gamma}{\alpha}\frac{H}{H_0}\right).$$

Korrektion wegen des schädlichen Raumes. v sei das Volumen des Gefäßes, v' das Luftvolumen, welches nicht auf die zu messende Temperatur t gebracht werden kann, sondern auf der Zimmertemperatur t' bleibt. Beide Volumina sind durch Auswägen mit Quecksilber oder Wasser bestimmt worden. Ihr Verhältnis sei $v'/v = k$. Dann ist obiger Ausdruck Nr. 2 für t noch zu multiplizieren mit $\dfrac{1 + \alpha t' + k}{1 + \alpha t' - k\alpha t}$, oder man rechnet nach Formel 3, unten.

Als Probe der Formel für t dient die Messung der Siedetemperatur des Wassers (Tab. 14a).

Beweis. Die Luftmenge bleibt konstant. Ist v das Volumen des Ballons bei 0^0, s_0 die Dichtigkeit der Luft für 0^0 u. 760 mm und t' die Temperatur des schädlichen Raumes, so berechnet sich die Luftmenge,

bei 0^0 und H_0 bei t und H

$$\frac{s_0 H_0}{760}\left(v+\frac{v'}{1+\alpha t'}\right), \qquad \frac{s_0 H}{760}\left(\frac{v(1+\gamma t)}{1+\alpha t}+\frac{v'}{1+\alpha t'}\right).$$

Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke und Multiplikation beider Seiten mit $(1+\alpha t)/v$ kommt

$$H_0(1+\alpha t)\left(1+\frac{k}{1+\alpha t'}\right)=H\left(1+\gamma t+k\frac{1+\alpha t}{1+\alpha t'}\right),$$

oder $$t\left(\alpha H_0-\gamma H-k\frac{\alpha}{1+\alpha t'}(H-H_0)\right)=(H-H_0)\left(1+\frac{k}{1+\alpha t'}\right). \qquad 3.$$

Hieraus entstehen, wenn man k und γ, bez. nur k, gleich Null setzt, die Ausdrücke 1 bez. 2. — Die Ausdrücke für T werden aus denen für t leicht durch Addition von $1/\alpha$ gefunden.

Fehlerrechnung. Enthält eine der Größen H, H_0, α usw. einen Fehler $\varDelta H$, $\varDelta H_0$, $\varDelta\alpha$ usw., so wird die berechnete Temperatur t unter Vernachlässigung kleinerer Fehler um einen relativen Betrag fehlerhaft:

$$\frac{\varDelta H}{H-H_0}, \quad -\alpha T\frac{\varDelta H_0}{H-H_0}, \quad -\frac{\varDelta\alpha}{\alpha}, \quad T\varDelta\gamma, \quad \alpha T\varDelta k, \quad -\alpha^2 Tk\varDelta t'.$$

Man sieht, daß die drei letzten, von der Ausdehnung des Gefäßes und von Größe und Temperatur des schädlichen Raumes herrührenden Fehler mit der Höhe der zu messenden Temperatur wachsen. Es muß also in der Pyrometrie der Ausd.-Koeff. des Gefäßes, sowie der schädliche Raum und seine Temperatur gut bekannt sein. Bei der Eispunktsbestimmung kommt es hierauf weniger genau an, so daß die der Formel 3 zugrunde liegende Annahme, daß die Temperatur des schädlichen Raumes hier dieselbe sei, wie bei der anderen Messung, im allgemeinen gestattet sein wird.

Zweites Verfahren. Man bestimmt Eispunkt und Siedepunkt des Instrumentes. Werden H_0 und H_1 als Druckhöhen für 0^0 und für die Temperatur t_1 des siedenden Wassers gefunden, so entspricht einer Druckhöhe H die Temperatur t

$$t=t_1\frac{H-H_0}{H_1-H_0}\left[1-\frac{H_1-H}{H_0}\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{k}{1+\alpha t'}\right)\right]. \qquad 4.$$

Fehler durch den schädlichen Raum und die Ausd.-Koeff. wirken hier weniger stark als vorhin. α selbst kommt nur in Korrektionsgliedern vor.

Strenge Definition der Temperatur; ideales Gas; thermodynamische Skale.

Die natürlichen Gase weichen unter gewöhnlichen Verhältnissen vom vollkommenen Gaszustand mehr oder weniger ab; vgl. auch S. 79, 82 u. 85. Meist ist z. B. der Spannungskoeffizient (bei konst. Vol.) etwas größer als der Ausdehnungskoeffizient (bei konst. Druck). Mit zunehmender Verdünnung aber nähern sich beide einander und streben bei allen Gasen einem und demselben Grenzwerte zu, der nach jetziger Kenntnis auf $+1^0$C $1/273{,}1=0{,}003662$ beträgt. Nach der Ausdehnung oder Spannungsänderung eines solchen idealen Gases rechnet die streng wissenschaftliche „thermodynamische Skale“; vgl. Anh. 9b.

Internationale Wasserstoffskale. Als ein Gas, welches auch im gewöhnlichen Zustande dem idealen nahe kommt, bot sich bis zur Entdeckung des Heliums nur der Wasserstoff (Spannungskoeff. zwischen 0 u. 100° gemessen = 0,003663). Dieser wurde zum Temperaturnormal gewählt und zwar, um die Skale genau zu definieren, von einer bestimmten Dichtigkeit, nämlich derjenigen, die bei 0° dem Drucke von 1 m Hg entspricht. In dieser Skale ist bis jetzt zwischen +100° und — 260° (wo der Wasserstoff fest wird) gemessen worden. Weiter abwärts dient Helium, dessen Siedepunkt bei — 268° C = + 5° abs. liegt. — Oberhalb 100° wird die starke Diffusion und chemische Aktivität des Wasserstoffs hinderlich. Man benutzt hier Stickstoff (vom Drucke 1 m Hg bei 0° ausgehend mittlerer Sp.-K. zwischen 0 u. 100° gleich 0,003675; Luft merklich ebenso); neuerdings auch das wenig von den Gasgesetzen abweichende, durch seine Einatomigkeit bezüglich Dissoziation auch in der Hitze unverdächtige und chemisch inaktive Helium (0,003663).

Korrektion der Angaben des Wasserstoff- und des Stickstoff- (oder Luft-)Thermometers auf die Skale eines vollkommenen Gases (thermodynamische Skale) nach den Ableitungen von D. Berthelot, Trav. et Mém. du Bur. intern. des poids et mes. XIII. 1907. Hat man mit Gas von $p_0 = 1$ m nach Gl. 2 mit den oben gegebenen Koeffizienten oder nach Gl. 4 gerechnet, so reduzieren die folgenden Korrektionen nach Berthelot die Werte auf die thermodyn. Skale. Betrug der Druck bei 0° nicht 1 m, sondern p_0 m, so genügt es praktisch, die Zahlen mit p_0 zu multiplizieren. Die Tabelle enthält auch die Korrektionen für das Gasthermometer mit Ausdehnung bei konst. Druck.

	Konstantes Volumen		Konstanter Druck	
	H	*N* (Luft)	*H*	*N* (Luft)
— 200°	+ 0,06°	+ 0,90°	+ 0,25°	+ 5,42°
— 100	0,01	0,12	0,02	0,46
0	0	0	0	0
50	— 0,0005	— 0,0086	— 0,001	— 0,024
100	0	0	0	0
200	+ 0,003	+ 0,046	+ 0,005	+ 0,11
300	0,007	0,114	0,01	0,27
400	0,013	0,194	0,02	0,46
500	0,02	0,280	—	0,65
800	0,04	0,56	—	1,25
1000	0,05	0,77	0,07	1,65

Thermometergefäße. Jenaer Glas Nr. 59 ist mit Stickstofffüllung bis 500° brauchbar; bis 1100° innen und außen glasiertes Porzellan. Bei Gefäßen aus Platin, Platiniridium (bis 1600°), Iridium (bis 2000°) ist jede Art von Heizgasen fernzuhalten. Quarzglas, mit dem Vorzug kleiner Ausdehnung (vgl. S. 170) ist mit Stickstoff bis 1100° brauchbar; für Wasserstoff wird es bald oberhalb 100° durchlässig; auch für Helium. Die genannten Metalle scheinen für Helium undurchlässig zu sein; über die scheinbare anfängliche, wohl auf abdiffundierende Verunreinigungen

zurückzuführende, Durchlässigkeit vgl. Jaquerod u. Perrot, Arch. de Genève 20, 454. 1905; C. R. 144, 135. 1907; Cario, Diss. Halle 1907.

Über die Behandlung des Gasthermometers vgl. u. a. Chappuis, Trav. et Mém. du Bur. int. VI. 1888; XIII. 1907: mehrere Gase 0 bis 100° bei konst. Druck oder Vol. — Hohe Temp.: Holborn u. Day, Ann. d. Ph. 2, 505. 1900; Holborn u. Valentiner, ib. 22, 1. 1907: bis 1600° mit Ir- u. PtIr-Gefäß; A. Day u. Clement, Sill. J. 26, 405. 1908: bis 1150°; Innen- u. Außendruck gleich; kleiner schädlicher Raum. — Tiefe Temp.: Dewar, Proc. R. S. (A) 76, 316 u. 325. 1905; ZS f. Instr. 1906, 290; Kam. Onnes usw. Comm. Phys. Lab. Leiden, z. B. Nr. 95, 1906; Suppl. Nr. 18, 1907; ZS f. Instr. 1907, 254.

43. Elektrische Temperaturmessung.

Vorzüge der elektrischen Methoden. 1) Man kann sehr kleine Massen von verschwindender Wärmekapazität und Trägheit anwenden. 2) Sehr kleine Räume sind zugänglich. 3) Die Temperatur läßt sich an einem einzelnen Punkte oder umgekehrt im Mittel über einen größeren Raum bestimmen. 4) Sie sind anwendbar auf die höchsten und niedrigsten Temperaturen, wo andere Mittel versagen. 5) Die elektrischen Messungen gewähren mit einfachen Hilfsmitteln eine fast unbegrenzte Empfindlichkeit. 6) Man ist unabhängig von den Korrektionen unregelmäßiger Kaliber, da die Eichung an drei Punkten im allgemeinen alles bestimmt.

Zu beachten sind Fehlerquellen aus thermoelektrischen Kräften, z. B. zwischen Leitungsdrähten und Anschlußstücken aus anderem Metall.

I. Thermo-Element (Th. J. Seebeck 1822).

Benutzt wird die durch Temperaturdifferenz an den Kontaktstellen zweier Metalle auftretende elektromotorische Kraft. Man lötet zwei gleich lange thermoelektrisch wirksame Drähte aneinander und mit den anderen Enden an Kupferdrähte. Man bringt die erstere Lötstelle an den Punkt, dessen Temperatur gesucht wird, erhält die beiden anderen Lötstellen zusammen auf einer bekannten Temperatur (etwa durch Eis auf 0°) und mißt die entstehende el. Kraft entweder durch Kompensation gegen ein Normalelement (**99** bis **103**) direkt, oder mittels der Stromstärke, die sie in einem Galvanometer (Spiegelgalvanometer von mäßigem Widerstande (**83**); auch empfindlichem Westonzeiger (**85**, 2)) hervorbringt.

Kleineren Temperaturdifferenzen sind die Wirkungen proportional; der Reduktionsfaktor wird durch eine einmalige Beobachtung bei bekannter Differenz gefunden. — Für größere Intervalle werden meist Beobachtungen mit zwei Differenzen und eine daraus bestimmte quadratische Gleichung genügen; allgemein leitet man aus einer Anzahl von Punkten eine Tabelle oder Kurve ab.

Die thermoel. Kraft eines Metallpaares auf + 1°, im Mittel zwischen 0 und 100°, wird in Mikrovolt (10^{-6}V) nahe als Differenz aus folgenden

Zahlen gefunden:

Bi	0	10% PtRh	61	Au, Messing	71
Konstantan	30	„ PtIr		Cu, Ag	74
Patentnickel	38	Pt	66	Fe	83
Ni	51	Hg	67	Sb	100

Für den Gebrauch hat Konstantan-Kupfer die Vorzüge eines nahe linearen Verlaufes und, für Messungen mit Stromausschlägen, eines wenig veränderlichen Widerstandes, da dieser bei Cu klein und bei K. nahe temperaturkonstant ist. Oberhalb 100° wählt man besser Ag statt Cu.

Hohe Temperaturen. Platin gegen Platin-Rhodium (10% Rh; Le Chatelier) ist bis gegen den Schmelzpunkt des Platins brauchbar. Die Legierungen von Pt mit Ir und Ru sind in hoher Temperatur weniger beständig. Auch PtRh ändert sich bei längerem Gebrauch oberhalb 1200°; das Platin ist gegen das zerstäubende Rhodium durch Quarz oder glasierten Thon zu schützen. — Man isoliert elektrisch durch ein über den einen Draht geschobenes unglasiertes Porzellan- oder Thonrohr und gegen Flammengase durch ein über das Ganze geschobenes glasiertes Porzellanrohr.

Für die von Heraeus ausgegebenen Elemente Pt/PtRh, die eine Lötstelle auf 0°, die andere auf t°C, gilt im Mittel (Holborn u. Valentiner, Ann. d. Ph. 22, 27. 1907):

t =	100	200	300	400	500	600	700	800°
E =	0,6	1,4	2,25	3,17	4,13	5,14	6,17	7,25 Milli-V
t =	800	900	1000	1100	1200	1300	1400	1500°
E =	7,25	8,34	9,47	10,62	11,8	13,0	14,1	15,3 Milli-V.

Von der P.T. Reichsanstalt geeichte Elemente sind käuflich.

Die Eichung geschieht mit bekannten Schmelz- oder Siedepunkten (Cd, Zn, Ag, Au, Cu, Pd; Tab. 11), bei nicht oxydierenden Metallen am einfachsten durch Einfügung eines 5 mm langen Drahtstücks in die Lötstelle; maßgebend ist die thermoelektrische Kraft im letzten Augenblick vor dem Durchschmelzen. Oxydierbare Metalle schmelzt man besser im Tiegel und steckt die heiße Lötstelle isoliert hinein. Bei Silber und Kupfer ist der Einfluß des Sauerstoffs der Luft zu beachten, der die Schmelztemperatur um 8° bez. 20° erniedrigen kann. Vgl. auch **45**.

Tiefe Temperaturen. Pt/PtRh wird in der Kälte unempfindlich. Zu empfehlen ist Konstantan/Cu oder Konstantan/Fe; geeicht z. B. durch Siemens & Halske zu beziehen.

Lit.: Holborn u. W. Wien, Wied. Ann. 47, 107. 1892; 56, 373. 1895; Holborn u. A. Day, ib. 68, 817. 1899; Ann. d. Ph. 2, 538. 1900; Sill. J. 10, 197. 1900; W. P. White, Ph. ZS 8, 325. 1907, insbesondere Haltbarkeit, Homogenität; auch weitere Literatur.

II. Widerstands-Thermometer (Svanberg, Siemens).

Von der Anwendung auf Strahlungsmessungen stammend wird häufig die Bezeichnung „Bolometer" gebraucht. S. auch **72a** II.

Ein metallischer Leitungswiderstand wächst mit der Temperatur, am stärksten bei reinen Metallen. Bei reinem Platin kann der Temperaturkoeffizient (relative Änderung für 1°) 0,0039 erreichen, bei Eisen und bei Nickel 0,006. Vgl. **95a**.

Man schaltet den Meßdraht mit einem gleichen Draht oder mit einem gleichen Rheostatenwiderstand in die Wheatstone'sche Brücke oder zum Differentialgalvanometer (**93** oder **92**); der Meßstrom soll so schwach sein, daß er nicht merklich erwärmt.

Der Widerstand werde gefunden bei den bekannten Temperaturen t_0 und t_1 (z. B. 0 und 100^0) gleich w_0 und w_1, bei einer zu messenden Temperatur t gleich w, dann ist in den Grenzen eines merklich konstanten Temp.-Koeffizienten

$$t = t_0 + (t_1 - t_0) \cdot (w - w_0)/(w_1 - w_0).$$

Für weitere Grenzen bestimme man bei den bekannten Temperaturen t_0 t_1 t_2 die Widerstände w_0 w_1 w_2 und nenne

$$w_1 - w_0 = \gamma_1 \quad w_2 - w_0 = \gamma_2 \quad t_1 - t_0 = \tau_1 \quad t_2 - t_0 = \tau_2 \text{ und}$$

$$a = \frac{\tau_1 \gamma_2^2 - \tau_2 \gamma_1^2}{\gamma_1 \gamma_2 (\gamma_2 - \gamma_1)} \qquad b = \frac{\tau_2 \gamma_1 - \tau_1 \gamma_2}{\gamma_1 \gamma_2 (\gamma_2 - \gamma_1)};$$

dann bedeutet der Widerstand w die Temperatur

$$t = t_0 + a(w - w_0) + b(w - w_0)^2.$$

Sollte auch diese Formel nicht genügen, so stellt man durch mehrere Beobachtungen die Temperaturen als Funktion der Widerstände in einer Kurve (**6**) oder Tabelle dar.

Wenn die Temperatur t_v eines aus demselben Material wie der Meßdraht bestehenden Vergleichsdrahtes wenig schwankt, so zählt man am einfachsten alle Temperaturen stets von dem gleichzeitig geltenden t_v an und addiert zum Schluß t_v zu den so berechneten Temperaturen. Den jedesmaligen Widerstand des Vergleichsdrahtes nimmt man als Einheit.

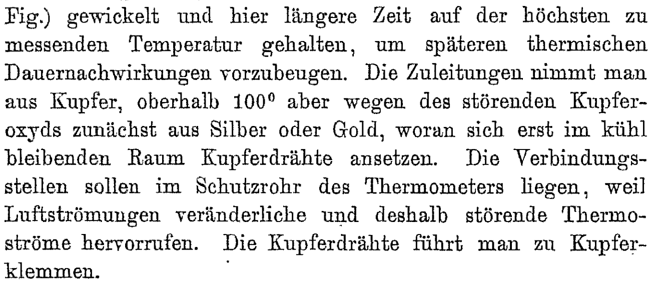
Ein Bad darf keinen Nebenschluß bilden; in den meisten Fällen genügt Petroleum. Ganz sicher ist Paraffinöl. Wasser (reines) nur für Edelmetalle bei kleiner elektr. Spannung (1 V).

Die Meßwiderstände werden z. B. auf Glimmerplättchen aufgewickelt; s. auch Fig. S. 164. Geringe Trägheit bietet dünner Platindraht in feiner Metall- oder Glaskapillare. — Die Zuleitungen, aus Kupfer oder in höherer Temperatur Silber, sollen, soweit sie mit erwärmt werden, einen relativ verschwindenden Widerstand haben.

Platinthermometrie. Hohe und tiefe Temperaturen.

Das folgende bezieht sich auf reines Platin, welches gestattet, mit demselben Instrument von den tiefsten Temperaturen bis zu 1100° zu messen, wo das Versagen der Isoliermittel und die Sublimation des Platins eine Grenze setzt.

Blanker, zuvor elektrisch geglühter Platindraht ($2r = 1/20$ bis $1/5$ mm) wird möglichst ohne Spannung auf ein gezahntes Glimmerkreuz (Schema Fig.) gewickelt und hier längere Zeit auf der höchsten zu messenden Temperatur gehalten, um späteren thermischen Dauernachwirkungen vorzubeugen. Die Zuleitungen nimmt man aus Kupfer, oberhalb 100° aber wegen des störenden Kupferoxyds zunächst aus Silber oder Gold, woran sich erst im kühl bleibenden Raum Kupferdrähte ansetzen. Die Verbindungsstellen sollen im Schutzrohr des Thermometers liegen, weil Luftströmungen veränderliche und deshalb störende Thermoströme hervorrufen. Die Kupferdrähte führt man zu Kupferklemmen.



Die Widerstandsänderung der Zuleitung durch die Temperatur kann man bei Messungen in der Brücke (**93**) durch eine entsprechende Drahtschleife im andern Brückenzweig eliminieren. Bestimmt man den Widerstand mit übergreifendem Nebenschluß (**92**) oder durch Spannungsmessung (**91** II, **101**, **103**), so wird man Strom oder Spannung in besonderen Leitungen abnehmen. Stromwärme ist zu vermeiden oder in erster Annäherung dadurch zu eliminieren, daß man immer mit derselben Stromstärke mißt.

Für die Schutzröhren eignet sich Glas oder Nickel, in höherer Temp. glasiertes Porzellan, welches Flammengase (die den Widerstand dauernd ändern!) abhält.

Eichung des Platinthermometers. Man mißt die Widerstände w_0 bei 0° und w_{100} bei 100°. Nimmt man an, daß der Widerstand linear wüchse, so entspricht dann dem Widerstande w_t die von Callendar sogenannte „Platin-Temperatur" t_p

$$t_p = (w_t - w_0) \cdot 100/(w_{100} - w_0).$$

Nun läßt sich oberhalb 0° die Abhängigkeit des Platinwiderstandes von der richtigen Temperatur t, bis 1000° geprüft, durch einen quadratischen Ausdruck darstellen; vgl. vor. S. Als für die Rechnung bequeme Form der Korrektion von t_p auf die richtige Temperatur t leitet sich hieraus ab

$$t - t_p = \delta \left[\left(\frac{t}{100}\right)^2 - \frac{t}{100}\right];$$

der konstante Faktor δ ist etwa $= 1{,}5$. Genau bestimmt man ihn durch Beobachtung in bekannter höherer Temp., meist der Siedetemp. des Schwefels, s. S. 145.

Der Schwefel siedet über einem Bunsenbrenner in offener, 4 bis 5 cm weiter, etwa 50 cm langer Glasröhre (Fig.; Holborn u. H.). Das Platinthermometer, gegen zurückfließenden Schwefel durch einen Kegel von geglühtem

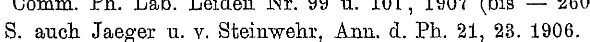
Asbest geschirmt, reicht bis etwa 10 cm über die Oberfläche des Schwefels. Gegen Wärmeverlust schützt eine Packung aus Asbestwolle und gegen heiße Luft vom Brenner ein Blechschirm. Rohre aus Jenaer Glas Nr. 59 bleiben lange haltbar, wenn man sie neigt, bevor der Schwefel zu erstarren beginnt.

Die Genauigkeit der Messung, mit steigender Temp. abnehmend, geht am Schwefelsiedepunkt auf einige Hundertel, zwischen 0 u. 100° auf einige Tausendtel Grad.

In tiefen Temperaturen ändert sich der Widerstand langsamer, als der extrapolierten quadratischen Formel entspricht, welche schon die Temp. der flüssigen Luft um 2° zu hoch ergibt. Man muß hier mehrere Punkte an das Gasthermometer anschließen.

Lit.: Callendar, Phil. Tr. (A) 178, 161. 1887; 182, 119. 1891; Chappuis u. Harker, Trav. et Mém. etc. XII. 1902; Harker, Phil. Tr. (A) 203, 343. 1904; Holborn u. Henning, Ann. d. Ph. 26, 833. 1908; Kam. Onnes, Braak u. Clay, Comm. Ph. Lab. Leiden Nr. 99 u. 101, 1907 (bis — 260°).

S. auch Jaeger u. v. Steinwehr, Ann. d. Ph. 21, 23. 1906.



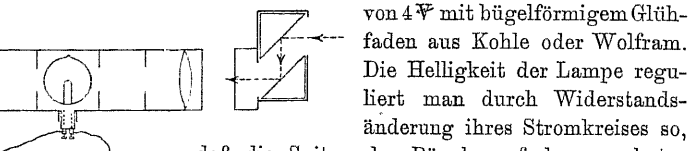
43a. Optische Pyrometer.

S. auch die auf Messung von Schallwellenlängen (**56** III) und Lichtwellenlängen (**63**a) beruhenden Methoden. Auch Schmelzpunkte (**45**).

Die Temperatur eines glühenden Körpers läßt sich dadurch ermitteln, daß man einen homogenen Teil der Strahlung unter Benutzung eines bestimmten Vergleichslichts photometriert (E. Becquerel). Das Verfahren ist empfindlich, weil die Helligkeit mit der Temperatur sehr stark wächst. Vgl. **72** u. **72a**.

Pyrometer von Wanner. Zur Messung dient ein König'sches Spektralphotometer (**72** V), dessen Okularblende auf die Wellenlänge 0,656 μ der roten Wasserstofflinie eingestellt ist. Die konstante Lichtquelle besteht aus einer durch eine Glühlampe von 6 V (auch wohl offenen Glühstift; Nernst, Ph. ZS 7, 380. 1906) beleuchteten mattierten Prismenfläche, deren Helligkeit man öfters bei derselben Stellung des Okular-Nicols mit einer durch eine Amylacetatlampe (**72** I 1) beleuchteten Mattscheibe vergleicht und durch Änderung eines Regulierwiderstandes konstant hält. Beim Photometrieren einer Strahlung stellt man die Hälften des Gesichtsfeldes durch Drehung des Okular-Nicols auf gleiche Helligkeit ein und entnimmt die dem abgelesenen Drehungswinkel entsprechende Temperatur einer Eichtabelle. Strahlungen unter 1000° sind zu lichtschwach für den Apparat. — Weiter hinabzusteigen, angeblich bis 600°, gestattet ein nach Le Chatelier mit einem Fraunhofer(Cornu)schen Photometer ausgestattetes Instrument; Journ. f. Gasbel. 50, 1005. 1907.

Pyrometer von Holborn und Kurlbaum (Fig.). Hier wird ein meßbar veränderliches Vergleichslicht benutzt, und zwar eine Glühlampe von 4 V mit bügelförmigem Glühfaden aus Kohle oder Wolfram. Die Helligkeit der Lampe reguliert man durch Widerstandsänderung ihres Stromkreises so, daß die Spitze des Bügels auf der zu photometrierenden glühenden Fläche verschwindet. Das Glühlämpchen befindet sich im Innern eines Fernrohrs, dessen Objektiv (Fig. rechts) am Orte des Glühfadens ein Bild der glühenden Fläche entwirft; das Okular (Fig. links) ist scharf auf diesen eingestellt. Homogenes Licht wird durch ein dem Okular vorgeschobenes Kupferoxydulglas (0,65 μ) erzielt. Als Kriterium der Lampentemperatur gilt, nach einer Eichtabelle, die an einem eingeschalteten Strommesser abgelesene Stromstärke. Das Instrument ist für Temperaturen von 600° aufwärts brauchbar.



Eichung der optischen Pyrometer. Als Norm dient die Strahlung eines „vollkommen schwarzen“ Hohlkörpers (**72a** I), dessen Temperatur für eine geeignete Helligkeit mit einem eingebrachten, anderweitig geeichten Thermoelement (**43** I) gemessen ist und daraus für jede andere Helligkeit dadurch berechnet werden kann, daß man in die Wien-Planck'sche Formel (**72a** I, Gl. 2a oder 2b) die benutzte Wellenlänge einführt. So gelangt man zu einer Tabelle oder Eichkurve für das Instrument.

„Schwarze“ Temperatur. Es ist zu beachten, daß ein auf diese Weise geeichtes Pyrometer nur bei der Messung von ebenfalls vollkommen schwarzen Strahlungen wahre Temperaturen liefert, an einem Körper mit geringerem Strahlvermögen dagegen kleinere Werte, die man die „schwarze“ Temperatur des Körpers nennt. Dies ist diejenige Temperatur, die ein vollkommen schwarzer Körper besitzen muß, um für die benutzte Wellenlänge die gemessene Helligkeit zu zeigen.

Am meisten unterscheidet sich die „schwarze“ Temperatur eines Körpers von der wahren bei Flächen mit starkem Reflexions-, also geringem Strahlvermögen, z. B. blanken Metallflächen. Für blankes Platin z. B. beträgt für das rote Licht der beiden Pyrometer der Unterschied in dunkler Rotglut nur einige Grad; er steigt merklich linear an und erreicht bei 1500° etwa 150°; vgl. **72a**.

Die Beobachtung der gleichmäßig glühenden Innenfläche eines Ofens durch eine mäßig große Öffnung liefert nahe die richtige Temperatur.

Sehr hohe Temperaturen. Ist die zu messende Strahlung heller als das Vergleichslicht, so wird sie mittels Reflexion an Glasflächen oder mittels Absorption durch Rauchgläser in bekanntem Verhältnis geschwächt. Bei den obengenannten Pyrometern greift man zu diesem Mittel, wenn die zu messende Temperatur über 1500 bis 2000°, die Temperatur der normal brennenden Glühlampe, hinausgeht. Vgl. **72** III u. VI B.

Obiges Schwächungsverhältnis φ kann mit dem optischen Pyrometer selbst bestimmt werden: wird eine noch ungeschwächt meßbare schwarze Strahlung von der Temperatur t_1 durch die Schwächung scheinbar auf die Temperatur t_2 heruntergedrückt, so ist für die benutzte, in cm ausgedrückte Wellenlänge λ

$$\log \text{nat}\, \varphi = \frac{c}{\lambda} \frac{t_1 - t_2}{(t_1 + 273)(t_2 + 273)}.$$

c bedeutet die Exponentialkonstante des Wien-Planck'schen Strahlungsgesetzes (**72a** I), die von Lummer-Pringsheim = 1,458, von Holborn u. Valentiner = 1,42 gefunden wurde.

Lit. zu Pyrometrie. Barus, Rapports au Congrès 1900, I, 148, eine Übersicht und die damalige Literatur. — Über optische Pyrometer: Wanner, Phys. ZS 3, 112. 1901; Holborn u. Kurlbaum, Sitz.-Ber. d. Berl. Akad. 1901, 712; Ann. der Ph. 10, 225. 1903; Holborn u. Valentiner, Ann. d. Ph. 22, 44. 1907. — Eine optische Temperaturmessung mit dem Interferenzrefraktor s. **63a**.

44. Wärme-Ausdehnungskoeffizient.

Linearen Ausdehnungskoeffizienten β eines festen Körpers nennt man die Verlängerung seiner Längeneinheit, kubischen oder Volum-Ausdehnungskoeffizienten 3β (vgl. S. 28) die Volumzunahme seiner Volumeinheit bei der Temperaturerhöhung um 1°.

Wird eine Länge l oder ein Volumen v um t Grad erwärmt, so sind die neuen Größen also

$$L = l(1 + \beta t) \qquad V = v(1 + 3\beta t).$$

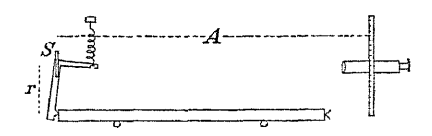
I. Durch Längenmessung.

Wenn ein Stab von der Länge l sich bei der Temperaturerhöhung t um λ verlängert, so ist $\beta = \lambda/(lt)$.

Die Verlängerungen können mit dem Komparator (**21**) ge-

messen werden. — Gewöhnlich werden sie auf einen Kontakthebel übertragen. r sei der Abstand des Kontaktpunktes von der Drehaxe, φ der Drehungswinkel, dann ist $\lambda = r \sin\varphi$, vorausgesetzt, daß bei einer der beiden Temperaturen der Hebelarm zur Stabrichtung senkrecht ist.

Der Drehungswinkel wird mit Spiegel und Skale (Fig. Anordnung von Edelmann) gemessen. Man stellt den Faden des Fernrohrs auf den Fußpunkt der vom Spiegel S auf die Skale gefällten Senkrechten ein, deren Länge $= A$ Sk.-T. sei. Der Ausschlag durch die Temperaturänderung betrage e Skalenteile, dann ist (25) $e/A = \operatorname{tg} 2\varphi$. Für ein kleines φ gilt merklich $\sin\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\varphi$, also ist in diesem Falle $\lambda = \frac{e}{2}\frac{r}{A}$. Vgl. auch das Beispiel in **3**.



Größeren Temperaturunterschieden ist die Ausdehnung nicht mehr genau proportional. Man pflegt dann die Länge auszudrücken als

$$l_t = l_0(1 + \beta_1 t + \beta_2 t^2)$$

und bestimmt die Konstanten β_1 und β_2 aus mindestens drei Beobachtungen. Vgl. **3**. — Der Ausd.-Koeff. bei der Temp. t ist dann in Teilen der Länge bei 0^0 ausgedrückt $= \beta_1 + 2\beta_2 t$.

Für ein reines Metall leistet, auch in tiefer Temp., gute Dienste der Ausdruck $(l_2 - l_1)/l_1 = A(T_2^\varkappa - T_1^\varkappa)$, wo l_1, l_2 die Längen bei den abs. Tempp. T_1, T_2 und A und $\varkappa$ Konstanten des Körpers bedeuten. Thiesen, Verh. D. Ph. Ges. 1908, 410.

In hoher Temperatur. Man erhitzt den Stab ($^1/_2$ m lang) in einem längeren horizontalen, elektrisch geheizten Porzellanrohr (8, 29). Durch zwei feststehende Mikroskope mit Okularmikrometern werden kurze Teilungen an den Stabenden anvisiert; die Temperatur wird längs des Stabes mit einem Thermoelement abgetastet. Vgl. Holborn u. Day, Ann. d. Ph. 2, 505. 1900; 4, 104. 1901.

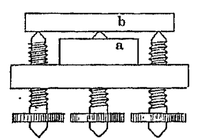
In tiefer Temperatur. In einem langen vertikalen, unten geschlossenen Rohr aus einer gut definierten Glassorte (Jena 59) ruht unten auf einer Spitze der Stab; auf ihm, wieder mittels einer Spitze, ein Stab aus demselben Glase mit einer Teilung am oberen Ende. Diese wird mit einer Teilung auf der Röhre z. B. bei Zimmertemperatur und nach Umgeben des Ganzen mit flüssiger Luft verglichen. Um diese vergleichenden Messungen auf absolute Zahlen zurückzuführen, muß von einem Stabe die Ausdehnung bekannt sein. Vgl. Henning, ib. 22, 631. 1907.

Ein selbstregistrierender „Dilatograph" bei v. Sahmen u. Tammann, Ann. d. Ph. 10, 879. 1903.

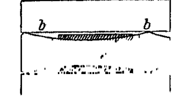
II. Durch Lichtinterferenz (Fizeau 1863).

Die Ausdehnung wird vermöge der sie begleitenden Verschiebung Newton'scher Streifen (**65** V) in Wellenlängen eines homogenen Lichtes gemessen.

A. Alte Anordnung (Fizeau). Auf einer an drei Stahlschrauben verstellbaren Stahlplatte ruht der zu untersuchende Körper in Gestalt einer Platte, deren obere Fläche a poliert ist. Diese dehnt sich beim Erwärmen nach der in kleinem Abstande darüber befindlichen, zu a fast parallelen, planpolierten Unterfläche b einer Glasplatte aus. Homogenes (s. unten), von oben eingefallenes und an b und a reflektiertes Licht erscheint dem von oben beobachtenden Auge mit Newton'schen Interferenzstreifen durchsetzt, die bei einer Dickenänderung der Schicht ab wandern; vgl. unten. — Die Ausdehnung der Stahlschrauben zwischen der Boden- und Deckplatte muß in Rechnung gesetzt werden. Man bestimmt sie nach der nämlichen Methode entweder an der polierten Fläche des Stahltischchens selbst, oder mit Einschiebung einer daraufgelegten Quarzplatte von bekannter Dicke, deren Ausdehnung bekannt ist; s. unten.



B. Quarzringmethode (nach Pulfrich); s. Fig. Ein 10 bis 15 mm hoher Hohlcylinder aus Quarzkristall oder Quarzglas ruht mit drei Vorsprüngen auf einer ebenen Bodenplatte und trägt, gleichfalls auf drei Vorsprüngen, die Deckplatte. Der zu untersuchende, schraffiert gezeichnete Körper, vorteilhaft von beinahe der Höhe des Ringes gewählt, steht in diesem; seine Oberfläche soll der Unterfläche b der Deckplatte fast parallel sein. — Seine wirkliche Ausdehnung ist hier gleich der bekannten (s. unten) oder wie vorhin ermittelten Ausdehnung des Quarzringes, vermehrt oder vermindert um die, aus der Streifenwanderung gefundene Differenz beider Ausdehnungen.



Einen Körper ohne spiegelnde Fläche kann man mittels einer auf ihm befestigten spiegelnden dünnen Platte von bekannter Ausdehnung (Quarz) untersuchen.

Lichtsorten. Natriumlicht ist wegen seiner zweifachen Wellenlänge, welche die Streifen periodisch undeutlich macht, nicht bei allen Distanzen anwendbar. Allgemein brauchbar sind längsdurchsichtige Geißler'sche Röhren (**59**) mit etwas Quecksilber und Wasserstoff oder besser Helium. Neben den Gaslinien erscheinen beim Anwärmen die Quecksilberlinien, mit denen zusammen Wasserstoff 5, Helium etwa 12 Wellenlängen liefert, die man spektral zerlegt (**59**, **60**, **64**); die Hg- und He-Linien zeigen bis zu hohen Gangunterschieden scharfe Interferenzen. Wellenlängen s. in Tab. 23.

Aus einer Verschiebung der Streifen um p Streifenbreiten folgt eine Abstandsänderung der Flächen a und b um $\frac{1}{2}p$ Licht-

wellenlängen. Die Verschiebung wird an Marken auf der Unterfläche b der Deckplatte mikroskopisch gemessen.

Die Wellenlänge in der Luftschicht wird durch die Änderungen der Temperatur und durch etwaige Luftdruckschwankungen beeinflußt. Dies wird nach den Sätzen in Rechnung gezogen: 1) Wenn λ_0 und λ die Wellenlängen im Vakuum und in einem Mittel vom Brechungsverhältnis n (aus Vak.) bedeuten, so ist $\lambda = \lambda_0/n$, und 2) In einem Gase wächst $n-1$ der Dichtigkeit proportional; s. auch **65**. Eine Formel für Luft s. Tab. 24; andere Gase s. in Tab. 12a.

Ausdehnung von Quarz; $l_t = l_0(1 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3)$.

	β_1	β_2	β_3	
Kristall ∥ Axe	$0{,}0_4 0715$	$0{,}0_8 81$	0	(Benoît, Scheel, 0 bis 100°)
" ⊥	$0{,}0_4 1325$	$0{,}0_7 116$	0	(Benoît, 0 bis 100°)
Quarzglas	$0{,}0_6 388$	$0{,}0_8 168$	$-0{,}0_{10} 050$	(Scheel, −190 bis +100°).

Quarzglas hat hiernach bei −84° ein Dichtemaximum. — Den Ausd.-K. bei der Temp. t berechnet man (Vorzeichen!) $\beta_t = \beta_1 + 2\beta_2 t + 3\beta_3 t^2$.

Zur Methode vgl. Fizeau, Pogg. Ann. 119, 87. 1863; 128, 564. 1866 (Kristalle). Benoît, Trav. et Mém. du Bur. internat. I. 1881 u. VI. 1888; Scheel, Ann. d. Ph. 9, 837. 1902; Wiss. Abh. d. P. T. R. IV, 33. 1904; Verh. D. Ph. Ges. 1907, 3 u. 718; Pulfrich, ZS f. Instr. 1893, 365, 401 u. 437; siehe daselbst besonders auch die Bemerkungen über die Ermittelung der gewanderten Streifenzahl durch gleichzeitige Messungen an mehreren Wellenlängen S. 438 u. 443, sowie über die Korrektionen wegen der schwankenden Luftdichte S. 455. — Vgl. auch **65** IV.

III. Durch Wägung.

Mit Quecksilber. Oft liegt für Glassorten das Bedürfnis vor, den Ausdehnungskoeffizienten zu kennen. Ein kleiner Ballon wird in eine Spitze ausgezogen, oder besser, es wird, damit das Quecksilber glatt abreißt, sein abgeschmolzenes und in der Flamme abgerundetes Ende bis zu einer feinen Öffnung abgeschliffen. Er wird zunächst leer gewogen.

Zur Füllung taucht man die Spitze des vorher erwärmten Ballons in Quecksilber (8, 1 u. **23**); beim Erkalten wird Quecksilber eingesaugt. Dies wiederholt man, indem zuletzt das Quecksilber zum Sieden gebracht wird, bis zur vollständigen Füllung. Endlich läßt man den Ballon, mit der Spitze unter Quecksilber, bis zu einer niedrigen Temperatur t (z. B. 0°) abkühlen; und wägt. Alsdann erwärmt man bis zur Temperatur t' (z. B. 100°), wobei Quecksilber ausfließt, und wägt wieder. Selbstverständlich soll bei den Wägungen der Ballon die Temperatur der Wage haben; was während des Temperaturausgleiches etwa ausfließt, wird in einem tarierten Gläschen mitgewogen.

Betragen die so für t und t' gefundenen Nettogewichte der Quecksilberfüllungen p und p', so berechnet sich der kubische Ausd.-Koeffizient des Glases (Beweis s. S. 172)

$$3\beta = 0{,}000182\,\frac{p'}{p} - \frac{1}{t'-t}\,\frac{p-p'}{p}.$$

Mit Wasser. Wägt man bei zwei Temperaturen t und t' mit luftfreiem Wasser, so ist

$$3\beta = \frac{1}{t'-t}\left(\frac{p'}{p}\,\frac{Q}{Q'} - 1\right) \quad \text{oder} \quad = \frac{1}{t'-t}\left(\frac{p'}{p}\,\frac{v'}{v} - 1\right),$$

wo die Dichtigkeiten Q und Q' oder die Volumina des Wassers v und v' zu t und t' aus Tab. 4 oder 5 genommen werden.

Um 100^0 herum hat im Verhältnis zu 4^0 das Wasser das Volumen $1{,}04343 + 0{,}00078\,(t - 100)$.

Weil die Ausdehnung des Quecksilbers, und in höherer Temperatur mehr noch die des Wassers die Ausdehnung der festen Körper weit übertrifft, so wird eine sehr genaue Bestimmung der Temperatur verlangt.

Aus Dichtebestimmungen. Sind die Dichtigkeiten s und s' eines Körpers für t und t' bekannt, so ist der Ausd.-K.

$$3\beta = \frac{1}{t'-t}\left(\frac{s}{s'} - 1\right).$$

IV. Ausdehnung von Flüssigkeiten.

Der (Volum-) A.-K. α einer Flüssigkeit nimmt, vom Quecksilber abgesehen, mit wachsender Temperatur stark zu. Wächst bei der Erwärmung von t auf t' ein Volumen v zu v', so nennt man $\alpha = (1/v)\cdot(v' - v)/(t' - t)$ den mittleren A.-K. von t auf t'.

Genähert ist oft $v_t = v_0/(1 - Ct)$ brauchbar (Mendelejeff). Werte des „Ausd.-Modul" C bei Walden, ZS f. ph. Ch. 65, 162. 1908. — Die Potenzreihe $v_t = v_0(1 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots)$ verlangt, auf größere Strecken angewandt, meist, und besonders für Wasser, sehr viele Glieder. Andere Formeln für Wasser s. Thiesen, Abh. P. T. Reichsanst. IV, 29. 1904.

1. Konstantes Gefäß. Ein Glasgefäß — mit ausgezogener Spitze, s. vor. S., oder wie die Formen S. 67 — halte bei der niederen Temperatur t das Flüssigkeitsgewicht p. Dann erwärme man die Flüssigkeit in einem Bade auf t' und bringe sie, etwa durch Austupfen mit Fließpapier, auf denselben Stand im Gefäß; erkaltet habe die Flüssigkeit das Gewicht p'. Wenn 3β der kubische Ausd.-Koeff. des Glases (s. III, 8,5 und Tab. 11),

so ist der mittlere Ausd.-Koeff. α der Flüssigkeit zwischen t und t'

$$\alpha = 3\beta \frac{p}{p'} + \frac{1}{t'-t} \frac{p-p'}{p'}.$$

Denn wenn v und v' das spezifische Volumen der Flüssigkeit für t und t' bezeichnen, so ist $\alpha = (v'/v - 1)/(t'-t)$. Nun ist offenbar $p'/p = [1 + 3\beta(t'-t)]v/v'$, also $v'/v = p/p' + 3\beta(t'-t)p/p'$, woraus diese Formel und auch die unter III sich leicht ergibt.

2. Auftriebsmethode. Man wäge einen Glaskörper bei zwei Temperaturen t und t' in einer Flüssigkeit; vgl. **15** A 3. Wenn p und p' die Auftriebe, so gilt die vorige Formel.

3. Dilatometer. Ein Glasgefäß mit einem angeblasenen engen, geteilten Rohr wird bis in das Rohr mit der Flüssigkeit gefüllt; man beobachtet die Einstellung der Säule bei den Temperaturen t bez. t'. Sind die abgelesenen Volumina v bez. v', so beträgt der mittlere Ausd.-Koeff.

$$\alpha = 3\beta \frac{v'}{v} + \frac{1}{t'-t} \frac{v'-v}{v}.$$

Das Gefäß kalibriert man mit Quecksilber oder Wasser, die Strecken des Rohres mit Quecksilberfäden, die man wägt (vgl. **23** und **24**; auch daselbst das Verfahren beim Einfüllen). Anstatt zu kalibrieren kann man auch zuerst eine Flüssigkeit von bekannter Ausdehnung in dem Apparat untersuchen und daraus die Volumenverhältnisse ableiten. — Sehr geeignet ist das Pyknometer Fig. 4 S. 67, wenn die Steigrohre geteilt und kalibriert sind.

Bei Flüssigkeiten von großer Dampfspannung wird man das Verdampfen, auch innerhalb des Dilatometers, beachten.

Hohe Temp. z. B. Noyes, Carneg. Inst. Publ. Nr. 63, 26. 1907. Vor allem auch Amagat, Ann. chim. phys. 29, 68 u. 505. 1893.

4. Kommunizierende Röhren. Wenn eine Flüssigkeitssäule von der Höhe h und der Temperatur t einer andern von h' und t' das Gleichgewicht (**15** A 6) hält, so ist $1 + \alpha(t'-t) = h'/h$, somit $\alpha = \frac{1}{t'-t} \frac{h'-h}{h}$. Durch ihre Unabhängigkeit von der Glasausdehnung ist die Methode fundamental (Dulong); sie verlangt zur genauen Ausführung große Mittel.

Über Ausführung am Quecksilber vgl. Regnault, Mém. de l'Acad. franç. XXI. 1847; am Wasser Thiesen, Scheel u. Diesselhorst, Wied. Ann. 60, 340. 1897; Wiss. Abh. d. P. T. Reichsanst. III, 1. 1900 u. IV, 1. 1904.

V. Gase. (Vgl. 18 u. 42.)

Bekannte Zahlen s. Tab. 12a.

1. Druckänderung bei konstantem Volumen (Spannungskoeffizient). Die Messung mit dem Gasthermo-

meter ergibt sich aus 42. Am einfachsten ist sie zwischen 0 und 100°. Wenn zu den Temperaturen 0 und t bei konstantem Volumen die Drucke H_0 und H beobachtet werden, so ist $\alpha = (H - H_0)/H_0 t + \gamma H/H_0$; γ bedeutet den kubischen Ausd.-Koeff. des Gefäßes (vgl. Gl. 2, S. 158). Mit Rücksicht auf den schädlichen Raum von der relativen Größe k und der Temperatur t' wird der vollständige Ausdruck

$$\alpha = \frac{1}{t} \frac{H - H_0}{H_0} \left(1 + k \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t'}\right) + \gamma \frac{H}{H_0}.$$

Anstatt diesen vollständig auf α aufzulösen, wird man rechts meist ausreichend genau $(1 + \alpha t)/(1 + \alpha t') = (273 + t)/(273 + t')$ schreiben dürfen.

2. Bei konstantem Druck durch Wägung. Ein Ballon mit abgrenzbarem Volumen (Hahn, ausgezogene zuschmelzbare Spitze) wird mit dem Gase gefüllt zur Temp. t erwärmt, verschlossen, in diesem Zustand unter Quecksilber von der Temperatur t_0 geöffnet, so daß Quecksilber eintritt, und abgesperrt, während das innere und äußere Niveau gleich steht. Das eingetretene Quecksilber wiege m', die ganze Füllung mit Quecksilber von derselben Temperatur m. Es werde $m'/m = p$ bezeichnet. Dann ist der Ausd.-Koeff. bei konstantem Druck

$$\alpha = \frac{p + \gamma(t - t_0)}{t - t_0 - pt - \gamma(t - t_0) t_0}.$$

Beweis. Die Dichtigkeiten des Gases bei t_0 und t seien gleich s_0 und s, so daß $(1 + \alpha t)/(1 + \alpha t_0) = s_0/s$ ist. Dann gilt offenbar

$$s_0 \frac{m - m'}{13{,}6} = s[1 + \gamma(t - t_0)] \frac{m}{13{,}6} \quad \text{oder} \quad \frac{s_0}{s} = \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t_0} = \frac{1 + \gamma(t - t_0)}{1 - p},$$

woraus der Ausdruck folgt.

3. Bei konstantem Druck mit dem Gasthermometer. Vgl. hierüber Chappuis, Trav. et. Mém. du Bur. internat. XIII. 1903.

45. Schmelzpunkt; Gefrierpunkt.

So heißt die Temperatur, bei welcher die feste und flüssige Form („Phase") des Körpers nebeneinander bestehen (Tab. 11 bis 12a). — Flüssige und feste Phase haben bei dem Schmelzpunkt gleiche Dampfspannung. — Die Temperatur beginnender Erstarrung kann beträchtlich unter dem Schmelzpunkt liegen. — Man beachte, besonders an organischen Körpern, daß schon unterhalb des Schmelzpunktes Zersetzung eintreten kann. — Gemische mehrerer Körper, wie die meisten Fette, Paraffin, Glas, haben im allgemeinen keinen scharfen Schmelzpunkt, sondern ein Temperaturintervall, innerhalb dessen sie erweichen.

Die Bestimmung wird nach der Natur des Körpers, besonders nach der Höhe des Schmelzpunktes sehr verschieden angeordnet. Z. B. kann man in einem kapillaren Glas- oder Quarzröhrchen eine kleine Menge Substanz abwechselnd erwärmen und kühlen. Der starre Zustand wird sich von dem flüssigen meist durch eine Trübung unterscheiden. Man bringt das Röhrchen, an ein Thermometer gebunden, in ein Bad (Becherglas mit Wasser, Petroleum, Paraffin, Schwefelsäure usw.), welches man unter Umrühren sehr langsam erwärmt, und beobachtet die Temperatur, bei welcher der Tropfen schmilzt, was man an seinem Klarwerden oder am Aufhören der Totalreflexion an der Kapillarwand erkennt. Vgl. z. B. Küster, ZS f. ph. Ch. 50, 68. 1905. Die erste Beobachtung wird nur zur Orientierung dienen.

Sicherer ist die Anwendung größerer Mengen. Diese erwärmt man langsam zusammen mit einem Thermometer. Den Schmelzpunkt erkennt man daran, daß die Temperatur einige Zeit lang stationär bleibt.

Hohe Schmelztemperaturen.

Über Quarzglaskapillare vgl. oben.

Tiegelmethode. Der Körper wird in ausreichender Menge im bedeckten Tiegel aus Porzellan oder, wenn eine reduzierende Atmosphäre gewünscht wird, aus Graphit, mittels Flamme, Gebläseofen oder elektrischer Heizung (8, 29) geschmolzen. Durch den Deckel ist ein mit einem Porzellanröhrchen umhülltes Thermoelement (**43** I) eingeführt. Bei richtig regulierter Heizung erkennt man das Schmelzen oder Erstarren daran, daß die Thermokraft eine Zeit lang stationär bleibt.

Drahtmethode. Man fügt das zu untersuchende Metall in Gestalt eines etwa $\frac{1}{2}$ cm langen Drahtstückchens mit einem Galvanoskop in einen Stromkreis ein und erhitzt es neben einem Thermoelement allmählich im Tiegel (s. oben); beim Durchschmelzen, welches an der Unterbrechung des Stromes erkannt wird, beobachtet man die Thermokraft. Wenig oxydierbare Drähte können dabei in die Lötstelle des Elements eingefügt sein, dessen eigener Strom dann zur Beobachtung genügt.

Näheres z. B. bei Holborn u. Day, Ann. der Ph. 2, 523. 1900.

Meldometer (Joly). Ein etwa 10 cm langes, 1 mm breites Platinband wird elektrisch regulierbar geheizt; sein Temperatur-

zustand wird mikrometrisch nach der Verlängerung beurteilt. Benutzt wird nur der mittlere Teil von gleichmäßiger Temperatur. Eine ganz kleine Menge der zu untersuchenden Substanz wird aufgebracht und ihr Aggregatzustand, in allmählich engere Temperatur-Grenzen eingeschlossen, mit einem schwachen Mikroskop beobachtet. Geeicht wird das Instrument empirisch mit Körpern von bekanntem Schmelzpunkt (Tab. 11).

Joly, Chem. News 65, 1. 1892; Ramsay u. Eumorfopoulos, Phil. Mag. 41, 360. 1896.

Über Schm.-P.-Bestimmung im schwarzen Körper vgl. auch **72a** I.

Gefrierpunkt von Lösungen.

Die Bedeutung dieser Aufgabe besteht hauptsächlich in der Bestimmung der Molekulargröße eines gelösten Stoffes. Der Gefrierpunkt eines Lösungsmittels erniedrigt sich durch Auflösung eines Stoffes proportional der molekularen Konzentration der Lösung, solange die letztere nicht zu stark wird (Rüdorff, de Coppet, Raoult). Ist p die in Grammen gemessene gelöste Menge in 1000 gr des Lösungsmittels, M das chemische Molekulargewicht des gelösten Stoffes, so nennt man $p/M = \mu$ die in 1000 gr gelöste Anzahl von Gramm-Molekülen („Molen"). Die Erniedrigung τ des Gefrierpunkts ist dann $\tau = G \cdot \mu = G \cdot p/M$.

Der Faktor G hat, von der Art des gelösten Stoffes unabhängig, für jedes Lösungsmittel einen bestimmten Wert. G ist nach Betrachtungen über die osmotische Arbeit beim Auflösen (van't Hoff) durch die Schmelztemperatur t und die Schmelzwärme ϱ (Tab. 12) des Lösungsmittels gegegeben als $G = 0{,}00198(273 + t)^2/\varrho$,
z. B. für Wasser $= 0{,}00198 \cdot 273^2 : 80 = 1{,}85$. Außerdem ist G empirisch bestimmt; einige Werte sind

	für Wasser	Benzol	Essigsäure	Phenol
Gefrierpunkt	$t = 0{,}0^0$	$5{,}0^0$	17^0	39^0
Schmelzwärme	$\varrho = 80$	30	45	26
	$G = 1{,}85$	5,1	3,8	7,5.

Man erhält also aus der Gefrierpunktserniedrigung τ ein Molekulargewicht

$$M = G\frac{p}{\tau}.$$

Es ist aber zu beachten, daß viele Körper, worunter insbesondere die Elektrolyte (Salze, Alkalien, Säuren), von diesem Gesetz ausgeschlossen sind. Die wirkliche Erniedrigung τ ist bei wässrigen Lösungen von Elektrolyten größer als die aus der Formel mit dem chemischen Molekulargewicht berechnete τ_0. Dies bestätigt die Annahme, daß solche Moleküle in der Lösung zerfallen, „dissoziiert" sind (Arrhenius). Den „Dissoziationsgrad" (vgl. S. 82) berechnet man für eine Spaltung:

in 2 Moleküle als $\frac{\tau}{\tau_0} - 1$, in n Moleküle als $\frac{1}{n-1}\left(\frac{\tau}{\tau_0} - 1\right)$.

Da es nach dem vorigen darauf ankommt, die Gefrierpunktserniedrigung einer Lösung gegen ihr Lösungsmittel mit beträchtlicher Genauigkeit zu bestimmen, und da der Druck das empfindliche Thermometer beeinflußt, da auch der Gefrierpunkt des Lösungsmittels durch geringfügige Eigenschaften etwas geändert werden kann, so ermittelt man die Gefrierpunkte des Lösungsmittels und der Lösung mit dem nämlichen Thermometer in gleicher Eintauchtiefe kurz nacheinander.

Eine genaue Messung verlangt trotzdem beträchtliche Vorsichtsmaßregeln, besonders in Wasser als Lösungsmittel. Man bestimmt den Gefrierpunkt durch langsames Abkühlen der Lösung mit einem empfindlichen Thermometer unter stetem Umrühren mit leichtem Klopfen des Thermometers. Die Temperatur pflegt zunächst ohne Erstarrung unter den Gefrierpunkt zu sinken; beginnt die Ausscheidung, so steigt die Temperatur plötzlich auf den Gefrierpunkt, der nun abgelesen wird. Das Gefrieren wird zweckmäßig durch Impfen mit einer Spur von gefrorenem Lösungsmittel eingeleitet.

Anordnung von Beckmann. Ein innerer Cylinder enthält die durch einen Seitenansatz eingegossene Lösung, das Thermometer und einen Rührer, der auch durch ein Uhrwerk oder elektromagnetisch bewegt werden kann. Von dem Quecksilberfaden des Thermometers kann man je nach dem Gefrierpunkt des angewandten Lösungsmittels geeignete Mengen abtrennen (39). Die Erniedrigung wird von der Einstellung des Quecksilberfadens in dem gefrierenden reinen Lösungsmittel gezählt. Jener Cylinder ist durch eine Luftschicht in einem etwas weiteren umgebenden Cylinder von der Kältemischung usw. getrennt, in die man den weiteren Cylinder einsetzt. Die durch das Verhältnis von Eis und Kochsalz regulierbare Temperatur der Kältemischung soll nicht zu weit (3°) unter der Gefriertemperatur liegen, da man die letztere sonst im allgemeinen zu tief, oder, wenn sich ein Eiscylinder an den Wänden bildet, auch wohl zu hoch findet.

Der Cylinder wird mit einer gewogenen Menge (vielleicht 20 gr) des Lösungsmittels beschickt und dessen Gefrierpunkt nach der oben gegebenen Anweisung wiederholt bestimmt. Ebenso, nachdem man eine gewogene Menge des aufzulösenden Körpers eingeführt hat, der erniedrigte Gefrierpunkt. Man erniedrigt um einige Zehntel Grad, setzt also etwa $\frac{1}{1000}$ bis $\frac{2}{1000}$ gr-Molekül zu 10 gr des Lösungsmittels. Einen Versuch mit einer zweiten, vorher abgewogenen Dose kann man gleich anschließen.

Beispiel. 1) 20 gr Wasser. Nachdem das in 1/100 geteilte Thermometer auf — 0,3 gesunken war, wurde das Gefrieren eingeleitet. Das Thermometer stieg auf + 0,016. 2) 1,00 gr Rohrzucker in diesem Wasser gelöst und bis zu — 0,6 gekühlt. Nach Einbringen einer Spur Eis stieg das Thermometer auf — 0,259. Also Gefrierpunkts-Erniedrigung $\tau = 0{,}016 - (-0{,}259) = 0{,}275^0$. — Das Molekulargewicht M berechnet sich hieraus, da $p = 1{,}00 \cdot 1000/20 = 50$ und die Konstante für Wasser $G = 1{,}85$ ist, $M = G \cdot p/\tau = 1{,}85 \cdot 50/0{,}275 = 336$. ($C_{12}H_{22}O_{11}$ gibt $M = 342$.)

Differential-Thermoelement; vgl. **43** I. Da der Temperaturunterschied zwischen den beiden Gefriertemperaturen maßgebend ist, so bietet sich als einfachstes und empfindlichstes Verfahren die Anwendung eines Thermoelementes, dessen Lötstellen, die eine in das gefrierende Lösungsmittel, die andere in die gefrierende Lösung eintauchen, nötigenfalls gegen chemischen Angriff oder Nebenschluß durch leitende Flüssigkeiten in eine Glaskapillare eingehüllt.

Vgl. Hausrath, Ann. der Ph. 9, 522. 1902.

Korrektion wegen des Ausfrierens des Lösungsmittels. Das Ausfrieren erhöht die Konzentration, also soll die dem Gefrieren vorausgegangene Unterkühlung nicht zu beträchtlich sein und das Ausfrieren nicht lange dauern. Die durch Ausfrieren entstandene Erhöhung der Konzentration läßt sich aus der dem Gefrieren vorausgegangenen Unterkühlung $\varDelta$ unter den Gefrierpunkt schätzen. Ist ϱ die Schmelzwärme des Lösungsmittels, c die spezifische Wärme der Lösung, wofür merklich die des Lösungsmittels gesetzt werden darf, so ist durch das Ausfrieren die Konzentration nahe im Verhältnis $1 + c\varDelta/\varrho$ gewachsen. Dauerte das Ausfrieren bis zur Beobachtung längere Zeit, so wird die Korrektion größer. Man kann dann den Verlauf des allmählichen Niedergangs des Gefrierpunkts noch eine Zeit lang beobachten und auf den ersten Augenblick zurückrechnen.

Über ein Verfahren mit reichlicher Eisbildung und nachheriger Analyse der Lösung vgl. Richards, ZS f. ph. Ch. 44, 563. 1903.

Literatur u. a.: Beckmann, ZS f. ph. Ch. 2, 638 u. 715. 1888; 21, 239. 1896; 44, 170. 1903. Über Vorsichtsmaßregeln: Loomis, Wied. Ann. 51, 500. 1894; ZS f. ph. Ch. 37, 407. 1901; Nernst u. Abegg, ZS f. ph. Ch. 15, 681. 1894; Abegg, Wied. Ann. 64, 486. 1898; Jahn, ZS f. ph. Ch. 50, 129. 1905; auch Nernst, theor. Chemie p. 263. 1907. — Über den Gang der Depression in konzentrierteren Lösungen z. B. Abegg, ZS f. ph. Ch. 15, 209. 1894; Jones und Mitarbeiter, z. B. Amer. Ch. J. 38, 683. 1907. — Eine eingehende zusammenfassende Behandlung: Raoult, ZS f. ph. Ch. 27, 618. 1898.

Siehe über methodische und chemische Gesichtspunkte auch die chemischen Lehrbücher, z. B. Nernst, theor. Chem.; Ostwald-Luther; Roth, Ph.-chem. Übungen.

46. Siedepunkt.

Siedepunkt einer Flüssigkeit nennt man die Temperatur, bei welcher sie unter dem normalen Atmosphärendruck von 760 mm Quecksilber von 0° siedet, d. h. bei welcher ihre gesättigte Dampfspannung 760 mm beträgt.

Die Dampfentwicklung pflegt von der Wand aus stattzufinden, nicht nur weil in der Regel von hier aus geheizt wird, sondern auch weil die Dampfblasenbildung im Innern der Flüssigkeit durch die Kohäsion erschwert wird, während an der Wand eine Gasschicht zu haften pflegt, welche die Kohäsion vermindert. Im Laufe der Zeit vermehrt sich die Kohäsion zwischen Wand und Flüssigkeit und es entsteht ein „Siedeverzug", d. h. eine unter Umständen, und zwar besonders bei langsamem Sieden, beträchtliche Überhitzung über den Siedepunkt. Metallwände sind in dieser Hinsicht weniger gefährlich als Glaswände. — Vorteilhaft kann als Wärmequelle auch eine elektrisch geheizte Drahtspirale in der Flüssigkeit sein.

Bei der Messung hat man, unter möglichstem Ausschluß der Abkühlung wie besonders der Überhitzung der nicht bespülten Wandflächen, mit der Flamme oder mit einem Bade ein mäßiges gleichförmiges Sieden zu unterhalten, wobei die Siedeverzüge durch Stückchen Platinblech oder noch besser durch einen durch den Gefäßboden durchgeschmolzenen Platindraht eine Zeit lang verhindert werden können. Immerhin bringe man das Thermometer **nicht** in die Flüssigkeit, sondern dicht über die Oberfläche; es überzieht sich mit einer Flüssigkeitshaut und zeigt dann den richtigen Siedepunkt an. (In Lösungen dagegen muß das Thermometer **eintauchen**; vgl. unten.)

Über die etwaige Thermometer-Korrektion wegen **herausragenden Fadens** s. **40** V. — Über **Rückflußkühler**, die z. B. für Gemische nötig sind, vgl. 8, 27.

Reduktion auf 760 mm Quecksilberdruck. Das Sieden fand unter dem Barometerdruck b statt. Kennt man die Zunahme δ des Siedepunktes auf $+1$ mm Quecksilberdruck in der Gegend von 760 mm für die betreffende Flüssigkeit (Tab. 12; Landolt-Börnstein-Meyerhoffer S. 177), so korrigiert man durch Addition von $\delta(760 - b)$ zum beobachteten S.-P. — Diese Zunahme ist im allgemeinen um so größer, je höher der S.-P. t einer Flüssigkeit liegt. Als empirische Näherung kann durchschnittlich $\delta = (0{,}030 + 0{,}00011\,t)$ Grad/mm berechnet werden (für Wasser kommt so 0,041, statt richtig 0,038).

Genauer ist die „Craft'sche Regel", daß bei chemisch verwandten Körpern die obige Größe δ nahe der **absoluten Temperatur** $T = 273 + t$ ihres S.-P. proportional ist. Ist also für einen verwandten Körper vom

S.-P. t' die Zahl δ' bekannt, so berechnet man sie für den Versuchskörper $\delta = \delta'(273 + t)/(273 + t')$.

Siedepunkt einer Lösung.

Zweck ist in der Regel die „ebullioskopische“ Bestimmung der Molekulargröße des gelösten Körpers; vgl. **45** u. **46a**.

Gesetz der Siedepunktserhöhung einer Lösung. Durch Auflösung eines Stoffes, der selbst nicht verdampft, vermindert sich die Dampfspannung, also erhöht sich der Siedepunkt des Lösungsmittels. Solange die Lösung verdünnt bleibt, ist die Änderung proportional der molekularen Konzentration. In 1000 gr des Mittels seien gelöst p gr des Körpers, also $p/M = \mu$ gr-Moleküle, wenn M das Molekulargewicht des Körpers. Dann beträgt die Erhöhung τ des Siedepunktes (vgl. auch **46a**)

$$\tau = S \cdot \mu \quad \text{oder} \quad \tau = S \cdot p/M.$$

S ist erfahrungsgemäß (Raoult) für jedes Lösungsmittel konstant, für Äther 2,1, Alkohol 1,16, Benzol 2,7, Chloroform 3,6, Wasser 0,52. S. auch Tab. 12. S berechnet sich (van't Hoff), nach den Anschauungen über den osmotischen Druck, aus der Siedetemperatur t und der Verdampfungswärme σ des Lösungsmittels (Tab. 12)

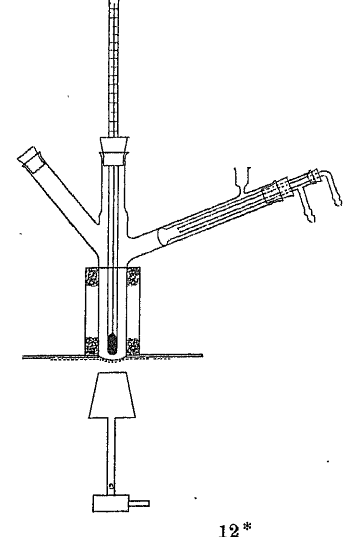
$$S = 0{,}00198\,(273 + t)^2/\sigma,$$

z. B. für Wasser $= 0{,}00198 \cdot 373^2 : 538 = 0{,}512$. — Empirisch wird S bestimmt, indem man einen Stoff auflöst, über dessen Molekulargröße in dem Lösungsmittel kein Zweifel besteht.

Über Dissoziation, besonders in wässriger Lösung, vgl. S. 175.

Aus der S.-P.-Erhöhung τ eines Lösungsmittels von der Konstante S berechnet sich nach obigem das Molekulargewicht des gelösten Stoffes $$M = S\frac{p}{\tau}.$$

Die besonderen Maßregeln bei der Messung richten sich hauptsächlich gegen die Fehlerquelle der Überhitzung.



Siedegefäß von Beckmann. Das Gefäß, dessen Boden durch ein mit Wasserglas angeklebtes Stück Asbestpappe gegen die direkte Wirkung des Brenners geschützt ist, steht auf dem Ausschnitt einer Asbestpappe, deren untere Seite mit einem Drahtnetz versehen ist. An den Seiten ist das Siederohr durch einen mit Glaswolle abgedichteten Luftmantel und oben durch eine Glimmerplatte geschützt. Der eine Seitenfortsatz enthält einen von Wasser

durchströmten Kühler, der den Dampf kondensiert, so daß die Menge des Lösungsmittels ungeändert bleibt. — Statt des Luftmantels wird auch ein Ringgefäß mit siedendem Lösungsmittel gebraucht.

Die Lösung selbst wird so bereitet, daß eine abgewogene Menge Lösungsmittel, etwa 10 bis 20 gr, eingebracht wird, deren Siedepunkt man zuerst bestimmt. Abgewogene Mengen des Körpers werden dann mit Pipetten oder in Stücken oder zu Pastillen gepreßt durch den anderen Seitenfortsatz eingeführt. Der untere Teil des Siedegefäßes enthält Glasperlen und Platintetraeder, um das Sieden zu erleichtern und um mit wenig Flüssigkeit auszureichen.

Dampfstromheizung. Manche Fehlerquellen werden vermieden, wenn man die Lösung in der Art sieden läßt, daß Dampf vom siedenden Lösungsmittel hindurch geführt wird. Nachdem die Temp. stationär geworden ist, bricht man den Versuch ab und bestimmt die Konzentration.

Über Maßnahmen bei den Versuchen, neuere Formen und Literatur (u. a. Dampfstrom- und elektrische Heizung, Anwendung niedrig siedender Flüssigkeiten) s. Beckmann, ZS f. phys. Ch. 63, 177. 1908. Vgl. z. B. auch Roth, Phys.-ch. Übungen p. 46 ff.

Beispiel. Zu 20 gr Wasser wurden 8 gr Rohrzucker gesetzt, also $p = 400$ gr Zucker in 1000 gr Wasser. Das Wasser zeigte den Siedepunkt 99,72°, die Lösung 100,34°; also $\tau = 100{,}34 - 99{,}72 = +0{,}62°$. Hieraus berechnet sich das Molekulargewicht des Rohrzuckers $M = S \cdot p/\tau = 0{,}52 \cdot 400/0{,}62 = 335$ (anstatt $C_{12}H_{22}O_{11} = 342$).

Differential-Thermoelement. Vgl. hierüber S. 177.

46a. Dampfspannung.

Unter Dampfspannung eines Körpers wird der (nach einer Quecksilbersäule von 0° oder nach Atmosphären gezählte) Druck seines gesättigten Dampfes verstanden, welcher durch das Einbringen der Substanz im Überschuß in das Vakuum entsteht, d. h. z. B. bei Zimmertemperatur die Höhe, um welche der Meniskus einer Toricelli'schen Vakuumröhre dadurch sinkt, daß man die Flüssigkeit in einem kleinen Überschuß in das Vakuum bringt.

Die D.-Sp. wächst beschleunigt mit der Temperatur. Die Temperatur, für welche sie 1 Atm. beträgt, ist gleich dem Siedepunkt des Körpers.

Man stellt ein Toricelli'sches Vakuum her, indem man ein etwa meterlanges, hinreichend weites, einseitig geschlossenes Glasrohr mit trockenem Quecksilber (8, 1) fast ganz füllt, die anhängenden Luftbläschen mittels der an der Rohrwand gleitenden größeren Luftblase oder vollkommener durch Auskochen beseitigt und das alsdann ganz gefüllte Rohr mit dem Finger verschlossen in Quecksilber umstürzt. An einer Millimeterteilung hinter oder auf dem Rohr oder mit dem Kathetometer (**22**; **36**) liest man die Höhe der Quecksilbersäule ab, die dem Barometerstande nahe gleich sein muß. Man bringt in das Vakuum die luftfreie Substanz im Überschuß, indem man sie unten, eine Flüssigkeit mit einem Spritzchen oder

in einem kleinen leichten Fläschchen, welches nötigenfalls mit aufsteigen darf, einführt und aufsteigen läßt. (Bei stark verdampfenden Substanzen das Rohr vorher neigen, bis das Quecksilber oben anstößt, sonst wird das Rohr zertrümmert!)

An dem abgebildeten Rohrverschluß wird der Stöpsel (hier ein geschliffenes Thermometer) durch Quecksilber gedichtet, ev. noch mit einem nicht verdampfenden Schmiermittel, welches von der Flüssigkeit nicht angegriffen wird (8, 22). Alle Manipulationen werden einfach, wenn das Gefäß, in dem das Rohr steht, einen so langen Fortsatz hat, daß man das Rohr ganz einsenken kann. Nach Herstellung und Ablesung des Vakuums gießt man die zu untersuchende Flüssigkeit in den Trichter und lüftet den Stöpsel vorsichtig, bis das Quecksilber und so viel Flüssigkeit eingetreten ist, daß ein Teil unverdampft bleibt, gießt aber alsbald wieder etwas Quecksilber auf.

Die Höhe der Quecksilbersäule sei jetzt $= H'$, während sie unter dem Vakuum $= H$ war. Dann ist $H - H'$, ev. gemäß dem folgenden korrigiert, die Dampfspannung des Körpers.

Zu dem abgelesenen H' ist zuzuzählen erstens $h \cdot s/13{,}6$, wo s das spezifische Gewicht und h die Höhe der nicht verdampften Flüssigkeit auf dem Quecksilber ist; zweitens in höherer Temperatur die Spannkraft des Quecksilberdampfes selbst nach Tab. 15. Außerdem sind während länger dauernder Versuche die Änderungen des Barometerstandes in leicht ersichtlicher Weise zu berücksichtigen. War bei der Trockenablesung der Barometerstand $= b$, bei der Ablesung mit Dampf aber $= b'$, so hat man H' um $b - b'$ zu vergrößern.

Man liest immer oben am Quecksilbermeniskus ab. Da die Kapillarspannung des Quecksilbers durch den Flüssigkeitstropfen geändert wird und da dieser ebenfalls eine Kapillarspannung besitzt, so verlangen genaue Messungen, besonders bei geringen Spannungen, ein Rohr, welches an den Ablesestellen 15 bis 20 mm weit ist. — Vor der Ablesung soll man durch vorübergehendes Tieferstellen oder Neigen des Rohres neue Flüssigkeitsteile an die Oberfläche bringen.

Je kleiner der Raum des Vakuums ist, desto größer werden Fehler aus einem Rest Luft; denn dessen Druck vermindert sich bei der Ausdehnung in den größer gewordenen Raum und wird daher nicht etwa nach dem Dalton'schen Gesetz eliminiert, wenn man H' von H abzieht.

Flüssigkeiten von größerem Dampfdruck kann man über Quecksilber im geschlossenen kürzeren Schenkel eines aufrecht stehenden Heberrohres untersuchen. Die D.-Sp. ist gleich dem

äußeren Luftdruck + Höhendifferenz des Quecksilbers in beiden Schenkeln. Verunreinigungen durch schwerer flüchtige Körper werden hier bedenklicher, weil der verdampfende Bruchteil groß und der Rest also stärker verunreinigt ist.

Für andere Temperaturen als Zimmertemperatur muß man den Verdampfungsraum mit einem durchsichtigen Bade (Wasser, Eis und Wasser, Dampf) umgeben und sorgfältig darauf halten, daß kein Teil eine niedrigere Temperatur hat, als die beobachtete. Es kommen dann aber auch die Temperaturänderungen der Quecksilbersäule in Betracht, insofern sie die Dichtigkeit des Quecksilbers ändern.

Genaue Messungen z. B. Regnault, Ann. chim. phys. (3) 11, 273. 1844; 15, 179. 1845; Pogg. Ann. Ergbd. II, 119, 1848; Magnus, Pogg. Ann. 61, 225. 1844. Über die reiche spätere Lit. s. z. B. Chwolson, III, 782.

Über ein Verfahren mit einem Differentialmanometer, an welchem der Dampfdruck und das Vakuum ausgewechselt werden, s. Thiesen u. Scheel, Wiss. Abh. d. P. T. Reichsanst. III, 76. 1900.

Bestimmung im Gasstrom. Durch die Flüssigkeit wird ein in ihr wenig lösliches Gas in gemessenem Volumen geführt, z. B. Knallgas, aus Natronlauge durch einen gemessenen elektrischen Strom entwickelt; **87** u. Tab. 31. Die von dem Gase aufgenommene Dampfmenge ist dieselbe wie im Vakuum bei gleicher Temperatur im gleichen Volumen (Dalton). Diese Menge wird durch Differenzwägung der verdampfenden Flüssigkeit oder durch Absorption in einem zweiten Gefäß ermittelt. — Aus Menge, Volumen, Temperatur und Dampfdichte oder Molekulargewicht ergibt sich die Dampfspannung. Vgl. **18** u. **19**.

Über Ausführung und Rechnung s. z. B. Gahl, ZS f. phys. Ch. 33, 178. 1900; Gaus, ZS f. anorg. Ch. 25, 238. 1900; Ostwald-Luther S. 270.

Siedeverfahren. Aus der Siedetemperatur t (**46**) einer Flüssigkeit erhält man immer einen Punkt der Dampfspannungskurve, nämlich die Spannkraft b (Barometerstand), welche zu t gehört. Sieden unter anderem als atmosphärischem Drucke wird durch ein an den Dampfraum angeschlossenes größeres Luftvolumen von regulierbarer Dichtigkeit („künstliche Atmosphäre") unter Anwendung eines Rückflußkühlers (8, 27) ermöglicht.

Eine neue Ausführung s. Holborn u. Henning, Ann. d. Ph. 26, 833. 1908.

Lösungen.

Das Gesetz (Babo, Wüllner, Ostwald, Raoult), nach welchem die Dampfspannung einer Flüssigkeit durch die Auflösung eines, selbst nicht merklich verdampfenden Körpers verkleinert wird, lautet: Enthält die Lösung μ Moleküle des gelösten Körpers auf μ' Moleküle des Lösungs-

mittels, welchem an sich die Spannung e zukommt, so beträgt die Depression ε der D.-Sp. (Raoult 1888)

$$\varepsilon = e \frac{\mu}{\mu + \mu'} .$$

μ und μ' berechnen sich aus der Masse des gelösten Körpers p und des Lösungsmittels p', wenn M und M' die zugehörigen Molekulargewichte bedeuten, $\mu = p/M$ und $\mu' = p'/M'$. — Die Dampfdruckerniedrigung von Lösungen dient also nach folgender Regel zur Ermittelung von Molekülgrößen: es seien p Gewichtsteile eines Körpers in p' Teilen einer Flüssigkeit gelöst. Die Dampfspannung der Flüssigkeit sei e (Tab. 13, 14, 15), diejenige der Lösung sei um ε kleiner. Dann verhalten sich die Molekulargewichte

$$\frac{M}{M'} = \frac{p}{p'} \frac{e - \varepsilon}{\varepsilon} .$$

Für konzentriertere Lösungen entstehen Abweichungen; s. z. B. Dolezalek, ZS f. ph. Ch. 64, 727. 1908. Über Elektrolyte vgl. S. 175.

Man kann die vorige direkte Methode anwenden, allein die gesuchte Differenz ε ist hierdurch bei verdünnten Lösungen nicht leicht genug zu ermitteln.

Differenzmethode (Dieterici). Ein empfindliches Manometer (vgl. **36** I, IV, VI) wird durch Hahnverbindungen abwechselnd mit den auf derselben Temperatur gehaltenen Dampfräumen der Lösung und des Lösungsmittels verbunden und zeigt so die gesuchte Differenz an. Die übrigen Apparatenteile werden auf einer höheren Temperatur gehalten. Die Reduktionskonstante des Manometers wird empirisch ermittelt.

Dieterici, Wied. Ann. 50, 47. 1893; 62, 620. 1897.

Siedeverfahren. Die Depression der D.-Sp. in einer Lösung kann man folgendermaßen bestimmen. Man füllt ein „abgekürztes Barometer" von mindestens 10, besser 15 mm Weite mit Quecksilber, bringt in den geschlossenen Schenkel eine nicht zu kleine Menge der Lösung und hängt das Ganze in einen Raum, der durch einen starken Dampfstrom des siedenden Lösungsmittels geheizt wird. Der Höhenunterschied der Quecksilbersäulen in beiden Schenkeln gibt die Depression. Korrektionen s. S. 181.

Beispiel. Lösung von $p = 20$ gr Rohrzucker in $p' = 100$ gr Wasser. Unterschied der beiden Quecksilberhöhen $= 7{,}5$ mm; im geschlossenen Rohr über dem Quecksilber noch 11 mm der 17% Zuckerlösung. Deren spez. Gewicht bei 100^0 ist nahe $= 1$, also $\varepsilon = 7{,}5 + 11/13{,}4 = 8{,}32$. Der Barometerstand, auf Quecksilber von 100^0 umgerechnet, war $e = 747$ mm,

also ist
$$M = M' \frac{p}{p'} \frac{e-\varepsilon}{\varepsilon} = 18 \frac{20}{100} \frac{747-8{,}3}{8{,}32} = 320.$$
In Wirklichkeit $C_{12}H_{22}O_{11} = 342$.

Über die Ermittelung der Dampfdruck-Erniedrigung aus dem Siedepunkte der Lösung s. **46**.

Über die statischen Methoden vgl. noch z. B. Lehmann, Molekularphysik II 144. 1889.

47. Bestimmung der Luftfeuchtigkeit (Hygrometrie).

Für die Meteorologie oder für physikalische Zwecke kommen folgende hygrometrische Eigenschaften der Luft in Betracht:

1. Die Dichtigkeit des Wasserdampfes in der Luft, d. h. die in 1 ccm Luft enthaltene Wassermenge in gr. Weil die Zahl sehr klein ist, pflegt man sie mit 10^6 multipliziert anzugeben, wodurch man also den Wassergehalt von 1 cbm Luft in gr ausgedrückt erhält. Diese Größe heißt in der Meteorologie die absolute Feuchtigkeit der Luft; sie werde mit f bezeichnet.

2. Die relative Feuchtigkeit oder der Sättigungsgrad, d. h. das Verhältnis des wirklich vorhandenen Wassergehaltes zu demjenigen, bei welchem die Luft mit Wasser gesättigt wäre. Diese Größe ergibt sich aus der absoluten Feuchtigkeit f und der Lufttemperatur, zu welcher man aus Tab. 13 das Maximum f_0 des möglichen Wassergehaltes entnimmt, als f/f_0.

3. Die Spannkraft e des Wasserdampfes oder der Dunstdruck.

Wird die Spannkraft in mm Quecksilber gemessen, so hängen Spannkraft e, absolute Feuchtigkeit f und Lufttemperatur t durch die Formeln zusammen:
$$e = 0{,}945(1 + 0{,}00367t) \cdot f, \quad f = 1{,}058 \frac{e}{1 + 0{,}00367t}, \qquad 1.$$
so daß außer t nur e oder f bestimmt zu werden braucht.

Ableitung: Die Dampfdichte des Wassers ist (S. 82) $= 0{,}622$; also wiegt 1 cbm Dampf (**18**, **19**),
$$10^6 \cdot 0{,}622 \cdot \frac{0{,}001293}{1 + 0{,}00367t} \cdot \frac{e}{760} = \frac{1{,}058e}{1 + 0{,}00367t} \text{ gr.}$$

Bequem für das Gedächtnis ist, daß (Tab. 13) e in mm und f in gr/cbm einander nahe gleich sind. Außerdem entfernen sich die Werte in mittlerer Temperatur (von 6 bis 30°) im Falle der Sättigung nicht weit von der in Centigraden ausgedrückten Temperatur selbst.

Nach Kornatz, Diss. Königsberg 1908, wären größere Werte als die theoretische Zahl 0,622 einzuführen.

4. Der Taupunkt, d. h. die Temperatur τ, bei welcher die Luft mit dem vorhandenen Wasserdampf gesättigt sein würde.

I. Taupunkt-Hygrometer (Daniell 1820; Regnault).

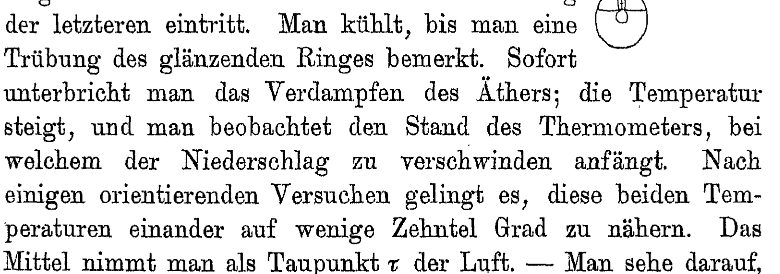
In Tab. 13 findet man den zum Taupunkt τ gehörigen Wassergehalt f von 1 cbm Luft, sowie die Spannkraft e des bei

τ gesättigten Wasserdampfes; und zwar ist e ohne weiteres die in der Atmosphäre vorhandene Spannkraft. f verlangt eine Korrektion, weil die Luft an der Taufläche abgekühlt und dadurch verdichtet worden ist. Das aus der Tabelle zu τ entnommene f ist also zu groß und muß mit

$$\frac{1+0{,}00367\,\tau}{1+0{,}00367\,t}=\frac{273+\tau}{273+t}$$

multipliziert werden, wenn t die Lufttemperatur bedeutet.

Man stellt das Instrument so auf, daß die glänzende Fläche dem Auge volles Himmelslicht oder das Licht einer Kerze spiegelt. Am Daniell'schen Hygrometer (Fig.) wird die mit dem Läppchen bewickelte Kugel durch das Verdampfen aufgetröpfelten Äthers gekühlt, worauf eine Destillation von der anderen Kugel aus und hierdurch auch die Abkühlung der letzteren eintritt. Man kühlt, bis man eine Trübung des glänzenden Ringes bemerkt. Sofort unterbricht man das Verdampfen des Äthers; die Temperatur steigt, und man beobachtet den Stand des Thermometers, bei welchem der Niederschlag zu verschwinden anfängt. Nach einigen orientierenden Versuchen gelingt es, diese beiden Temperaturen einander auf wenige Zehntel Grad zu nähern. Das Mittel nimmt man als Taupunkt τ der Luft. — Man sehe darauf, daß die vom Körper, vom Atmen usw. herrührende Feuchtigkeit möglichst von der Taufläche entfernt bleibt.



Am Regnault'schen Hygrometer (Fig.) sucht man durch Regulieren des Wasserabflusses aus dem Aspirator eine solche Temperatur des durch den Luftstrom verdampften Äthers zu bewirken, daß auf der glänzenden Fläche ein Niederschlag zeitweilig entsteht und verschwindet. Diese Temperatur ist der Taupunkt.

Vervollkommnete Formen, auch mit Durchblasen von Luft statt Durchsaugen, von Alluard, Crova (s. Chwolson III, S. 777); eine nichts neues bietende, aber handliche Ausführung auch von Lambrecht.

II. Psychrometer (August 1828).

Die atmosphärische Feuchtigkeit wird aus der Geschwindigkeit bestimmt, mit welcher Wasser in der Luft verdampft, welche Geschwindigkeit wiederum aus der Abkühlung eines befeuchteten Thermometers erkannt wird.

Ist t die Lufttemperatur (Temperatur eines trockenen Thermometers),

t' die Temperatur des feuchten Thermometers,

e' die Spannkraft des gesättigten Wasserdampfes bei t', wie sie aus Tab. 13 entnommen wird,

b der Barometerstand in mm,

so erhält man nach meteorologischen Erfahrungen die wirkliche Dampfspannung e, je nachdem

	t' über 0^0	oder unter 0^0 liegt,
	$e = e' - 0{,}00080\, b\, (t - t')$	$e' - 0{,}00069\, b\, (t - t')$.

Aus e berechnet sich die absolute Feuchtigkeit f vermöge der Formel 1 Seite 184.

Obige Konstanten gelten für Beobachtungen in freier, mäßig bewegter Luft. In ruhender Luft sind größere Zahlen einzusetzen, die im geschlossenen kleinen Zimmer um 50% steigen können. Um bei Zimmerbeobachtungen die Bedingungen der Konstante 0,00080 herzustellen, bewegt man das Psychrometer, am einfachsten, indem man es an einem langen Faden pendeln läßt.

Näherungsformeln. Bei den mancherlei Fehlerquellen des Psychrometers genügt es häufig, für b einen mittleren Barometerstand anzunehmen. Setzt man $b = 750$ mm, so wird

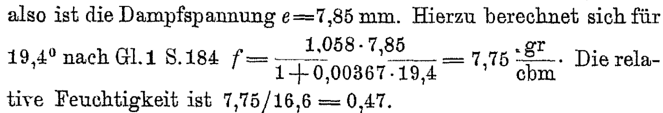
$$e = e' - 0{,}60\,(t - t'), \quad \text{bez. unter } 0^0 \quad -0{,}52\,(t - t'). \qquad 2.$$

Genähert kann man auch f nach der Formel

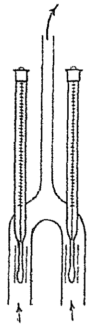
$$f = f' - 0{,}64\,(t - t') \qquad 3.$$

berechnen, worin man für f' den aus Tab. 13 zu t' entnommenen Wert setzt.

Beispiel. $t = 19{,}42^0$, $t' = 13{,}34^0$; $b = 739$ mm. Man findet zu t' in Tab. 13 $e' = 11{,}44$ mm. Davon ist abzuziehen $0{,}00080 \cdot 739 \cdot 6{,}08 = 3{,}59$ mm, also ist die Dampfspannung $e = 7{,}85$ mm. Hierzu berechnet sich für



$19{,}4^0$ nach Gl. 1 S. 184 $f = \dfrac{1{,}058 \cdot 7{,}85}{1 + 0{,}00367 \cdot 19{,}4} = 7{,}75 \dfrac{\text{gr}}{\text{cbm}}$. Die relative Feuchtigkeit ist $7{,}75/16{,}6 = 0{,}47$.



Die genaue Regnault'sche Formel $e = e' - \dfrac{0{,}480\, b\,(t - t')}{610 - t'}$, bez. unter Null 689 statt 610, gibt nur in besonders hohen Temperaturen merklich andere Werte als unser Ausdruck.

Aspirations-Psychrometer (Assmann); Fig. Temperaturbeobachtungen der Luft werden durch Strahlung gefährdet, besonders im Freien. Deswegen sind die Ther-

mometerkugeln hier von einem polierten doppelten Metallschutzrohr umgeben, durch welches mittels eines Uhrwerk-Ventilators ein Luftstrom mit etwa 2 m/sec Geschwindigkeit gesaugt wird. Man berechnet $e = e' - 0{,}00066 \cdot b(t - t')$, unter gewöhnlichen Verhältnissen nahe $= e' - 0{,}5(t - t')$. — Auch für nicht meteorologische Zwecke kann die Anwendung eines Thermometers mit Ventilation wertvoll sein.

Assmann, ZS f. Instr. 1892, 1.

III. Absorptionshygrometer.

Direkt erhält man den Wassergehalt, wenn man ein gemessenes Volumen der Luft durch eine mit Stückchen Chlorcalcium, oder Bimsstein mit konzentrierter Schwefelsäure, oder besser mit wasserfreier Phosphorsäure gefüllte Röhre saugt und das absorbierte Wasser wägt.

Andere, auf das Dalton'sche Gesetz (S. 80) gegründete, Methoden sind: an einer abgeschlossenen Luftmenge entweder

1) die Spannkrafts- oder Volumverminderung bei dem Austrocknen durch Schwefelsäure oder

2) die Zunahme beim Sättigen mit Wasser zu messen.

Zu 1) vgl. Edelmann, Münch. Sitz. Ber. 1907, 35; zu 2) Salvioni, Nuovo Cimento (5) 3, 390. 1902; Hesehus, J. Russ. ph.-ch. Ges. 34, 331. 1902.

Über den Vorschlag zu einem kleinen Zeiger-Hygrometer, bei welchem ein qcm Seidenpapier, mit Chlorcalcium getränkt, an einem horizontalen Glasfaden als Hebelarm und Zeiger auf die Torsion eines feinen gespannten Drahtes wirkt, vgl. Hertz, Verh. Berl. Ph. Ges. 1882, 18.

IV. Haarhygrometer usw. (Saussure).

Die Gestalt (Länge, Torsion, Krümmung) hygroskopischer Körper hängt von der Luftfeuchtigkeit ab. Die Einstellung s des Zeigers an der Skale soll die relative Feuchtigkeit in Prozenten geben, also $s = 100 f/f_0$, oder $f = \frac{1}{100} s \cdot f_0$, wo f_0 zu der Lufttemperatur aus Tab. 13 genommen wird. Die Spannkraft e wird aus f berechnet (vgl. S. 184).

Um den 100 %-Punkt zu prüfen, stellt man das Instrument einige Zeit neben Wasser unter eine gut schließende Glocke. Am Koppe'schen Hygrometer wird der Zeugstoff, der sonst die durchlässige Hinterwand bildet, genäßt und der abschließende Schieber aufgesetzt. — Der Nullpunkt wird unter einer Glocke mit konzentrierter Schwefelsäure kontroliert; manche Hygrometer sollen aber durch das Austrocknen Schaden leiden.

Andere Punkte der Teilung werden durch gleichzeitige Beobachtung eines anderen Hygrometers geprüft oder neben wässrigen Schwefelsäurelösungen (Tab. 3); über diesen beträgt nach Herstellung des Gleich-

gewichts (mit einem Schaufelrad rühren! 8, 28) die relative Feuchtigkeit:

bei	0	10	20	30	40	50	60	70	80 % H_2SO_4
rel. F.	100	95	87	76	57	35	18	7	2 Prozent.

Regnault, Ann. ch. ph. 15, 129. 1845; vgl. Lindeck ZS f. Instr. 1908, 237.

48. Kalorimetrie. Wasser-Kalorimeter. Spezifische Wärme, Mischungsverfahren.

Einheit der Wärmemenge oder Kalorie.

Vgl. Warburg, Referat über die Wärmeeinheit, Leipzig 1900; Scheel und Luther, Verh. D. Ph. Ges. 1908, 584.

Als Einheit pflegt man die Wärmemenge zu setzen, welche die Masseneinheit Wasser (1 gr oder 1 kg; Gramm- oder Kilogramm-Kalorie) um 1° erwärmt. Diese Menge ändert sich etwas mit der Temperatur. Da man zumeist mit Wasser von einigen Graden unterhalb Zimmertemperatur mißt, so wird jetzt bevorzugt und hier als „Kal_{15}" zugrunde gelegt:

die Wärmemenge, welche die Masseneinheit Wasser bei 15° (von 14,5 auf 15,5°) um 1° erwärmt.

Außerdem kommen in Betracht:

die Regnault'sche Kalorie von 0 auf 1°, die lange Zeit gebraucht worden ist. Sie wird nahe $= 1{,}008\ Kal_{15}$ anzunehmen sein (vgl. S. 190);

die mittlere Kalorie, der 100te Teil der Wärmemenge, welche die Masseneinheit Wasser von 0 auf 100° erwärmt. Auf diese Menge kann man nämlich das Eisschmelzverfahren am bequemsten zurückführen. Sie kommt nach den bisherigen Bestimmungen, vielleicht auf $\pm$ 0,002 unsicher, der Kal_{15} merklich gleich. Wir setzen also 1 mittl. Kal $= 1{,}000\ Kal_{15}$. Vgl. auch Behn, Ann. der Ph. 16, 653. 1905;

die Eis-Kalorie, das ist die zum Schmelzen der Masseneinheit Eis notwendige Wärmemenge. Wir setzen sie, mit einer Unsicherheit von einigen Promille, $= 80{,}0\ Kal_{15}$;

die mechanische Kalorie. Die wissenschaftliche Einheit ist die Wärmemenge, welche der Arbeitseinheit äquivalent ist (**51 a**), also im CGS-System einem „Erg", nämlich derjenigen Arbeit, welche 1 gr an einem Orte, wo die Schwerbeschleunigung $= 1\ cm/sec^2$ wäre, um 1 cm hebt. — Das 10^7-fache entspricht der technischen elektrischen Arbeitseinheit (d. i. sekundliche Arbeit des Stromes 1 A im Widerstande 1 Θ) Wattsekunde oder Joule. Vgl. Anh. 9. Wir setzen 1 Wattsec. $= 0{,}239$ gr-Kal_{15}; 1 CGS $= 0{,}239 \cdot 10^{-7}$ gr-Kal_{15}; 1 gr-$Kal_{15} = 4{,}19 \cdot 10^7$ CGS $= 4{,}19$ Wattsec. (Scheel u. Luther (l. c.) leiten ab 0,2388 bez. 4,188.)

Kalorimeter.

Die Bestimmung einer Wärmemenge beruht meist auf der Messung eines der folgenden durch Wärme erzeugten oder sie erzeugenden Vorgänge. Zu Nr. 1 bis 3 dient fast immer das Wasser.

1. Temperaturänderung eines Körpers; Wasserkalorimeter (Regnault; Neumann; Andrews).

2. Schmelzung eines Körpers; Eiskalorimeter (Black; Lavoisier u. Laplace; Bunsen).

3. Verdampfung eines Körpers; Dampfkalorimeter (Joly).

4. Erzeugung oder Verbrauch mechanischer Energie (Joule; Rowland).

5. Verbrauch elektrischer Energie; elektrisches Kalorimeter (Pfaundler; Callendar u. Barnes).

6. Chemischer Vorgang von bekannter Wärmetönung (J. Thomsen).

7. Ausgleich gegen eine anders temperierte Umgebung; Erkaltungs-(Strahlungs-)Kalorimeter (Dulong u. Petit; Regnault).

Die Methoden sind beschrieben in **48** bis **51**.

Spezifische Wärme (Wärmekapazität).

Spez. Wärme c eines Körpers ist die Wärmemenge oder Anzahl von Kalorien, welche seine Masseneinheit (gr oder kg, je nach der Definition der Kalorie) um 1^0 erwärmt. Da die Wärmekapazität der Körper nicht konstant ist, sondern im allgemeinen mit der Temperatur mehr oder weniger wächst, so muß die Temperatur angegeben sein, für welche die Zahl gilt. Bei dem Mischungsverfahren mißt man gewöhnlich die Wärmeabgabe zwischen 100^0 und etwa 15^0. Dann wird also die mittlere spez. Wärme zwischen diesen Temperaturen gefunden. — Über den Gang mit der Temperatur siehe z. B. Müller-Pfaundler, 10. Aufl. 1907, III, 200. — Thiesen stellt für feste metallische Elemente die Abhängigkeit in der Form $c_t = \text{Const}\cdot(273 + t)^n$ dar; die Konstante n liegt zwischen 0 und 1. Vgl. Verh. D. Phys. Ges. 1908, 410.

Bei festen und flüssigen Körpern wird fast immer die sp. Wärme c_p „bei konstantem Druck" bestimmt, d. h. die aufgenommene Wärmemenge, während der Körper zugleich die seiner Erwärmung entsprechende natürliche Ausdehnung erfährt. Die „wahre" sp. Wärme c_v bei konstantem Volumen, also wenn die Ausdehnung durch gesteigerten Druck verhindert wird, ist etwas kleiner; vgl. **55b** am Schluß.

Spez. Wärme des Wassers. Sie nimmt mit wachsender Temp. bis gegen 30^0 ab, um dann wieder zu wachsen. Von den Bestimmungen dieser Veränderlichkeit kommen hauptsächlich in Betracht, meist von 0^0 bis 35^0, teilweise bis 100^0 ausgedehnt, solche von Rowland 1879, Bartoli u. Stracciati 1893, Lüdin (Pernet) 1895, Griffiths 1895, Barnes (Callendar) 1900; die Literatur dazu einschließlich Kritik und nachträglicher kleiner Umrechnungen s. bei Warburg (l. c.) und Griffiths (Rapports au Congrès I, 224. 1900). Hierzu die Bestimmungen von Dieterici bis 300^0 mit dem Eiskalorimeter (Ann. d. Ph. 16, 610. 1905) genommen, leiten wir die Tabellen (folg. S.) ab, deren Werte in mittlerer Temperatur, wenigstens von 10 bis 20^0, auf wenige Zehntausendtel sicher zu stehen scheinen. Die Zahlen bedeuten die sp. Wärme c_t des Wassers um t^0, wenn $c_{15} = 1$ gesetzt wird.

Die beim Erwärmen von t auf τ von der Masseneinheit aufgenommene Wärme ist $= \int_t^\tau c_t\,dt$; zwischen engen Grenzen, z. B. für $\tau - t = 5^0$, merklich $= \frac{1}{2}(c_t + c_\tau)(\tau - t)$.

Spezifische Wärme des Wassers.

0°	1,008	40°	0,9990	140°	1,025	7°	1,0033	15°	1,0000
5	1,0044	50	1,0000	160	1,036	8	1,0028	16	0,9998
10	1,0018	60	1,0017	180	1,048	9	1,0023	17	0,9995
15	1,0000	70	1,0034	200	1,062	10	1,0018	18	0,9993
20	0,9989	80	1,005	220	1,077	11	1,0014	19	0,9991
25	0,9984	90	1,007	240	1,094	12	1,0010	20	0,9989
30	0,9983	100	1,010	260	1,113	13	1,0007	21	0,9987
35	0,9985	120	1,017	280	1,133	14	1,0003	22	0,9986
40	0,9990	140	1,025	300	1,155	15	1,0000	23	0,9985

Einige empirische Beziehungen zwischen sp. Wärme (c), Atom- oder Molekulargewicht (A, M), Dichte (s), kubischem Wärmeausdehnungs- und Kompressibilitäts-Koeffizienten (α, k).

Das Produkt Ac_v bez. Mc_v heißt Atom- bez. Molekularwärme eines Körpers.

Gase. Die At.-W. einatomiger Gase ist nahe = 3, die Mol.-W. normaler zweiatomiger Gase nahe = 5. Insoweit das sp. Wärmenverhältnis c_p/c_v in jeder der beiden Gruppen nahe gleich ist (einatomige 5/3, zweiatomige 1,4; vgl. **50b**), stimmen in jeder Gruppe auch die At.- bez. Mol.-Wärmen bei konst. Druck nahe überein; Ausnahmen z. B. Cl_2, Br_2. — Da endlich nach dem Avogadro'schen Gesetz (S. 79) bei Temp.- und Druckgleichheit gleiche Volumina eine gleiche Anzahl von Molekülen enthalten, so gilt die Gleichheit in jeder Gruppe auch für die Wärmekapazität gleicher Volumina.

Feste Elemente. Hier liegt die At.-W. bei gewöhnlicher Temp. im allgemeinen der Zahl 6,3 nahe; Gesetz von Dulong u. Petit, 1819. Am stärksten, und zwar nach kleineren Werten, weichen (Loth. Meyer; Richarz) Elemente von zugleich kleinem Atom-Gewicht und -Volumen ab, besonders Be, B, C, Si. Ihre sp. W. wächst aber mit der Temp. viel rascher, als die der übrigen Elemente (H. F. Weber). — In verschiedenen, durch Bearbeitung oder chemische Allotropie bewirkten Modifikationen desselben Körpers hat die dichtere Form (kleineres At.-Vol.) in der Regel die kleinere sp. W. — Das Verhältnis c_p/c_v unterscheidet sich von 1 meist nur um wenige Prozente. Es berechnet sich für die abs. Temp. T aus der thermodynamischen Gleichung $c_p/c_v = 1 + T\alpha^2/(s c_p k)$.

Theoretische Ableitungen für die At.-Wärmen der Gase und festen Elemente wurden von Boltzmann, Richarz u. A. gegeben. — Vgl. auch die zusammenfassenden Darstellungen von Richarz, ZS f. anorg. Ch. 58, 356; 59, 146. 1908; Wigand, Ann. d. Ph. 22, 64. 1907 mit zahlreichen Literaturangaben. Auch Winkelmann's Handbuch 2. Aufl. III, 190ff. 1906; ferner Schlett, Ann. d. Ph. 26, 201. 1908.

Umfangreiche Literatur über c_p und α bei Metallen und Beziehungen dieser Größen zu einander siehe bei Grüneisen, Ann. d. Ph. 26, 211. 1908.

I. Mischungsmethode; feste Körper.

Im folgenden wird die sp. Wärme des Wassers = 1 gesetzt, d. h. es wird angenommen, daß die Mitteltemperatur bei dem Prozeß im Kalori-

meter nahe bei 15° liegt. Andernfalls ist nach dem oben gesagten zu korrigieren.

Eine auf 1/1000 genaue Messung ist nicht leicht; 4stellige Logarithmen (Tab. 53) werden für gewöhnlich genügen.

Der Körper wird gewogen, auf eine gemessene Temperatur Θ erwärmt und mit einer gewogenen Wassermenge von der Temperatur t gemischt. τ sei die gemeinschaftliche Endtemperatur des Körpers und des Wassers. Ist

m die Masse des Körpers,

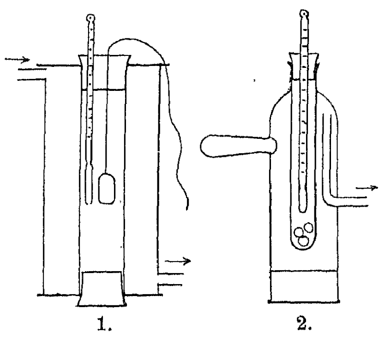
w die Masse des Wassers, vermehrt um den Wasserwert der übrigen Teile des Kalorimeters (siehe unten),

so findet sich die mittlere sp. Wärme c des Körpers zwischen τ und Θ aus der Formel (vgl. noch S. 193)

$$c = \frac{w}{m} \frac{\tau - t}{\Theta - \tau}. \qquad 1.$$

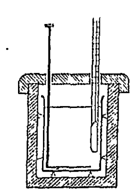
Denn $w \cdot 1 \cdot (\tau - t)$ ist die Wärmemenge, welche das Wasser bekommt; $m \cdot c \cdot (\Theta - \tau)$ hat der Körper abgegeben; beide Mengen sind identisch.

Die anfängliche Erwärmung des Körpers, meist in einem durch siedendes Wasser oder durch Dämpfe von siedendem Wasser äußerlich geheizten, gegen Luftwechsel sorgfältig geschützten Raume (nach Regnault, Neumann, Pfaundler) bewirkt (Fig.), muß fortgesetzt werden, bis das darin befindliche Thermometer einige Zeit hindurch stationär geblieben ist. Der erhitzte Körper wird nach Entfernung des Verschlusses aus dem ersten Apparat durch Herablassen am Faden schnell in das untergeschobene Kalorimeter gebracht, dessen Thermometer zu diesem Zweck geeignet gebogen sein mag, aus dem zweiten durch rasches Umkehren.



Wasserkalorimeter.

Ein Gefäß aus poliertem, tunlichst dünnem Blech (Messing, Silber) steht auf einer die Wärme schlecht leitenden Unterlage, etwa Korkschneiden oder gekreuzten Fäden, in einer Schutzhülle, z. B. aus Holz (Fig.) oder, vollkommener, aus innen poliertem Blech,



umgeben von einem konstant temperierten größeren Wasserbade. Verdunstung soll durch einen guten Verschluß vermieden werden! Während der Beobachtung wird gerührt. — Über Thermometer-Korrektionen s. S. 149 ff. u. 156.

Ist Wasser nicht anwendbar, so nimmt man eine andere Flüssigkeit (z. B. Anilin, Toluol) von bekannter spezifischer Wärme (Tab. 12).

Man arbeitet mit kleinen Temperaturänderungen im Kalorimeter, etwa bis zu $+5^0$.

Das in der Empfindlichkeit beschränkte, durch Kaliberfehler oder bei feiner Kapillare durch Unfolgsamkeit oft unzuverlässige Quecksilberthermometer kann vorteilhaft durch ein elektrisches Thermometer ersetzt werden; **43**, besonders **43** II.

Korrektionen. a) Wegen Miterwärmung der Instrumentalteile. Die Wärmemenge, welche einen Körper um 1^0 erwärmt, d. h. numerisch die ihm kalorimetrisch äquivalente Wassermenge, pflegt man seinen Wasserwert zu nennen. Zu der Masse des Wassers im Kalorimeter ist zu addieren der Wasserwert des Gefäßes, des Rührers und des Thermometers. Die ersteren beiden werden als Masse mal sp. Wärme berechnet (Tab. 11).

Der Wasserwert des Thermometers wird empirisch bestimmt. Man erwärmt es, etwa in erhitztem Quecksilber oder auch über der Flamme (um etwa 30^0) zur Temp. Θ und taucht es rasch in eine gewogene, kleine Wassermenge μ, deren Temp. ϑ dadurch auf ϑ' steige. Dann ist $\mu\cdot(\vartheta'-\vartheta)/(\Theta-\vartheta')$ der Wasserwert.

Der Wasserwert eines Stabthermometers läßt sich aus dem Volumen v ccm des eintauchenden Teiles als $0{,}46\cdot v$ berechnen. 1 ccm Quecksilber und 1 ccm Glas haben nämlich zufällig nahe den gleichen Wasserwert, nämlich $13{,}6\cdot 0{,}033 = 0{,}45$ und $2{,}5\cdot 0{,}19 = 0{,}47$ (Tab. 11 u. 12). Man bestimmt v durch Einsenken in die Flüssigkeit eines kalibrierten Rohres oder eines auf der Wage äquilibrierten Gefäßes.

w in Formel 1 bedeutet also das Nettogewicht der Wasserfüllung vermehrt um die Summe der so ein für allemal bestimmten Wasserwerte der festen Teile des Kalorimeters.

Empirische Ermittelung des Gesamtwertes w. Das vorige Verfahren ist nur dann genau, wenn die Wasserfüllung, besonders auch im Vergleich mit den herausragenden Instrumentalteilen eine relativ große

Wärmekapazität hat. Empirisch läßt sich der gesamte Wasserwert mittels einer eingeführten bekannten Wärmemenge bestimmen, entweder mittels eines eingebrachten Körpers von bekannter Wärmekapazität (vgl. auch II), oder mittels Erwärmung durch elektrische Energie (49 II) oder auch aus der Wärmemenge einer im Kalorimeter ausgeführten chemischen Reaktion von bekannter Wärmetönung (**51**). Vgl. auch Jaeger u. von Steinwehr, Ann. d. Ph. 21, 23. 1906.

Endlich kann noch als Behälter eines zerkleinerten Körpers ein Körbchen in Betracht kommen, welches, mit diesem erwärmt, ins Kalorimeter gebracht wurde. Sein Wasserwert, d. i. das Produkt aus seiner Masse und sp. Wärme, sei $= w'$.

Vollständige Formel. Zur Berechnung der sp. W. aus den beobachteten Größen m, w, w', τ, Θ u. t (S. 191) folgt aus dem Ansatz $(cm + w')(\Theta - \tau) = w(\tau - t)$

$$c = \frac{1}{m}\left(w\frac{\tau - t}{\Theta - \tau} - w'\right). \qquad 1\text{a.}$$

b) Wärmeaustausch. Der Wärmeaustausch des Kalorimeters mit der Umgebung wird nach Rumford dadurch eliminiert, daß man die Anfangstemperatur t um ungefähr ebensoviel tiefer als die Zimmertemperatur nimmt, wie die Schlußtemperatur τ höher sein wird. Das zu erwartende $\tau - t$ schätzt man durch einen Vorversuch oder, wenn die sp. Wärme ungefähr bekannt ist, durch Rechnung. Damit dieser Kunstgriff angenähert genügt, dürfen die Temperaturänderungen im Kalorimeter eine mäßige Größe (5^0) nicht übersteigen. Auch muß die Zeit, welche zum Übergang der Wärme aus dem Körper in das Wasser nötig ist, kurz sein, weswegen man den Körper, besonders wenn er die Wärme nicht gut leitet, in kleinen Stücken anwendet, die etwa auf einen Faden aufgezogen oder in ein Körbchen gefüllt werden, dessen Wasserwert in Rechnung gesetzt wird; vgl. oben.

Einwurfsfreier verfährt man so: Die Anfangstemperatur t des Kalorimeters sei so tief, daß auch die Endtemperatur τ noch ein wenig unter der Temp. der Umgebung bleibt. 5 bis 10 min lang vor dem Einbringen des heißen Körpers beobachtet man das Thermometer etwa jede Minute und leitet daraus und aus der Lufttemperatur den Temperaturgewinn pro Minute und Grad Temperaturüberschuß der Umgebung ab. Das Einbringen des Körpers geschieht nach der Uhr, und man beobachtet nun das steigende Thermometer etwa von 20 zu 20 sec. Während der

ganzen Zeit wird gleichmäßig gerührt. Das Verfahren wird im folgenden Beispiel erläutert.

Gefäß u. Rührer aus Messing wogen $\mu = 19$ gr; sp. Wärme des Messings $\gamma = 0{,}093$; also Wasserwert $\gamma\mu = 19 \cdot 0{,}093 = 1{,}8$ gr Wasser.
Das Thermometer wurde, auf 45^0 erwärmt, in 20 gr Wasser
von $16{,}25^0$ gebracht; die Temp. stieg auf $17{,}10^0$.
Also Wasserwert $= 20 \cdot (17{,}10 - 16{,}25)/(45 - 17{,}1) = 0{,}6$ „ „
Das Wasser wog netto 74,0 gr, also $w = 74{,}0 + 1{,}8 + 0{,}6 = 76{,}4$ „ „
Der zu bestimmende Körper wog $m = 48{,}3$ gr.
Temperatur des erhitzten Körpers $\Theta = 99{,}7^0$.
Anfangstemperatur des Wassers $t = 12{,}05^0$.
Gemeinschaftliche Endtemperatur $\tau = 17{,}46^0$.

Ohne Korrektion rechnet man $c = \frac{76{,}4}{48{,}3} \cdot \frac{17{,}46 - 12{,}05}{99{,}70 - 17{,}46} = 0{,}1041$.

Korrektion wegen Wärmeaustausches.

Umgebungstemperatur $= 18{,}0^0$.

Vor- periode	Uhr	25 min	26	27	28	29	30 min	Mittel
	Kalorimeter	$11{,}54^0$	11,65	11,75	11,88	11,96	$12{,}05^0$	$11{,}80^0$.

Das Thermometer stieg also, während die Mitteltemperatur um $6{,}2^0$ unter der Umgebung lag, in 5 min um $0{,}51^0$. Folglich beträgt der Temperaturgewinn pro Grad Überschuß $0{,}51/(5 \cdot 6{,}2) = 0{,}0165$ ^{0}/min. Auf 30 min 0 sec wurde der heiße Körper eingebracht, der Heizapparat sofort wieder entfernt und nun unter beständigem Rühren beobachtet:

um **30** min	20^{sec}	40^{sec}	**31**	20	40	**32**	20	40	**33** min	Mittel
$12{,}05^0$	14,7	15,9	16,8	17,2	17,3	17,4	17,44	17,45	$17{,}46^0$	$16{,}6^0$.

In diesen 3 Min. lag die Temp. also im Mittel $1{,}4^0$ unter der Umgebung; von der Wärmeaufnahme aus der Umgebung rührte also der Erwärmungsanteil $0{,}016 \cdot 3 \cdot 1{,}4 = 0{,}07^0$ her. Das beobachtete $\tau = 17{,}46^0$ ist also um $-0{,}07^0$ zu korrigieren, gibt τ korrig. $= 17{,}39^0$, und hiermit aus Formel 1a)

$$c \text{ korrig.} = 0{,}1027.$$

Bei der Berechnung der Mitteltemperatur für die Korrektion sind die erste und die letzte Beobachtung mit halbem Gewicht eingesetzt worden, d. h. man hat ihr Mittel $14{,}8^0$ mit den übrigen acht Werten zum Mittel vereinigt. Bei sehr genauen Bestimmungen stellt man den Gang der Temperatur graphisch dar und entnimmt daraus die Temperaturen etwa für 5 15 25 sec usw.

Ist das Kalorimeter offen, so geht durch Verdunstung etwas Wärme verloren, wodurch das Verfahren einer Ergänzung durch Beobachtung des Temperaturganges nach der Erwärmung bedürftig wird. — Ausführliche Anweisungen über die Verbesserung der Resultate wegen Wärmeverlusts siehe z. B. Müller-Pfaundler III, 10. Aufl. S. 169. 1907; Wüllner, II, 5. Aufl. S. 452, 1896; Chwolson III, 201.

Über Anordnungen, um den Wärmeaustausch mit der Umgebung zu vermeiden, vgl. Hesehus, J. de phys. (2) 7, 489. 1888; Waterman, Phys.

Review 4, 161. 1896; Richards u. Lamb (für Flüssigkeiten), Proc. Am. Acad. 40, 659. 1905.

Über Bestimmung einer sp. Wärme unter 0° vgl. Behn, Wied. Ann. 66, 237. 1898; Ann. d. Ph. 1, 257. 1900; Schmitz, Proc. R. S. 72, 177. 1903.

II. Flüssigkeiten.

1. Die sp. Wärme läßt sich gerade wie unter I ermitteln, wenn man die Flüssigkeit in ein Gefäß eingeschlossen hat, sie mit diesem erhitzt und in ein Wasserkalorimeter einsenkt, wobei man den Temperaturausgleich durch Drehen und Schütteln beschleunigt. Man rechnet nach Formel 1a.

2. Verfügt man über eine größere Flüssigkeitsmenge, so füllt man mit ihr das Kalorimeter, erhitzt einen gewogenen, die Wärme leicht abgebenden Körper (Körbchen mit Kupferstücken) von bekannter sp. W. und verfährt wie oben. Bedeuten

Θ, M, C Temperatur, Gewicht und sp. Wärme des erhitzten Körpers,

t, τ, m Anfangs- und Endtemperatur und Nettogewicht der Flüssigkeit,

w' den Wasserwert der festen Teile des Kalorimeters,

so ist die gesuchte sp. Wärme c der Flüssigkeit, und zwar die mittlere zwischen t und τ,

$$c = C\frac{M}{m}\frac{\Theta - \tau}{\tau - t} - \frac{w'}{m}. \qquad 2.$$

3. Oft gebraucht wird das folgende Verfahren (Andrews 1845; Marignac; Pfaundler), welches die Temperaturänderungen vergleicht, welche einerseits die zu untersuchende Flüssigkeit, andrerseits eine bekannte Wassermenge durch die Zufuhr derselben Wärmemenge erfährt.

Als Erhitzungskörper dient ein Glasballon mit einigen 100 gr Quecksilber, der ein vielleicht 2 mm weites Steigrohr mit einer hoch (80°) und einer niedrig gelegenen (25°) Marke hat. Man erhitzt im Quecksilberbade oder vorsichtig über der Flamme bis über die höhere Marke, läßt dann abkühlen und senkt im Augenblick der Einstellung auf diese Marke den Erhitzungskörper in die Flüssigkeit ein. Im Augenblick, wo, unter Umrühren, die niedrige Marke erreicht ist, hebt man den Körper heraus und beobachtet wieder die Temperatur der Flüssigkeit.

m, w', t, τ mögen die obigen Bedeutungen behalten; ein gleicher Versuch, bei welchem man denselben Erhitzungs-

körper in eine Wassermenge w in demselben Gefäß bringt, ergebe die Erwärmung des Wassers von t' auf τ', dann ist offenbar

$$c = \frac{1}{m}\left[(w + w')\frac{\tau' - t'}{\tau - t} - w'\right]. \qquad 3.$$

Denn es ist $(cm + w')(\tau - t) = (w + w')(\tau' - t')$.

Die Endtemperaturen t und t' müssen in den beiden Versuchen ungefähr gleich sein, sonst entsteht eine Korrektion dadurch, daß die Endvolumina des Glases ungleich sind.

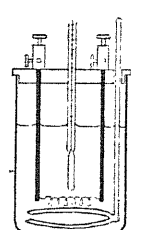
Vgl. hierüber Wiebe u. Gumlich, Wied. Ann. 66, 530. 1898; Pfaundler ib. 67, 439. 1899.

Über abgeänderte Bestimmungsweisen s. Richards u. Lamb l. c. S. 663; ferner, auch über Literatur, Richards u. Rowe, Proc. Am. Acad. 43, 475. 1908; ZS f. phys. Ch. 64, 187. 1908 ein Verfahren, welches als Wärmequelle chemische Prozesse benutzt.

49. Spezifische Wärme. Elektrische Methode.

I. Vergleichung spezifischer Wärmen von Flüssigkeiten (Pfaundler 1869).

Zwei Flüssigkeitsmengen werden in gleichen, gegen Wärmeverlust möglichst geschützten (s. z. B. Fig. S. 205) Gefäßen durch denselben elektrischen Strom (80) erwärmt, welcher gleiche Drahtwiderstände aus einer Legierung durchfließt, deren Leitvermögen von der Temperatur möglichst wenig beeinflußt wird (Tab. 30), etwa aus Platinsilber; s. Fig. Zweckmäßig wählt man die beiden Mengen so, daß die zu erwartenden Temperaturzunahmen ungefähr gleich sind. Man nehme ferner die Anfangstemperaturen etwa um ebensoviel niedriger als die Zimmertemperatur, wie die Schlußtemperaturen höher sein werden. Hierdurch wird die Wärmeabgabe während des Versuches sowie die Änderung des Drahtwiderstandes durch die Temperatur einigermaßen eliminiert.



Die Flüssigkeitsmenge m samt dem Wasserwert w ihres Gefäßes und Thermometers erwärme sich von t auf τ, die andere Menge m' samt zugehörigem Wasserwert w' der festen Teile von t' auf τ', dann ist $(cm + w):(c'm' + w') = (\tau' - t'):(\tau - t)$, also

$$c = \frac{1}{m}\left[(c'm' + w')\frac{\tau' - t'}{\tau - t} - w\right]. \qquad 1.$$

c' wird $= 1$, wenn die Flüssigkeit m' Wasser ist.

Etwaige Unsymmetrien eliminieren sich am einfachsten durch Vertauschen der Flüssigkeiten und Mittelnehmen aus den beiden gefundenen Resultaten.

Fehlerquellen sind darin gegeben, daß ein Teil des Stromes

von dem Drahte ab durch die Flüssigkeit gehen könnte und daß die Temperatur der Drähte, also auch ihr Widerstand, durch ungleiche Wärmeabgabe verschieden sein kann. Reines Wasser leitet sehr wenig; ein Nebenschluß ist bei edelen Metallen, schon der Polarisation wegen, nicht zu fürchten, wenn die Spannung im Drahte unter 2 V bleibt (**80** I). Man nehme die Widerstände nicht zu groß. — Das Widerstandsverhältnis R/R' der beiden Drähte läßt sich während des Versuches durch Abzweigung (**91** II, **92**) ermitteln, oder auch indem die Drähte als Zweige einer Wheatstone'schen Brücke (**93**) angeordnet werden. Man hat dann $(\tau'-t')/(\tau-t)$ mit R/R' zu multiplizieren.

Vervollkommnete Apparate und eingehende Anleitung wegen der Korrektionen s. in Müller-Pfaundler, 10. Aufl. 1907, III, 183. — S. auch Magie, Phys. Review 17, 105. 1903. — Eine Anordnung für andere als Zimmertemperaturen: Bose, Gött. Nachr. 1906, 279.

II. Absolute Bestimmung. Elektrische Kalorimetrie.

Flüssigkeiten. Der Strom i A entwickelt in 1 sec die Wärmemenge $0{,}239\,i^2 r = 0{,}239\,iE$ gr-Kal, wenn er den Widerstand r Θ durchfließt, bez. wenn seine Endspannung E V beträgt. Vgl. Anh. 30.

1. Der Strom erwärme unter den bei I beschriebenen Verhältnissen und Vorsichtsmaßregeln in z sec die Flüssigkeitsmenge m gr samt den festen Teilen vom Wasserwerte w (s. S. 192) um t Grad; dann gilt $(cm+w)t = 0{,}239\,i^2rz$, also

$$c = \frac{1}{m}\left(0{,}239\,\frac{i^2rz}{t} - w\right). \qquad 2.$$

Der Strom wird etwa mit einem geprüften Weston-Stromzeiger (**85** 2) gemessen. Stromschwankungen eliminiert man durch zeitlich regelmäßiges Ablesen und Mittelnahme der beobachteten i oder, wenn die Schwankungen groß sind, von i^2.

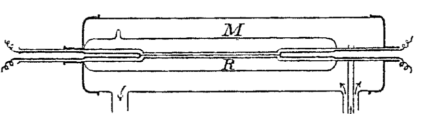
Zugleich muß der Wärmeaustausch mit der Umgebung berücksichtigt werden, genähert etwa durch den Rumford'schen Kunstgriff (S. 193) oder durch das Verfahren im Beispiel S. 194; die größere Zeitdauer erschwert die Genauigkeit.

Die Versuchsdauer läßt sich durch große Stromstärke einschränken. Dabei wird aber der Drahtwiderstand unsicher und man mißt statt seiner besser mit einem Spannungsmesser (**101** bis **103**) die mittlere Spannung E an den Drahtenden während des Versuchs in Volt und rechnet mit iE statt mit i^2r.

Über Ausführung in tiefer Temp. vgl. Battelli, Lincei Rend. 1907 I, 243; Phys. ZS 7, 671. 1908.

2. Strömungsmethode (Callendar). Die durch eine enge Glasröhre R ($1/2$ m lang, 2 mm weit) strömende Flüssigkeit wird durch einen elektrischen Strom (falls die Flüssigkeit nicht leitet, in einem durch-

gezogenen Platindraht, sonst in der Flüssigkeit selbst) erwärmt. Man bestimmt im Beharrungszustande die Temperaturen ϑ_1 und ϑ_2 am Eingang und Ausgang, sowie die zugeführte elektrische Leistung iE (vgl. unter Nr. 1). Die in weiteren Ansätzen der Strömungsröhre untergebrachten Thermometer sind von Metallröhren umgeben, die den Strom zuleiten. Die Strömungsröhre liegt in einem evakuierten Cylinder, dessen Wand von einem Wassermantel M auf der Temperatur ϑ_1 gehalten wird.



Bezeichnet m die in 1 sec durchfließende Menge, so gilt (vgl. oben)

$$(cm + h)(\vartheta_2 - \vartheta_1) = 0{,}239\, iE.$$

Der Wärmeverlust an die Umgebung $h(\vartheta_2 - \vartheta_1)$ wird eliminiert durch Variation von m und iE unter Konstanthaltung des Temperaturfalles $\vartheta_2 - \vartheta_1$.

Callendar, Phil. Trans. (A) 199, 55; Barnes ib. 199, 149. 1902. — Ein etwas anderes Verfahren bei der Bestimmung der sp. Wärme von Wasserdampf s. bei Knoblauch u. Jakob, Forsch. des Ver. deut. Ingen. Heft 35 u. 36. 1906.

Über d. Schmelzung von Eis s. auch Smith, Phys. Review 17, 193. 1903.

Feste Leiter. Der Temperaturanstieg durch die Stromdichte i A/cm² in einem Leiter vom spez. Widerstand σ Θ/cm², dem sp. Gew. s und der sp. Wärme c beträgt ohne Wärmeableitung in z sec $0{,}239\, z \cdot i^2 \sigma/(sc)$. Über ein Verfahren, welches diesen Vorgang benutzt, vgl. Jaeger u. Dießelhorst, Wiss. Abh. d. P. T. Reichsanst. III, 269. 1900. S. auch Lecher, Verh. D. Ph. Ges. 1907, 647.

El. Bestimmung eines Wasserwertes; von Bedeutung besonders in höherer Temperatur bei anderer Füllung als mit Wasser. Steigt die Temperatur unter den bei I beschriebenen Verhältnissen während z sec um t^0, so ist der Wasserwert (48 I) des ganzen Kalorimeters $= 0{,}239\, i^2 r z/t$ oder $= 0{,}239\, iEz/t$. — Über Korrektionen wegen Wärmeaustauschs s. 48 I, b.

49a. Spezifische Wärme. Erkaltungsmethode. (Dulong und Petit.)

Man vergleicht die Zeiten, in denen Körper unter denselben Umständen sich um gleichviel abkühlen. Höchstens bei Flüssigkeiten oder bei gut leitenden festen Körpern sind brauchbare Resultate zu erwarten.

Ein kleines erwärmtes Gefäß aus dünnem polierten Metall mit einem Thermometer und der eingegossenen Flüssigkeit kühlt sich in einem luftleeren Metall-Behälter in temperaturkonstanter Umgebung ab. Beträchtliche Mengen in einem geschlossenen Metallgefäße mit einer Rührvorrichtung mag man auch in der Luft beobachten.

Es sei der Gang des Temperatur-Überschusses über die Umgebung bei der Füllung mit zwei verschiedenen Substanzen beobachtet worden. m und M seien die eingefüllten Mengen von den sp. Wärmen c und C (M etwa Wasser, also $C = 1$); w der Wasserwert des Gefäßes samt Thermo-

meter (S. 192); z und Z die Abkühlungszeiten von demselben Anfangs- zu demselben Endüberschuß, am besten der erstere 2 bis 3 mal so groß als der letztere. Dann gilt $(mc + w) : (MC + w) = z : Z$, also

$$c = 1/m \cdot [(MC + w) z/Z - w].$$

Man beobachtet z. B. je von 20 zu 20 sec, stellt die Beobachtungen in einer Kurve dar (6) und entnimmt aus dieser Paare von Zeitpunkten, welche gleichen Anfangs- und Endtemperaturen entsprechen. Aus einem Paare von Beobachtungsreihen läßt sich so eine Anzahl von Bestimmungen ableiten. Siehe auch **3** III.

Man kann auch beide Versuche in zwei möglichst kongruenten Gefäßen gleichzeitig ausführen. Durch Auswechseln der Flüssigkeiten wird eine Unsymmetrie eliminiert.

50. Spezifische Wärme. Eis-Kalorimeter.

Zur Verwandlung eines Grammes Eis von 0^0 in Wasser von 0^0 werden 80,0 gr-Kal_{15} = 335 Wattsec. erfordert (Schmelzwärme des Eises). Ferner hat 1 gr Eis von 0^0 das Volumen 1,0908 ccm, 1 gr Wasser von 0^0 dagegen 1,0001 ccm. Wenn das Volumen sich um 1 ccm vermindert, so ist also eine Eismenge 1/0,0907 = 11,03 gr geschmolzen.

(Roth leitet 79,7 anstatt 80,0 ab; ZS f. phys. Ch. 63, 441. 1908. Vgl. noch Vincent, Phil. Tr. (A) 198, 463. 1902; Leduc, J. de phys. (4) 5, 157. 1906.)

A l t e s V e r f a h r e n (Lavoisier und Laplace). Man bringt eine beträchtliche Menge m des Körpers, auf t erwärmt, in trockenes Eis von 0^0, welches sich selbst in einer Umgebung von schmelzendem Eise befindet. Wird hierdurch die Eismenge M geschmolzen, so gilt

$$c = \frac{M}{m} \frac{80,0}{t}. \qquad 1.$$

Einfacher dient für eine genäherte Bestimmung ein Eisstück von ebener Oberfläche mit einer Höhlung, in welche der erhitzte Körper eingelegt wird. Während dessen Abkühlung bedeckt man die Platte mit einem ebenen Eisdeckel. Nachher wird das geschmolzene Wasser mit einem kalten Schwämmchen ausgetupft und gewogen (Black, etwa 1760).

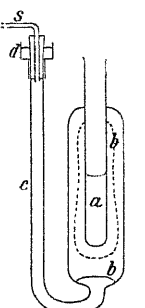
Ähnlich kann man sp. Wärmen unter 0^0 bestimmen, indem man den abgekühlten Körper m in Wasser von 0^0 eintaucht und den gebildeten Eismantel M wägt. Vgl. S. 195 Schmitz l. c.

Eiskalorimeter (H. R. Hermann 1834) Bunsen 1870.

Die geschmolzene Eismenge wird aus der Volumabnahme v bestimmt, welche beim Schmelzen eintritt. Ist v dadurch bewirkt, daß m gr eines Körpers sich von t auf 0^0 abkühlen, so ist nach obigem die spez. Wärme des Körpers

$$c = \frac{v}{m} \frac{11,03 \cdot 80,0}{t} = \frac{v}{m} \frac{882}{t}. \qquad 2.$$

Bunsen's Kalorimeter; Pogg. Ann. 141, 1. 1870. Dasselbe besteht aus Glasteilen mit dem aufgekitteten eisernen Aufsatz d. Das Skalenrohr s, sowie d, c und der unterste Teil des weiten Gefäßes b sind mit Quecksilber gefüllt. Über letzterem befindet sich in b ausgekochtes Wasser; das Eis wird in diesem vor dem Versuche mittels einer in a eingefüllten oder mit einem dünnwandigen Probierrohr eingeführten Kältemischung (z. B. Eis und krist. Chlorcalcium) gebildet.



Zum Gebrauch wird das Instrument mit reinem schmelzendem Eis oder Schnee umgeben und das Skalenrohr s so weit eingedrückt, ev. mit einem doppelt durchbohrten Hahn der Quecksilberstand so reguliert, daß die Quecksilbersäule vor der Teilung eine hinreichende Länge hat. Nachdem das Gefäß a, am besten mit Wasser, sonst mit einer anderen Flüssigkeit beschickt worden ist, welche den zu untersuchenden Körper nicht auflöst, erhitzt man diesen (Fig. 2 S. 191) und läßt ihn in a hineinfallen, wobei ein Baumwollpfropf auf dem Grunde des Probierröhrchens dessen Beschädigung verhindert.

Das Quecksilber in s nehme nach dem Zurückgehen um e Sk.-T. einen stationären Stand ein. Ist das Volumen eines Teiles $= A$ (24), die Temperatur des Skalenrohres $= t$, so gilt

$$v = A(1 - 0{,}00018\,t)\,e.$$

Empirische Bestimmung des Wärmewertes K eines Skalenteils. 1) Ein leichtes Glaskügelchen von etwa 1 ccm, bis auf einen kleinen Ausdehnungsraum mit einer gewogenen Wassermenge gefüllt, mit etwas Platin beschwert, wird mittels siedenden Wasserdampfes auf t' (nahe 100°) erhitzt und eingebracht; vgl. besonders Fig. 2 S. 191. w sei die Summe der Wasserwerte (über Glas vgl. auch 8, 5), e' die erfolgende Skalenverschiebung; dann entspricht dem Zurückziehen des Quecksilbers um 1 Sk.-T. die Wärmemenge $K = wt'/e'$.

2) K läßt sich mittels einer durch einen elektrischen Strom zugeführten bekannten Wärmemenge bestimmen; vgl. 49 II und S. 188. Ein Strom von i A durchfließe einen durch das Gefäß a gehenden Drahtwiderstand von r Ω oder zeige an dessen Enden die Spannung E V; in z sec bewirke er die Skalenverschiebung e'. Dann ist $K = 0{,}239\, i^2 r z/e'$ oder $= 0{,}239\, E i z/e'$.

Bewirkt nun ein auf t erhitzter Körper von m gr bei der Abkühlung e Sk.-T. Verschiebung, so ist seine spez. Wärme

$$c = K \cdot \frac{e}{mt} \cdot \qquad 3.$$

Wägungsverfahren. Dieses wird bei genauen Messungen vorgezogen. An Stelle des Skalenrohres dient ein kürzeres, abwärts gebogenes Rohr mit gut definierter (44 III) Spitze, welche in ein kleines Gefäß mit Quecksilber taucht. Man bestimmt die bei dem Einbringen des warmen Körpers eingesaugte Quecksilbermenge durch Differenzwägung des Gefäßes. 0,01548 gr Quecksilber entsprechen der 15°-Gramm-Kalorie. (Schuller u. Wartha, Velten, Dieterici).

Wanderung des Quecksilbers. Langsame Eisbildung im unbenutzten Kalorimeter wird schon durch sehr geringfügige Verunreinigungen des Eisbades veranlaßt. Man bestimmt vor und nach dem Versuch die Wanderungsgeschwindigkeit des Quecksilbers und zieht sie pro rata der Versuchsdauer in Rechnung.

Oder man setzt durch Probieren mittels Druckvermehrung, indem man die Mündung des Quecksilbers hebt, den Gefrierpunkt des Wassers im Kalorimeter so weit herunter, daß das Wandern aufhört (Dieterici). Das angesetzte Kapillarrohr ist zu diesem Zwecke zweimal gebogen, so daß man den vorderen horizontalen Teil mit der Ableseskale oder die Mündung mit dem Gefäß höher oder tiefer stellen kann.

Vgl. Schuller und Wartha, Wied. Ann. 2, 359. 1877; Dieterici, ib. 33, 418. 1888; Ann. d. Ph. 16, 593. 1905. Hier auch sp. Wärme-Bestimmungen von Wasser bis 300° in Quarzglasröhren. — Behn, ib. 16, 653. 1905.

50a. Spezifische Wärme. Dampf-Kalorimeter (Joly; Bunsen).

Die Dampfwärme des Wassers, d. h. die Wärmemenge, welche die Masseneinheit Wasserdampf bei ihrer Kondensation zu Wasser von gleicher Temperatur abgibt, ist bei Atmosphärendruck gleich 538 Kal_{15}; vgl. z. B. Henning, Ann. d. Ph. 21, 849. 1906.

Der Körper m befindet sich, an einer Wage mit einem feinen Drahte aufgehängt, in einem Raum, in welchem man plötzlich durch ein weites Rohr Dämpfe von siedendem Wasser so lange einleitet, bis der Körper sich zur Temperatur des Wasserdampfes erwärmt hat. Die auf dem Körper kondensierte Wassermenge w wird gewogen. — Die sp. Wärme ist, wenn der Körper die Anfangstemperatur t_0 hatte, der Wasserdampf die Temperatur t (Tab. 14a),

$$c = \frac{w}{m}\frac{538}{t-t_0}.$$

Der neben dem Aufhängedraht entweichende Dampf wird durch die Wasserluftpumpe oder einen erwärmten Schornstein mittels eines Rohres

neben der mit einem durchbohrten Gipspfropf ausgekleideten Öffnung abgesaugt. Gegen Abtropfen von Wasser schützt ein unten an dem Körper befestigtes dünnes Platinblech, dessen eigener Wasserwert von *mc* abgerechnet wird (48 I; Tab. 11). — Vor der Wägung wird der Dampfstrom gemäßigt, weil er sonst das scheinbare Gewicht beeinflußt.

Die Methode muß mit großer Umsicht gehandhabt werden, kann dann aber sehr genaue Werte liefern. Hingewiesen auf die Methode hat zuerst Rosenthal 1878. — Näheres bei Joly, Proc. R. Soc. 41, 352. 1886; 47, 218. 1889; Bunsen, Wied. Ann. 31, 1. 1887; Schukarew, ib. 59, 229. 1896. — Ein Vorschlag zu einem Ätherdampfkalorimeter bei Neesen, ib. 39, 131. 1890. — Eine Wage für Dampfkalorimeter bei Schuller, Beibl. 1907. 929.

Spez. Wärme in tiefer Temperatur; Kalorimeter mit verflüssigten Gasen (Dewar).

Hier wird umgekehrt die durch das Einbringen eines Körpers in ein Dewar'sches Gefäß (8, 30) mit flüssiger Luft oder flüssigem Sauerstoff oder Wasserstoff verdampfende Menge mittels Volummessung oder Wägung bestimmt.

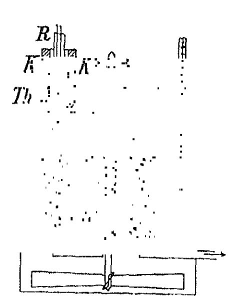
Dewar, Proc. R. S. (A) 76, 325. 1905; Forch u. Nordmeyer, Ann. d. Ph. 20, 423. 1906; Nordmeyer u. Bernoulli, Verh. D. Ph. Ges. 1907, 175. — Über die Dampfwärmen vgl. Tab. 12a.

50b. Spezifische Wärme der Gase.

Die Temperatur eines Körpers kann durch Zufuhr von Wärme oder auch von äußerer Arbeit erhöht werden, letzteres am übersichtlichsten durch Volumverminderung unter äußerem Druck. Das letztgenannte Mittel wirkt bei festen und flüssigen Körpern, wegen deren geringer Volumänderung, verhältnismäßig unbedeutend; bei Gasen dagegen kommt es mit gleicher Größenordnung in Frage wie die Wärmezufuhr, und zwar schon bei solchen Volumänderungen, wie sie im allgemeinen durch die Temperaturänderung selbst entstehen. Diese Vorgänge werden erschöpfend zusammengefaßt durch die Einführung zweier Begriffe, nämlich der „wahren" oder sp. W. c_v eines Gases ohne äußere Arbeit, d. h. bei konstantem Volumen (bei gehinderter Ausdehnung), und der sp. W. c_p bei konstantem Druck (d. h. wenn die Erwärmung von der ihr entsprechenden Ausdehnung begleitet ist).

a) **Für konstanten Druck**; c_p (Delaroche u. Bérard 1813; Regnault).

Man leitet die erhitzten Gase in starkem Strome durch ein Wasserkalorimeter. Der aus dem Gasometer austretende Gasstrom, mit Hilfe eines Manometers durch einen Regulierhahn möglichst konstant erhalten, wird in einem von einem Heizbade umgebenen engen Schlangenrohr erhitzt. Er tritt von hier in das lange Schlangenrohr (oder handlicher in



weitere, mit Metallspänen gefüllte Rohre; Fig.) des Wasserkalorimeters durch eine Verbindung, die dem Gasstrome wenig Wärme entziehen, dem Kalorimeter von dem Erhitzungsapparat aus wenig Wärme zuleiten soll; in der Figurenskizze nach Holborn und Henning besteht die Wand der gasdichten Kapsel K, durch welche das Zuleitrohr R durchtritt, aus einem dünnen, mit einem schlechten Wärmeleiter (Magnesia) ausgekleideten Platinblech. Im Zuleitrohr sitzt, dicht vor der Ausmündung, die Lötstelle Th eines Thermoelements.

Durch besondere Messungen muß man sich überzeugen, ob das Gas allen Wärmeüberschuß an das Kalorimeter abgegeben hat.

Korrektionen. Die, unabhängig vom Gasstrom, dem Kalorimeter zugeführte bez. entzogene Wärmemenge wird einesteils durch die Wärmezuleitung vom Erhitzungsgefäß bedingt, sodann durch Strahlung usw. gegen die Umgebung. Der erstere Teil kann wegen der verhältnismäßig geringen Temperaturänderung des Kalorimeters während der Versuchsdauer als konstant angenommen werden; er betrage k/min. Der zweite ist proportional der Differenz der Kalorimeter-Temperatur gegen die Temperatur ϑ der Umgebung (die passend durch einen konstant temperierten Wassermantel gebildet wird). a und k bestimmt man ähnlich wie S. 194, indem man das Kalorimeter vor und nach dem Gasdurchgang etwa je 10 min lang beobachtet. Steigen die Kalorimetertemperaturen, t in der Anfangsperiode und τ in der Endperiode, in der Minute um Δt bez. $\Delta\tau$, so ist

$$\Delta t = (\vartheta - t)a + k \quad \text{und} \quad \Delta\tau = (\vartheta - \tau)a + k,$$

wodurch a und k bestimmt sind. Sie dienen zur Korrektion der beobachteten Endtemperatur des Kalorimeters.

Schlußrechnung. Bezeichnet τ die so korrigierte Endtemperatur, w den Gesamtwasserwert des Kalorimeters (S. 192), ferner m die Masse des durchgegangenen Gases, T seine Anfangstemperatur und $\Theta = \frac{1}{2}(t+\tau)$ seine mittlere Endtemperatur, so gilt für die sp. Wärme $c_p = \frac{w}{m}\frac{\tau - t}{T-\Theta}$.

Regnault, Rel. des expér. II. 1862: Luft, O, H, CO, CO_2, NO, NO_2, C_2H_4, C_2H_2, SO_2, Cl, NH_3 u. a. bis 200°; E. Wiedemann, Pogg. Ann. 157, 1. 1876: Luft und H zwischen 20 und 100° und CO_2, CO, C_2H_4, NO_2, NH_3 bis 200°; Witkowski, Journ. de phys. (3) 5, 123. 1896: Luft zwischen + 100° und − 170°; Holborn u. Henning, Ann. d. Ph. 23, 809. 1907: N, CO_2, Wasserdampf bis 1400°. — Beobachtungen bei höheren Drucken außer bei Regnault u. Witkowski auch bei Lussana, Cim. (3) 36; (4) 1, 3, 6, 7. 1894 bis 1898. — S. auch Tab. 12 a.

b) **Für konstantes Volumen;** c_v. Mit dem Dampfkalorimeter (Joly).

An der Wage hängen zwei möglichst gleiche Hohlkugeln aus Kupfer ($2r = 7$ cm), von denen die eine mit dem zu messenden Gase unter hohem Druck (bis 30 Atm.) gefüllt wird. Zu vergleichen sind bei Zimmertemperatur

in Luft die Gewichte der Gefäße erstens beide leer, dann das eine gefüllt; schließlich wird noch nach Zutritt des Dampfes gewogen. Da von dem Gasinhalt höchstens etwa $^1/_{13}$ des kondensierten Dampfes stammt, so werden außer sehr genauer Wägung Korrektionen verlangt, besonders wegen der Ausdehnung bei der Erwärmung auf 100° und der dadurch bewirkten Vergrößerung des Auftriebs in der Dampfatmosphäre.

Joly, Phil. Trans. (A) 182, 73. 1891; 185, 943 und 961. 1894.

Explosionsverfahren.

Ein entzündbares Gemisch aus den Mengen m_1 und m_2 zweier Gase, die sich in diesem Verhältnis verbinden, wird in einer Bombe durch elektrische Zündung explosionsartig (adiabatisch) zur Verbrennung gebracht; Q sei die bekannte Verbindungswärme (51). m_3 bedeute die Menge eines dritten inerten Gases oder den Überschuß eines der beiden verbrennenden Gase. Beobachtet werde die Ausgangs- und die höchste Temperatur t_0 und t. Wenn dann c_v für das Verbrennungsprodukt und c_v' für das übrige Gas die mittl. sp. Wärme zwischen t_0 und t bedeuten, so gilt offenbar

$$(t - t_0)\,[(m_1 + m_2)\,c_v + m_3\,c_v'] = Q.$$

Aus mehreren Versuchen, bei denen m_3 variiert wird, lassen c_v und c_v' sich einzeln bestimmen.

t wird aus dem Explosionsdruck berechnet, den man mit einem registrierenden Manometer (Bourdonspirale oder Maschinenindikator) aufzeichnet und nötigenfalls aus der Kurve auf den Anfangswert extrapoliert. Bei sehr hohen Temperaturen (über 2000°) bestimmt man den Druck aus der Stauchung eines kleinen Kupfercylinders (Zerquetschungsmanometer).

Die vorliegenden Versuche (Mallard u. Le Chatelier, Ann. des mines (8) 4, 274. 1883; Langen, Forschungsarb. vom Verein deutsch. Ing. Heft 8, 1903) ergeben für die einfachen Gase (O H N), sowie für CO_2 und H_2O höhere Werte für c_v als bei Zimmertemperatur. Oberhalb 1700° beginnt die Dissoziation (19) merklich zu werden. — Über Chlor (Dissoz. von 1450° an) vgl. Pier, ZS f. phys. Ch. 62, 385. 1908.

c) **Verhältnis der spez. Wärmen** $\varkappa = c_p/c_v$. Durch adiabatische Volumänderung (Clément u. Desormes 1819).

Bei der adiabatischen (d. h. innerhalb wärmeundurchlässiger Wände gedachten) Ausdehnung eines Gases gelten für den gleichzeitigen Zustand von Volumen (v), Druck (p) und absoluter Temperatur ($T = 273 + t$) die Gleichungen

$$p\,v^{\varkappa} = \text{Const.} \qquad T v^{\varkappa - 1} = \text{Const.} \qquad 1.$$

Kommen dem Anfangs- bez. dem Endzustande die Größen v_0, p_0, T_0 bez. v_1, p_1, T_1 zu, so ist hiernach $p_1/p_0 = (v_0/v_1)^{\varkappa}$ und $T_1/T_0 = (v_0/v_1)^{\varkappa - 1}$. [Für relativ kleine Änderungen Δv, Δp, ΔT findet man hieraus leicht (Gl. 1, S. 9) genähert $\Delta p/p = -\varkappa \Delta v/v$ und $\Delta T/T = -(\varkappa - 1)\Delta v/v$. 2.]

Aus einer Messung zusammengehörender Quotienten v_1/v_0 und p_1/p_0 oder T_1/T_0 läßt sich mithin $\varkappa$ berechnen.

Die Druckänderungen werden mittels Flüssigkeitsmanometer oder besser mittels empfindlicher Metallmanometer (S. 135 unten) bestimmt. Auch

v_1/v_0 ergibt sich aus einer Druckmessung; nämlich aus dem Drucke p_1', der sich nach dem Versuch herstellt, nachdem die geänderte Temperatur sich gegen die Umgebung binnen einigen Minuten wieder ausgeglichen hat. Gemäß dem Boyle-Mariotte'schen Gesetz gilt dann $v_1/v_0 = p_0/p_1'$. [Sind die Änderungen relativ klein und wird $p_1' - p_0 = \Delta p'$ bezeichnet, so kommt nahe $\Delta v/v = -\Delta p'/p$ und nach Gl. 2 einfach $\varkappa = \Delta p/\Delta p'$.]

Der Temperatursprung wird mit einem Widerstandsbolometer-Streifen ($\frac{1}{1000}$ mm) verfolgt.

Die Volumänderung, meist eine Verdünnung, geschieht durch kurz dauerndes Öffnen einer Hahnverbindung des Versuchsgefäßes mit einem Nachbargefäß von anderem Druck oder mit der Atmosphäre.

Maßgebende Resultate verlangen große Volumina (50 bis 100 l), weil einerseits die Volumänderung, um Oszillationen zu vermeiden, nicht zu plötzlich geschehen darf, andrerseits die durch die Ausdehnung geänderte Temperatur sofort sich auszugleichen beginnt.

Vgl. besonders Röntgen, Pogg. Ann. 148, 580. 1873 (Druck); Lummer u. Pringsheim, Wied. Ann. 64, 555. 1898 (Temp.).

Über akustische Bestimmung vgl. **56** III.

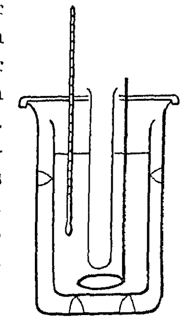
$\varkappa = c_p/c_v$ beträgt höchstens, nämlich bei einatomigen Gasen 5/3, bei den normalen zweiatomigen 1,4; vgl. Tab. 12a, auch **48** im Eingang.

51. Weitere kalorimetrische Messungen.

Eingehendere Behandlung siehe u. a. in Nernst, theor. Chemie und in den Lehrbüchern für phys.-chem. Messungen.

Thermochemische Messungen. Zur Bestimmung der Wärmetönung bei chemischen Vorgängen eignet sich oft das Eiskalorimeter, in welchem man die auf 0° vorgekühlten Körper den chemischen Prozeß vollziehen läßt.

Ein einfacherer Apparat ist z. B. der folgende (Nernst). Innerhalb eines weiteren Glases ruht auf Korkschneiden ein gegen ein Liter fassendes Becherglas. Wärmestrahlung wird durch Versilberung der einander zugewandten Flächen eingeschränkt. Am besten ist das Dewar-Gefäß mit evakuiertem Mantel (8, 30); der Wasserwert wird durch eine Reaktion von schon bekanntem Zahlenwert in einer gewogenen Wassermenge ermittelt. Durch einen gut schließenden Holzdeckel gehen ein empfindliches Thermometer, ein Rührer und ein dünnwandiges Reagierglas, in welchem die Reaktion vor sich geht. Will man Verdünnungs- oder Lösungswärmen messen, so kommt die konzentriertere Lösung oder der zu lösende Körper, eventuell fein gepulvert, in den Reagiercylinder, dessen Boden nach erfolgtem Temperaturausgleich durchstoßen wird. Man operiert mit kleinen Temperaturänderungen.



Aus den letzteren wird die entwickelte Wärmemenge in folgender Weise berechnet (**48** I). Die Flüssigkeitsmenge m im Becherglas habe die

spez. Wärme c, der eingebrachte Körper m' habe c'; die Summe der Wasserwerte von Becherglas, Reagierglas, Rührer und Thermometer sei $= w$ (S. 192), die Temperatur steige von t auf τ, dann beträgt die entwickelte Wärmemenge $(cm + c'm' + w)(\tau - t)$. Vorsichtsmaßregeln und Korrektionen wegen Wärmeaustausches treten ebenso herein wie S. 193.

Absorptionswärmen von Gasen bestimmt man im Prinzip ähnlich wie oben, aber anstatt im Becherglase in einem der Spritzflasche ähnlichen Glaskolben, durch welchen das Gas in die Flüssigkeit tritt. Die absorbierte Gasmenge kann durch Volummessung oder durch Wägung der Flasche vor und nach dem Versuch auf einer empfindlichen Wage oder durch chemische Analyse bestimmt werden.

Schmelzwärme. Eine geschmolzene Menge m des Körpers von der Temperatur t werde in das Eiskalorimeter (**50**) gebracht. Sein Schmelzpunkt sei $= \tau$ (höher als 0^0), seine sp. Wärmen im flüssigen und festen Zustand seien bekannt gleich c und c'. Die geschmolzene Menge Eis sei $= M$. Die Schmelzwärme ist dann

$$\varrho = 80\, M/m - ct + (c - c')\tau.$$

Liegt der Schmelzpunkt unter 0^0, so kann man den Körper fest in das Eiskalorimeter einführen, so daß er in diesem schmilzt, und dann ähnlich rechnen.

Statt $80\,M$ kann man setzen $882\,v$, wenn v die Volumänderung durch das Schmelzen des Eises bedeutet (**50**).

Verdampfungswärme. 1) Mit dem Eiskalorimeter. Eine Dampfmenge m von der Siedetemperatur t schmelze bei ihrer Kondensation und Abkühlung auf 0^0 die Eismenge M. Die spezifische Wärme der Flüssigkeit sei $= c$. Dann berechnet sich die Dampfwärme $\sigma = 80\, M/m - ct$. Die Verdichtung des Dampfes geschieht in einem Schlangenrohr mit einem kleinen Kühlgefäß am Ende. — Die Messung ist leicht Fehlerquellen unterworfen.

Ähnlich kann das Wasserkalorimeter dienen (Regnault).

Über einen kleinen Dampfwärmemesser mit Wasserkalorimeter s. Berthelot, Thermochem. Mess., S. 63. — S. auch Louguinine in C. R. u. Ann. chim. phys. seit 1894.

2) Elektrisches Verfahren. Vgl. auch **49**. Durch eine abgewogene Flüssigkeitsmenge in einem zunächst verschlossenen Gefäß ist ein elektrischer Heizdraht geführt, etwa eine geeignet gestaltete kleine Glühlampe. Das Gefäß ist von siedendem Dampf der gleichen Flüssigkeit umspült und wird zuerst hierdurch bis zur Siedetemperatur erwärmt. Nun wird das Gefäß geöffnet, dann ein Strom von i A, während die Dampfheizung fortdauert, z sec lang durch den Heizdraht geschickt und nach dem Erkalten durch Wägung die verdampfte Menge m bestimmt. Der Drahtwiderstand betrage r Ω, bez. seine Endspannung E V. Dann ist

$$\sigma = 0{,}239\,\frac{i^2 r z}{m} \quad \text{bez.} \quad = 0{,}239\,\frac{Eiz}{m}.$$

Für i (**81** bis **88**) und E (**80** II; **100**, **101**) werden zeitliche Mittelwerte eingesetzt.

Vgl. Marshall und Ramsay, Phil. Mag. (5) 43, 27. 1897; ein ähnliches Verfahren bei Henning, Ann. d. Ph. 21, 849. 1906. Anwendung auf verflüssigte Gase z. B. bei Alt, Ann. d. Ph. 19, 739. 1906.

Verbrennungswärme. Kalorimetrische Bombe (Berthelot). Die mit Platin oder Email ausgekleidete eiserne Bombe enthält stark verdichteten Sauerstoff. Der eingebrachte Körper wird durch einen galvanisch glühenden Körper entzündet. Die entwickelte Wärmemenge findet sich aus der Temperaturerhöhung des Wasserkalorimeters, welches die Bombe umgibt. Bei der Berechnung ist der Wasserwert (**48** I) der Bombe zu dem des Kalorimeters zu addieren.

Gebräuchlich ist die direkte empirische Ermittelung des ganzen Wasserwertes mittels elektrischer Heizung (**49** II; vgl. Jaeger u. v. Steinwehr, Ann. d. Ph. 21, 23. 1906) oder einer in der Bombe ausgeführten Reaktion von bekanntem Heizwert; z. B. liefert die Verbrennung von 1 gr (Vakuum) Benzoesäure 6330, Rohrzucker 3950 gr-Kal (26,47 bez. 16,54 Kilowattsec.; Fischer u. Wrede, Sitz.-Ber. Berl. Ak. 1908, 129).

Heizwert von Leuchtgas: z. B. Kalorimeter von Junkers, in dem die Wärme an durchströmendes Wasser abgegeben wird. ZS f. Instr. 1895, 408.

Bücher: Thomsen, Thermochem. Unters. Leipzig 1882—1886; Berthelot, Thermochem. Messungen, übers. v. Siebert, Leipzig 1893; Hempel, Gasanalyt. Methoden, 3. Aufl. S. 375. 1900; Louguinin, Beschreib. d. Hauptmethoden usw. 1897; Louginin u. Schukarew, Méth. de calorimétr. 1908.

51a. Mechanisches Wärmeäquivalent.

Übersicht der genaueren Bestimmungsweisen.

Mech. Wärmeäqu. $\mathfrak{A}$ heißt die der Wärmeeinheit [Wasser-Kal; **48**] gleichwertige mechanische Energiemenge. Die Energieeinheit wird aus dem Heben eines Gewichtes [gr-Gewicht $\times$ cm; Dyne $\times$ cm = Erg; Anh. 9] oder aus der Bewegungsenergie [gr $\times$ (cm/sec)^2] oder aus elektrischer Energie [V $\times$ A $\times$ sec = Wattsekunde oder Joule = 10^7 Erg] abgeleitet.

Einheiten. Je nachdem die Krafteinheit aus der Trägheit der Masse (gewöhnlich als CGS-Einheit; Dyne) abgeleitet oder (als gr-Gewicht, bez. technisch meist als kg-Gewicht) der Erdschwere entnommen wird, entstehen für das mech. Wärmeäquivalent die Einheiten Erg/gr-Kal oder aber gr-Gew. $\times$ cm/gr-Kal bez. die technische Einheit kg-Gew. $\times$ meter/kg-Kal. Insofern dann als selbstverständlich angenommen zu werden pflegt, daß man die Kalorie auf dieselbe Masse (gr oder kg) bezieht wie das gehobene Gewicht und daß die Wärmekapazität des Wassers gleich Eins gesetzt wird, drückt sich das mech. W.-Äqu. einfach als eine Hubhöhe an der Erdoberfläche aus.

I. Aus der Reibungswärme (Joule 1847).

Ein Gewicht (oder ein Gewichtepaar) P gr sinke langsam um die Höhe h cm, übertrage durch Reibung die hierdurch geleistete Arbeit

Ph gr-Gew. $\times$ cm mittels seines über eine Rolle geführten Aufhängefadens durch Reibung an ein Kalorimeter (48) und entwickele in diesem Q gr-Kal. Dann ist
$$\mathfrak{A} = \frac{Ph}{Q} \frac{\text{cm Erdschwere}}{\text{Wärmekap. des Wassers}}.$$

Brems-Kalorimeter. Die Reibungsarbeit wird durch Rotation erzeugt und aus dem Drehmoment berechnet, welches vermöge der Reibung auf einen mittels Gewichte (oder bekannter Federkraft) so beanspruchten Hebelarm übertragen wird, daß dieser in Ruhe bleibt. r sei die Armlänge, an der eine Kraft (über eine Rolle aufgehängtes Gewicht) Π wirken muß, damit der Arm ruhig bleibt. Dann wird durch Reibung bei einer Umdrehung die Arbeit $\Pi \cdot 2\pi r$ verbraucht, bei n Umdrehungen somit $\Pi \cdot 2\pi r n$. Erzeugen n Drehungen Q Kal, so ist
$$\mathfrak{A} = \Pi \cdot 2\pi r n/Q.$$
Empirisch wird eliminiert die außerhalb des Kalorimeters etwa durch Reibung verbrauchte Arbeit und der Wärmeaustausch gegen die Umgebung (S. 193).

Genaue Messungen von Rowland in verschiedenen Temperaturlagen des Kalorimeters (bei denen das Minimum der spez. Wärme des Wassers entdeckt wurde; vgl. S. 189) Proc. Amer. Acad. 7, 75. 1880. — Miculescu, Ann. chim. phys. (6) 27, 202. 1892. — Demonstrations- und Übungsapparate u. A. von Puluj, Pogg. Ann. 157, 437 u. 649. 1876; Christiansen, ib. 48, 374. 1893; Grimsehl, Phys. ZS 4, 568. 1903; Rubens, Verh. D. Ph. Ges. 1906, 77.

Auch die durch Reibung in Kapillaren (Joule) oder durch den Stoß unelastischer Körper (Hirn) erzeugte Wärme läßt sich in theoretisch einfach liegender Weise benutzen (Joule).

II. Aus dem sp. Wärmeverhältnis c_p/c_v eines idealen Gases (Rob. Mayer 1842).

Vgl. S. 79 u. 204. Eine Volumänderung vollzieht sich hier ohne innere Arbeitsleistung; folglich bedeutet die Differenz $c_p - c_v$ die Wärmemenge, die sich in äußere, auf den Gegendruck p übertragene Arbeit umsetzt, während die Gasmenge Eins um 1^0 erwärmt wird und sich dabei unter konstantem Drucke vom Anfangsvolumen v zu $v + \Delta v$ ausdehnt. Diese Arbeit berechnet sich folgendermaßen.

Bezeichnet R die „Konstante des betr. Gases", so gilt $R = vp/T = (v + \Delta v)p/(T + 1)$. Hieraus folgt $p = RT/v$ und $\Delta v = v/T$. Die gesuchte Arbeit wird somit durch $p\Delta v = R$ dargestellt, und es ist
$$\mathfrak{A} = R/(c_p - c_v).$$

Beispiel. 1 gr Wasserstoff hat bei 0^0 C, d. h. bei $T = 273{,}1$ (S. 79) und bei dem Druck 76 cm Hg 0^0, d. h. $p = 1033{,}3$ gr-Gew/qcm (S. 131) das Volumen (Tab. 12a) $v = 1/0{,}00008985 = 11130$ ccm. Hieraus berechnet sich, v in cm^3 und p in gr-Gew./cm^2 gemessen, $R = vp/T = 42110$. — Ferner ergibt sich aus $c_p = 3{,}41$ und $c_p/c_v = 1{,}41$ (Tab. 12a) $c_v = 2{,}4184$, also $c_p - c_v = 0{,}9916$. Somit wird $\mathfrak{A} = 42110/0{,}9916 = 42470$ cm Erdschwere/Kal

oder $42470 \cdot 980{,}6 = 4{,}164 \cdot 10^7$ Erg/gr-Kal. — Große Genauigkeit der Zahl ist nicht zu erwarten; $c_p/c_v = 1{,}40$ statt 1,41 würde sie um 2% ändern.

III. Aus der elektrischen Stromwärme (zuerst durchgeführt von v. Quintus Icilius, Pogg. Ann. 101, 69. 1857).

Werden in einem elektrisch durchströmten Leiter die Stromstärke (i) und der Widerstand (w) oder die Endspannung (E) in absoluten CGS-Einheiten gemessen (vgl. besonders Nr. 24, 26, 29 und 30 im Anhang), so stellt i^2wt oder iEt die innerhalb dieses Leiters in t sec vom Strom verrichtete Arbeit dar. Wird hierdurch innerhalb des Leiters nur eine Wärmemenge (Q gr-Kal) erzeugt (also nicht etwa chemische oder mechanische Energie), so gilt also $\mathfrak{A} = i^2wt/Q$ bez. $= iEt/Q$ Erg/gr-Kal.

Legt man der elektrischen Messung die praktischen Einheiten $A = 10^{-1}$, $\Omega = 10^9$ und $V = 10^8$ CGS zugrunde, so geben die Gleichungen $\mathfrak{A}$ in 10^7 Erg/gr-Kal.

Diese, in **49** II skizzierte, Messung ist einfacher und leichter genau durchzuführen als die Methoden I und II. Die Richtigkeit des Resultats hängt indessen von der Richtigkeit der internationalen el. Einheiten ab; es wird eindeutig, wenn man anstatt 10^7 Erg „Wattsekunde" oder „Joule" schreibt.

Über genaue Messungen vgl. u. a. Dieterici, Wied. Ann. 33, 417. 1888; Griffiths, Phil. Trans. (A) 184, 361. 1893; Phil. Mag. (5) 40, 431. 1895; Schuster u. Gannon, Phil. Trans. (A) 186, 415. 1894; Callendar, ib. 199, 55 und Barnes, ib. 199, 149. 1902.

Als zur Zeit wahrscheinlichsten Wert leiten Scheel und Luther $\mathfrak{A} = 4{,}188 \cdot 10^7$ Erg/gr-Kal_{15} ab. In Hubhöhe entgegen der Schwere unter 45° Breite umgerechnet gibt dies $4{,}188 \cdot 10^7/980{,}6 = 42710$ cm $= 427{,}1$ m. Verh. D. Phys. Ges. 1908, 589; Elt. ZS 1908, 747.

51b. Wärmeleitvermögen.

Wärmeleitvermögen λ (Tab. 11) ist die Wärmemenge (Wasser-gr-Kal), welche in der Zeiteinheit durch den Querschnitt Eins (1 cm²) hindurchfließt, wenn senkrecht zu diesem Querschnitt der Temperaturgradient Eins herrscht, d. h. wenn auf der Strecke Eins (1 cm) die Temperaturänderung = Eins (1° C) ist. Den größten bekannten Wert hat Silber, zufällig nahe $\lambda = 1$ gr-Kal. $\text{cm}^{-1} \cdot \text{Grad}^{-1} \cdot \text{sec}^{-1}$.

λ nimmt in der Regel mit wachsender Temp. ein wenig ab. Bei den meisten reinen Metallen stehen die L.-V. λ für Wärme und $\varkappa$ für Elektrizität genähert in demselben Verhältnis (G. Wiedemann); wird λ in gr-Kal. $\text{cm}^{-1}\,\text{Grad}^{-1}\,\text{sec}^{-1}$ und $\varkappa$ in $\text{Ohm}^{-1}\,\text{cm}^{-1}$ (**80** I) gemessen, so ist bei Zimmertemperatur ungefähr $\varkappa/\lambda = 6 \cdot 10^5$. — Verunreinigungen können λ stark herabdrücken. — Das L.-V. der Kohle wächst mit der Temperatur.

λ durch (Dichte $\times$ sp. Wärme) geteilt heißt Temperaturleitungskoeffizient.

Zur Messung der Temperaturen an bestimmten Punkten dienen Thermoelemente (**43** I).

Vergleichung von Stäben; alte Methode.

Seiner einfachen Hilfsmittel wegen wird das Verfahren (Despretz, Wiedemann, Forbes) als Übungsaufgabe beschrieben.

Die Stäbe sollen gleichen Querschnitt und gleiche Oberfläche (versilbert oder vernickelt) haben. Man erhitzt, etwa mit siedendem Wasser, das eine oder besser beide Enden des einen Stabes, bis die Temperaturverteilung stationär geworden ist. In drei vor Strahlung geschützten äquidistanten Querschnitten I, II und III werde der Temperaturüberschuß u_1, u_2 und u_3 über die Umgebung gemessen; wir bezeichnen $\frac{1}{2}(u_1 + u_3)/u_2 = n$.

Dasselbe Verfahren auf einen anderen Stab angewandt ergebe an drei ebensoweit abstehenden Punkten die Temperaturüberschüsse U_1, U_2 und U_3 und $\frac{1}{2}(U_1 + U_3)/U_2 = N$.

Dann verhalten sich die Leitvermögen λ und Λ

$$\frac{\Lambda}{\lambda} = \left[\frac{\lg(n + \sqrt{n^2 - 1})}{\lg(N + \sqrt{N^2 - 1})}\right]^2.$$

Beweis. Im stationären Zustand empfängt jedes Längenelement dx des Stabes in der Zeiteinheit durch Leitung so viel Wärme, wie es an die äußere Umgebung abgibt. Die letztere Menge ist $\eta u\, dx$, wenn η das auf die Längeneinheit des Stabes bezogene „äußere Leitungsvermögen" vorstellt. Erstere Menge ist $\lambda \cdot q \frac{d^2 u}{dx^2} dx$. η und der Querschnitt q sind für beide Stäbe gleich. Die Gleichsetzung beider Ausdrücke liefert die Differentialgleichung $\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{\eta}{\lambda q} u = \alpha^2 u$, wenn $\frac{\eta}{\lambda q} = \alpha^2$ bezeichnet wird. Das allgemeine Integral der Gleichung ist: $u = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}$, wo C_1 und C_2 zwei von der Erwärmung der Endflächen abhängige Integrationskonstanten bedeuten. Nennt man u_1, u_2, u_3 die Temperaturen für drei je um die Länge l auseinanderliegende Querschnitte, so findet man durch Einsetzen von x, $x + l$ und $x + 2l$ für x in obige Gleichungen nach Elimination von C_1 und C_2 die Beziehung $e^{\alpha l} + e^{-\alpha l} = (u_1 + u_3)/u_2 = 2n$ (siehe oben). Hieraus folgt

$$e^{\alpha l} = n + \sqrt{n^2 - 1}, \quad \text{also} \quad \alpha^2 l^2 = \frac{\eta}{\lambda q} l^2 = [\lg \text{nat}\,(n + \sqrt{n^2 - 1})]^2.$$

Dieselbe Gleichung mit Λ und N für den zweiten Stab aufgestellt und in die erstere dividiert liefert den zu beweisenden Ausdruck.

Die Temperaturen bestimmt man mit Thermoelementen aus ganz feinen zusammengelöteten Drähten (Konstantan — Eisen), deren eine Lötstelle in feine Bohrungen der Stäbe eingesenkt oder auch wohl, mittels Gewichtchen an den Drahtenden, auf den Stab aufgedrückt ist, während die anderen Verbindungen in der umgebenden Luft liegen. Vgl. **43** I.

Vgl. noch Wiedemann und Franz, Pogg. Ann. 89, 497. 1853.

Zurückführung des absoluten L.-V. λ auf das äußere L.-V. η. Es folgt aus der letzten Gleichung im obigen Beweise:

$$\lambda = \frac{\eta}{q} \frac{l^2}{[\lg \operatorname{nat} (n + \sqrt{n^2 - 1})]^2}.$$

Eine genäherte Bestimmung von η/q kann nun so ausgeführt werden: Man erwärmt den Stab gleichmäßig, legt ihn ebenso hin wie vorher und beobachtet nahe der Mitte mit dem Thermoelement zu mehreren Zeiten $t', t'' \ldots$ die zugehörigen Temperaturüberschüsse $u', u'' \ldots$ Die letzteren sollen von derselben Größenordnung gewählt werden, wie die $u_1, u_2 \ldots$ oben. Nennt man s die Dichtigkeit, c die sp. Wärme des Stabes (Tab. 2 u. 11), so ist

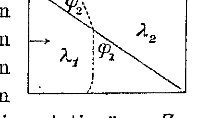
$$\frac{\eta}{q} = cs \frac{\lg \operatorname{nat} u' - \lg \operatorname{nat} u''}{t'' - t'}.$$

Denn im Zeitelement dt wird pro Längeneinheit des Stabes nach außen abgegeben die Wärmemenge $dQ = \eta u dt$; hierdurch ändert sich die Temp. um $du = -dQ/(qcs) = -\eta u dt/(qcs)$. Folglich ist $du/dt = -\eta u/(qcs)$ und integriert $qcs \lg \operatorname{nat} u = C - \eta t$. Also ist:

$$qcs(\lg \operatorname{nat} u' - \lg \operatorname{nat} u'') = \eta(t'' - t'), \text{ q. e. d.}$$

Vergleichung von Platten mittels Schmelzkurven (Voigt).

Zwei aneinander gekittete dünne Platten gleicher Dicke (Fig.) sind mit einer sehr dünnen Schicht eines Körpers von gut charakterisiertem Schmelzpunkte (Elaidinsäure mit etwas Wachs-Terpentin gemischt) überzogen. Durch Anlegen einer von den Kanten, am besten der kürzeren Kante des besseren Leiters, an einen erwärmten guten Leiter (amalgamierten Kupferklotz) entsteht ein Wärmestrom, dessen Isothermen in der Trennungslinie geknickt sind, und zwar gilt im stationären Zustande (Fig.) $\lambda_1 : \lambda_2 = \operatorname{tg} \varphi_1 : \operatorname{tg} \varphi_2$.



Die Winkel werden aus den beiderseitigen Tangenten an der Schmelzkurve ermittelt.

Über Ausführung sowie Anwendung auf Kristalle vgl. W. Voigt, Wied. Ann. 64, 95. 1898; Legierungen: F. A. Schulze, Ann. der Ph. 9, 560. 1902.

Absolutes Leitvermögen.

Messungen mit Zeitbestimmung.

Man kombiniert Messungen von örtlichen und zeitlichen Temp.-Änderungen derartig, daß zwei Gleichungen entstehen, aus denen das innere und äußere L.-V. einzeln abzuleiten ist.

a) Der zeitliche Temperaturverlauf wird an zwei Punkten eines Stabes oder Ringes gemessen, der sich abkühlt, nachdem ein Querschnitt erwärmt worden war (F. Neumann).

b) Die eine Fläche eines Würfels oder Stabes wird durch plötzliches Bespülen oder Bestrahlen einer dauernden Temperatur-

änderung ausgesetzt und die Temperatur an Punkten im Innern als Funktion der Zeit gemessen. Das äußere L.-V. hat hier geringen Einfluß (Kirchhoff u. Hansemann).

c) Ein Stabende oder beide Enden werden periodischen Erwärmungen ausgesetzt; die entstehenden Wärmewellen werden in zwei Querschnitten beobachtet (Angström; H. Weber).

d) Ein Stab wird zeitweilig an einem Ende erwärmt und demnächst sich selbst überlassen. Der Temp.-Verlauf wird sowohl während der Erwärmung wie während der Abkühlung an mehreren Punkten gemessen (Lorenz).

Zu *a*: Glage, Ann. d. Ph., 18, 904. 1905. Daselbst auch die frühere Literatur, besonders H. F. Weber. — Zu *b*: Kirchhoff und Hansemann, Wied. Ann. 9, 1. 1880; Schulze, ib. 66, 207. 1898; Grüneisen, Ann. der Ph. 3, 43. 1900; Giebe, Verh. D. Phys. Ges. 1903, 60. — Zu *c*: Angström, Pogg. Ann. 114, 513. 1861 und 123, 628. 1864; Heinrich Weber, ib. 146, 257. 1872. — Zu *d*: Lorenz, Wied. Ann. 13, 422. 1881. — Ferner: Lees, Phil. Trans. (A) 208, 381. 1908. Eine Zusammenstellung bei Holborn u. Wien, ZS d. Ver. deut. Ing. 40, 45. 1896.

Messung mittels des stationären Zustandes bei elektrischer Heizung (F. K.)

Ein konstanter el. Strom durchfließt einen Metallstab, dessen seitliche Oberfläche gegen Wärmeabgabe möglichst geschützt ist, so daß die Stromwärme durch die in Bädern von konstanter Temp. befindlichen Enden austreten muß. Nachdem die Erwärmung stationär geworden ist, mißt man die Unterschiede der Maximaltemperatur in der Stabmitte gegen zwei beiderseitig gleich weit entfernte Punkte und nimmt aus den beiden nahe gleichen Differenzen das Mittel; es heiße U. Außerdem wird die el. Spannung (Potentialunterschied) V zwischen den beiden äußeren Punkten gemessen; vgl. **101** bis **103**.

Dann ist, wenn $\varkappa$ das el. L.-V., (Beweis s. unten)

$$\lambda/\varkappa = \tfrac{1}{8} V^2/U.$$

$\varkappa$ ermittelt man gleich bei demselben Versuch als $\varkappa = i \cdot 2l/(qV)$, wo i die Stromstärke, $2l$ der Abstand zwischen den Punkten I und III und q der Querschnitt des Stabes ist. i in A, V in V, l und q durch cm gemessen gibt $\varkappa$ in $\Theta^{-1}\text{cm}^{-1}$. In dem so berechneten λ ist als Wärme- (Arbeits-)Einheit die Wattsekunde angenommen. Durch Multiplikation mit deren Verhältnis zur gr-Kalorie 0,239 (Anh. 30) wird λ in gewöhnlichem Maße erhalten.

Beweis der Formel. Das Element dx des Stabes hat den Widerstand $dx/(\varkappa q)$, erhält also in 1 sec die Stromwärme $i^2 \cdot dx/(\varkappa q)$ Wattsec. Durch Wärmeleitung gibt es ab die Wärmemenge $-\lambda q(d^2u/dx^2)dx$. Beide Mengen sind im stationären Zustande identisch, also folgt $-\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{i^2}{\lambda\varkappa q^2}$, als erstes Integral $-\frac{du}{dx} = \frac{i^2}{\lambda\varkappa q^2}x + C$ und als zweites $-u = \frac{i^2}{\lambda\varkappa q^2} \cdot \frac{x^2}{2} + Cx + C'$. Werden u und x von dem Maximalpunkt als Nullpunkt gezählt, so ist, weil daselbst $du/dx = 0$ ist, nach der ersten Integralgleichung $C = 0$, und nach der zweiten auch $C' = 0$, weil für $x = 0$ auch $u = 0$ sein soll. So entsteht $-u = \frac{i^2}{\lambda\varkappa q^2} \cdot \frac{x^2}{2}$, also für jeden der beiden äußeren Punkte die (negative) Differenz gegen die Mitte $U = \frac{i^2}{\lambda\varkappa q^2} \cdot \frac{l^2}{2}$. Der Widerstand zwischen beiden Punkten ist $2l/(\varkappa q)$, also $i = \frac{1}{2}V\varkappa q/l$. Dies eingesetzt kommt $U = \frac{1}{8}\varkappa V^2/\lambda$, q. e. d.

Über die Ausführung, Berücksichtigung der Veränderlichkeit von λ und $\varkappa$, Elimination des Restes äußerer Wärmeleitung vgl. F. K., Ann. der Ph. 1, 145. 1900 und besonders Jaeger und Diesselhorst, Wiss. Abh. d. P. T. Reichsanst. III, 269. 1900.

Schlechte Leiter. Man pflegt Platten, bei bekannter Temp. ihrer Oberflächen, stationär quer durchströmen zu lassen. Kalorimetrische Messung der durchgehenden Wärmemenge gibt absol. L.-V.; Focke, Wied. Ann. 67, 132. 1899, nach Voigt. Platten, die nur verglichen werden sollen, schichtet man aufeinander; H. F. Weber sowie Christiansen l. c. unten. — S. auch Lees, Phil. Tr. (A) 204, 433. 1905. — Viele Lit. bei Chwolson, III, 404.

Flüssigkeiten. Die Messungen, grundsätzlich ebenso ausführbar wie an festen Körpern, werden durch die Konvektion der Wärme mittels Strömungen erschwert. Über die Methoden, die sich je nach der Anwendung eines veränderlichen oder eines stationären Zustandes unterscheiden, s. besonders H. F. Weber, Wied. Ann. 10, 668 u. 11, 345. 1880; Christiansen, ib. 14, 23. 1881. Ausführliche Literaturangabe und Resultate in Winkelmann's Handbuch, 2. Aufl. III, 514 ff. 1906; Wüllner, 5. Aufl. II, 304. 1896; Chwolson l. c.; auch Lees, Phil. Trans. (A) 191, 399. 1898.

Gase. Bei der Messung der kleinen (bis hinab zu einigen mm Quecksilber vom Drucke unabhängigen, mit wachsender Temperatur sinkenden) Leitung ist außer der Strömung die Strahlung zu eliminieren. Zu ersterem Zweck dient die Anwendung kleiner Dimensionen und besonders geringer Dichte. Die Strahlung läßt sich nach vollständigem Evakuieren bestimmen (Kundt u. Warburg). Literatur z. B. bei Winkelmann oder Wüllner (s. oben); auch Chwolson III, 406. Bezüglich der Messung mit stationärem Zustand besonders Schleiermacher, Wied. Ann. 34, 623. 1888; auch Schwarze, Diss. Halle 1902; Günther, ib. 1906. Mit veränderlichem Zustand Kutta, Wied. Ann. 54, 104. 1895; Pauli, Ann. d. Ph. 23. 907. 1907.

Wärmestrahlung siehe 72a.

Elastizität und Schall.

52. Bestimmung des Elastizitätsmoduls durch Dehnung.

Elastizitätsmoduln s. in Tab. 20.

Die Gestaltsänderung eines festen Körpers durch deformierende Kräfte heißt eine elastische, wenn sie nach Aufhören der Kräfte vollkommen verschwindet. — Kleine Deformationen wachsen den Kräften proportional; Hooke'sches Gesetz. Mit anderen Worten, durch eine elastische Deformation D entstehen in dem Körper molekulare, der Deformation entgegenwirkende, mit D proportionale Kräfte P.

Der Elastizitäts-Modul (oder -Koeffizient) charakterisiert die elastische Stärke des Materials dadurch, daß er für einen definierten Fall das Verhältnis P/D angibt. — Praktisch unterscheidet man den El.-Modul der Dehnung und den der Torsion. Der erstere, auch El.-Modul schlechthin genannt, bezeichnet die Kraft, welche sich durch eine Abstandsänderung paralleler Schichten entwickelt; über die zugehörigen Querverschiebungen vgl. **55a.** Auf die Dehnung läßt sich die Biegung zurückführen. Über Torsion vgl. **55.**

Ein Cylinder (Draht, Stab) habe die Länge l, den Querschnitt q; eine ausdehnende Kraft P bewirke eine Verlängerung λ, welche nach dem Aufhören der Kraft wieder verschwinde. Dann ist, wenn man den El.-Modul der Ausdehnung durch E bezeichnet, innerhalb der Proportionalitäts-Grenze

$$\lambda = \frac{1}{E}\frac{l}{q}P \qquad \text{oder} \qquad E = \frac{l}{\lambda}\frac{P}{q}.$$

E ist also das Verhältnis der Belastung, welche an einem Cylinder von der Länge und dem Querschnitt Eins angebracht wird, zu der dabei entstehenden Verlängerung; oder auch die Belastung, welche die Länge eines Drahtes vom Querschnitt Eins verdoppeln würde, wenn das anfängliche Verhältnis der Verlängerung zur Belastung bis dahin bestehen bliebe.

Die Zahlengröße für einen El.-Modul hängt von den Einheiten ab, in denen Querschnitt und Gewicht gemessen werden:

Gebräuchliche technische Definition, E. Man pflegt die dehnende Kraft in kg-Gewichten, den Querschnitt meist in qmm zu messen (die Längeneinheit hebt sich heraus); Einheit von E ist dann das kg-Gew./mm².

Elastizitätsmodul E im CGS-System. Betrachtet man gr, kg usw. nicht als Gewichts-, sondern als Masseneinheiten, so ist die dehnende Kraft $= gP$, wo g die Schwere bedeutet. Die Krafteinheit des CGS-Systems, die „Dyne“, d. h. das Gewicht der Masse 1 gr an einem Orte, wo die Fallbeschleunigung 1 cm/sec² betrüge, ist also g mal kleiner, mithin

der El.-M. $g$mal größer, als wenn das Gramm als Gewichtseinheit genommen wird. Einen in kg-Gew./mm² ausgedrückten El.-M. E hat man also, um den El.-M. E Dyne/cm² im CGS-System zu erhalten, erstens mit kg/gr = 1000, ferner mit cm²/mm² = 100 und endlich mit g = 981 cm/sec², also mit 98100000 zu multiplizieren. Vgl. Anh. 13.

E geteilt durch die Dichtigkeit gibt das Quadrat der Schallgeschwindigkeit im Körper in (cm/sec)². Vgl. **53**.

Mit wachsender Temperatur sinkt der El.-M. merklich, je nach dem Material recht ungleich; bei den untersuchten Metallen in mittlerer Temp. zwischen vielleicht $\frac{1}{30}$ und $\frac{1}{3}$ Prozent auf + 1°; vgl. Tab. 20.

Über den sog. zweiten El.-Modul vgl. **55**, über Querkontraktion **55a**.

Kristalle. Die Elastizität von Kristallen („äolotropen" Körpern), d. h. von Körpern, die in allen ihren Teilen gleich beschaffen sind, deren elastische Eigenschaften jedoch, in jedem Punkte in derselben Weise, von der Richtung abhängen, läßt sich nicht durch zwei, sondern nur durch eine größere Anzahl von Elastizitäts-Konstanten erschöpfend beschreiben, die im allgemeinsten Falle auf 36 steigt. Zurückgeführt werden die Erscheinungen auf je drei von einander unabhängige, auf einander senkrechte „Hauptspannungen" und „Hauptdilatationen".

Über Kristall-Elastizität und ihre Literatur s. W. Voigt, die physikal. Eigenschaften der Kristalle, Leipz. 1898.

Wir beschränken uns auf homogene, als isotrop angenommene Körper.

Bestimmung des Elastizitätsmoduls. Man befestigt das obere Ende des Drahtes (oder Stabes), belastet das untere wenn nötig zuerst so weit, daß der Draht gestreckt ist, und mißt seine Länge l. Der Querschnitt (vgl. S. 217) betrage q qmm. Man fügt eine Mehrbelastung P kg hinzu und bestimmt die Längenänderung λ, in derselben Einheit wie l ausgedrückt. Dann gilt

$$E = \frac{l}{\lambda} \frac{P}{q} \frac{\text{kg-Gewicht}}{\text{mm}^2}.$$

Die Belastungsgrößen variiert man; vgl. das Beispiel, aber auch S. 219 die Frage nach der Abhängigkeit des El.-M. von der Dehnung.

Kann das obere Ende als unverschiebbar gegen die Meßvorrichtung am unteren Ende angenommen werden, ist z. B. ein dünner Draht dicht vor einem soliden vertikalen Maßstabe an diesem befestigt (Fig.), so mag man die Dehnung als Verschiebung einer Marke am unteren Ende messen. Das Nachgeben einer Stütze kann auch dadurch ver-

mieden werden, daß man sie mittels eines Fadens über einer Rolle durch eine der Belastung gleiche Kraft zugleich nach oben beansprucht.

Bei genauen Bestimmungen, sowie an Stäben oder stärkeren Drähten mißt man die Längenänderung als Differenz der Verschiebungen an beiden Enden. Hierzu dient z. B. ein auf einem Maßstabe (Kathetometer 22) verschiebbares Mikroskop oder besser zwei feststehende Mikroskope mit Okularmikrometern (21, 4); die Marken können als feine Querstriche mit dem Diamant oder einer feinen Feile oder auf einem angeklebten Papierstreifchen angebracht werden.

Elastizitätsgrenze. Die Dehnungen müssen innerhalb der El.-Gr. bleiben, das heißt, der Draht soll entlastet zur früheren Länge zurückkehren, was zu kontrolieren ist; s. aber auch unten „elastische Nachwirkung". Die Elastizitätsgrenze kann dadurch erweitert werden, daß man vor den Messungen stärker dehnt. — Selbst bei harten Metallen wird man die Hälfte der Belastung, bei welcher das Zerreißen eintritt, nicht überschreiten. Vgl. Tab. 20.

Ist ein Körper nach einer Richtung stark beansprucht (gedehnt, gebogen, gedrillt) gewesen, so daß seine Gestalt sich dauernd geändert hat, so pflegt seine neue Elastizitätsgrenze in der Richtung der vorausgegangenen Beanspruchung erweitert zu sein; man kann ihm, ohne dauernde Änderungen befürchten zu müssen, im neuen Zustande größere Deformationen (Dehnungen, Biegungen, Torsionen) zumuten, als von seinem natürlichen Zustande aus. Dies ist für eine genaue Messung vorteilhaft. Es werde indessen auf zweierlei hingewiesen.

Erstens ist der Molekularzustand des Körpers jetzt in der Weise unsymmetrisch geworden, daß der nach einer Richtung eingetretenen Erweiterung der El.-Grenze eine Verengung nach der entgegengesetzten gegenüber steht; es genügt jetzt unter Umständen eine sehr kleine Rückdeformierung, um die neue Gestalt dauernd zu ändern. (Bei ausschließlichen Dehnungsversuchen tritt dies, der Natur der Sache nach, nicht zu Tage; wohl aber, wenn Dehnungs- und Druckversuche, oder Biegungen bez. Torsionen entgegengesetzter Richtung auf einander folgen.)

Zweitens behalte man im Auge, daß in dem dauernd deformierten Körper ein anderer als der ursprüngliche Körper vorliegt; die Erfahrung zeigt, daß der El.-Modul sich gegen den früheren Zustand merklich geändert haben kann. Kommt es also darauf an, einen Körper gerade im ursprünglichen Zustande zu untersuchen, so darf man das Mittel, seine El.-Grenze durch vorgängiges Strecken usw. zu erweitern, nicht anwenden, sondern muß sich auf kleine Beanspruchungen beschränken.

Dicke Stäbe (Bauschinger). Man überträgt den Unterschied der Verschiebungen beider Enden mittels paralleler Stangen komparatorisch mit Hilfe einer Gleitrolle oder eines Fühlhebels auf drehbare Spiegel oder auf Zeiger über einer Teilung; vgl. **25** u. **21**.

Der Stab sowohl wie die Last hängen dabei zentriert in Cardanischen Aufhängungen; die trotzdem auftretenden Biegungen müssen durch zwei zur Stabaxe symmetrische Beobachtungen eliminiert werden.

Siehe z. B. Martens, Materialienkunde I, 45ff. u. 435ff. 1898; Bach, Elastizität u. Festigkeit, 5. Aufl. § 8. 1905. — In beiden Werken auch eingehend die Methoden für Festigkeitsbestimmungen.

Verkürzungsmoduln werden im Prinzip ebenso an dicken Stäben und mit entsprechend großen zusammendrückenden Belastungen ermittelt.

Messungen an kurzen Stäben mittels Interferenzstreifen; vgl. **44** II u. **65** IV. Der Stab hängt zentriert an einem kurzen Stahldraht, an einem ebensolchen unten die Wagschale; s. Figurenskizze. Die Längenänderung zwischen zwei Querschnitten Q_1 Q_2 wird mittels zweier, den Stab eng umschließenden Röhren, die an Q_1 bez. Q_2 mit Spitzenschrauben befestigt sind, auf zwei Paare von Querstücken übertragen, an denen die planparallelen Glasplattenpaare S sitzen. Man beobachtet das Wandern der Fransen (Newton'scher Streifen oder Haidinger'scher Ringe), während die Belastung mittels eines Exzenters langsam erschütterungsfrei gewechselt wird; der Wanderung um eine Streifenbreite entspricht eine Längenänderung um $\frac{1}{2}$ Wellenlänge des angewandten Lichtes. Um Biegungen zu eliminieren, mißt man auf beiden Seiten.

Über die Ausführung vgl. Grüneisen, ZS f. Instr. 1907, 38; Ann. d. Ph. 22, 801. 1907; auch Shakespear, Phil. Mag. (5) 47, 539. 1899.

Querschnittsmessung. 1. Durch Messung des Durchmessers, für kleine Dicken mit Fühlhebel, Sphärometer oder Mikroskop (**21**).

2. Durch Wägung. Wiegen h mm eines Drahtes von der Dichtigkeit s (**15** u. Tab. 2) m mg, so ist der Querschnitt $q = m/(hs)$ mm².

Beispiel. 2 m eines Eisendrahtes wogen 1310 mg; Dichtigkeit = 7,61, also Querschnitt $q = 1310/(2000 \cdot 7{,}61) = 0{,}0861$ mm². — Die Dehnungsversuche ergaben in der durch die Nummern angegebenen Reihenfolge:

Nr.	Belastung.	Länge.	*Nr.*	Belastung.	Länge.	Verlängerung durch 2 kg
1.	0,5 kg	913,80 mm	*2.*	2,5 kg	914,89 mm	1,09 mm
3.	0,6 „	913,85 „	*4.*	2,6 „	914,96 „	1,11 „
5.	0,7 „	913,90 „	*6.*	2,7 „	915,00 „	1,10 „
7.	0,8 „	913,98 „	*8.*	2,8 „	915,09 „	1,11 „

Die Verlängerung auf $P = 2{,}00$ kg ist hiernach im Mittel $\lambda = 1{,}102$ mm.

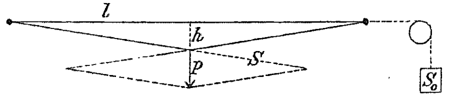
Hieraus folgt $$E = \frac{l}{\lambda}\frac{P}{q} = \frac{913{,}8 \cdot 2{,}0}{1{,}102 \cdot 0{,}0861} = 19260 \,\frac{\text{kg-Gew.}}{\text{mm}^2}.$$

Im CGS-System ist dieser Elastizitätsmodul (S. 214 u. Anh. 13)

$$E = 19260 \cdot 98100000 = 1890 \; 10^9 [\text{cm}^{-1}\,\text{gr sec}^{-2}].$$

Über die gleichzeitige Anwendung zweier gleicher parallel aufgehangener Drähte, an denen unten ein Wagebalken befestigt ist, vgl. Cassie, Proc. Phys. Soc. London 18, 215. 1902. In einem Spiegel an der Stirnseite des Balkens werden die Neigungen beobachtet, die durch wechselnde Belastung der einen oder anderen Seite entstehen. Auch kann die vertikale Schwingungsdauer des Balkens zur Bestimmung dienen, wobei das Trägheitsmoment aus Horizontalschwingungen abgeleitet wird (**29** III).

Bestimmung mittels Knickung gespannter Drähte. Die Verlängerungen dünner Drähte lassen sich bestimmen, indem man den horizontal gespannten Draht an den Enden fest einklemmt und in der Mitte belastet, so daß er geknickt wird. Es sei l die halbe Länge des Drahtes. S_0 bezeichne die ursprüngliche Spannung, h die durch die Belastung P bewirkte Senkung.



1. S_0 sei bekannt, nämlich als Gewicht über eine Rolle (Fig.), welches das eine Drahtende spannte, als dieses (ohne Verschiebung!) eingeklemmt wurde, so gilt für kleine h

$$E = \frac{1}{h^2}\left(P\frac{l}{h} - 2S_0\right)\cdot\frac{l^2}{q}\cdot \qquad 1.$$

2. Die Ausgangsspannung sei unbekannt. Man beobachtet eine zweite Senkung h' durch die Belastung P' und rechnet

$$E = \frac{P'/h' - P/h}{h'^2 - h^2}\cdot\frac{l^3}{q}\cdot \qquad 2.$$

Für größere Senkungen ist Ausdruck 2 mit $1 + 3(h^2 + h'^2)/(4l^2)$ zu multiplizieren. — P'/h' und P/h sind wenig verschieden, so daß h und h' genau beobachtet werden müssen.

Beweis. λ ergibt sich aus $(l+\lambda)^2 = l^2 + h^2$, wenn λ^2 vernachlässigt wird, $\lambda = \frac{1}{2}h^2/l$. Die Längsspannung S des Drahtes durch P ist $S = P\cdot l/2h$, also $E = (S - S_0)l/(\lambda q) = (Pl/2h - S_0)2l^2/(h^2 q)$, q. e. d. Denselben Ausdruck mit P' und l' zum Eliminieren von S_0 benutzend erhält man Gl. 2.

Elastische Nachwirkung (**55c**). Vermöge dieser wachsen die Deformationen, auch innerhalb der El.-Grenze, mehr oder weniger mit der Zeit. Man pflegt die Belastungen tunlichst kurze Zeit wirken zu lassen; die Temperaturerniedrigung, welche die Ausdehnung begleitet, ist klein und verschwindet in dünnen Drähten schnell. Streng genommen hat man zwei El.-Moduln bei kurzer und bei Dauer-Belastung zu unterscheiden, von denen der letztere selbst bei harten Körpern um mehrere Prozent kleiner sein kann.

Abweichungen von der Proportionalität. Die Dehnung wächst in Wirklichkeit mit der Belastung ein wenig beschleunigt. Bei dem ge-

wöhnlichen Verfahren werden also aus größeren Dehnungen etwas kleinere El.-Moduln abgeleitet als aus geringen; die Unterschiede können Prozente betragen.

Ein Stab habe durch die Belastung p pro Querschnittseinheit bereits eine elastische Dehnung ε pro Längeneinheit erfahren; sein El.-M. in der Nachbarschaft dieses Zustandes heiße E_ε, d. h. es sei $d\varepsilon/dp = 1/E_\varepsilon$. Dann gilt erfahrungsmäßig nahe $E_\varepsilon = E_0 - a\varepsilon$, wo E_0 der El.-M. für kleine Dehnungen und a eine Konstante ist, die vom Material und von dessen Vorbehandlung abhängt. a ist unbedeutend für harte Drähte aus Platin, Silber, Kupfer, Stahl, Messing, Neusilber, groß hingegen z. B. für Gußeisen, Gesteine, Beton. Bei Zug- und Druckbeanspruchung hat a verschiedene Werte.

Aus obiger Formel ergibt sich die Dehnung ε vom natürlichen Zustande an, wenn $\frac{1}{2}a/E_0^2 = A$ bezeichnet wird,

$$\varepsilon = \frac{p}{E_0}(1 + Ap + 2A^2p^2) \quad \text{oder auch nahe} \quad \varepsilon = \frac{p}{E_0}\frac{1}{1-Ap}.$$

Vgl. die Versuche von J. O. Thompson, Wied. Ann. 44, 555. 1891; ferner Bach, l. c. § 4, wo die Formel $\varepsilon = Cp^n$ als Interpolationsformel brauchbar gefunden wird; F. K. u. Grüneisen, Berl. Sitz. Ber. 1901, 1086; Berliner, Ann. d. Ph. 20, 527. 1906, besonders über Gußeisen; F. A. Schulze, Marburger Ber. 1908, 87; Grüneisen, Verh. D. Ph. Ges. 1906, 469. Über verschiedene Formeln: Mehmke, ZS f. Math. u. Phys. 1897.

Weiche Körper von faseriger Struktur, wie Leder oder Seile, folgen anderen Beziehungen zwischen der Belastung und der Dehnung.

53. Elastizitätsmodul aus Längsschwingungen.

In einem Körper von der Dichtigkeit s und dem in CGS-Einheiten ausgedrückten El.-M. E gilt für die in cm/sec gemessene Schallgeschwindigkeit U, d. i. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer elastischen Verdichtungs-(Longitudinal-)Welle, die wichtige einfache Beziehung

$$U^2 = \mathsf{E}/s, \quad \text{also} \quad \mathsf{E} = U^2 s \ \text{Dyne/cm}^2. \qquad 1.$$

Der in kg-Gew./mm² ausgedrückte El.-M. ist (S. 215) $E = \mathsf{E}/98100000$. Wenn man, wie gebräuchlich, die Fortpfl.-Geschw. in m/sec ausdrückt und so mit U_m bezeichnet, so kommt demnach

$$U_m^2 = 9810\, E/s\, (\text{m/sec})^2, \quad \text{also} \quad E = U_m^2 s/9810 \ \text{kg-Gew./mm}^2. \qquad 2.$$

Aus einer Wellenlänge Λ und der Schwingungszahl N folgt die Fortpflanzungs-Geschw. $= \Lambda N$ in den Λ und N zu Grunde gelegten Einheiten.

Schwingt ein an den Enden freier Stab mit einem Knoten oder ein an den Enden geklemmter Draht mit einem Bauch in der Mitte, so ist seine Länge gleich einer halben Wellenlänge. Aus der Schw.-Z. N und der Stablänge l findet sich also $\quad U = 2lN. \qquad$ 3.

Ein in der Mitte gehaltener Stab oder ein an beiden Enden eingeklemmter gespannter Draht von der Länge l cm oder $\frac{1}{100}l = l_m$ Meter werde zum Ansprechen seines longitudinalen

Grundtones gebracht, indem man den Stab am einen freien Ende, den Draht in der Mitte reibt. N sei die Tonhöhe, d. h. Schwingungszahl/sec (vgl. **57** und Tab. 21). Dann ist nach Gl. 1 bis 3

$$\mathsf{E} = (2Nl)^2 s \frac{\text{Dyne}}{\text{cm}^2} \quad \text{oder} \quad E = \frac{(2Nl_m)^2 s}{9810} \frac{\text{kg-Gew.}}{\text{mm}^2}.$$

Die Longitudinalschwingungen erzeugt man durch Reiben mit einem, für Metall oder Holz mit Kolophonium eingeriebenen, für Glas angefeuchteten wollenen Lappen.

Die Tonhöhe wird z. B. durch Vergleichung mit einer bekannten Stimmgabel ermittelt. Das ungenaue Schätzen von Tonintervallen kann man durch die Einführung eines Monochords auf eine Längenvergleichung zurückführen (**57** II, 3). — Es ist oft schwierig, nach dem Gehör die Oktave zu bestimmen, in welcher die sehr hohen Töne liegen; ein Fehler wird jedoch leicht bemerkt, weil er das Resultat mindestens um das vierfache fälscht.

Beispiel. Der Eisendraht von S. 217 gab bei der Länge $l = 136{,}1$ cm den Longitudinalton ais_3, also (Tab. 21) die Schwingungszahl $N = 1843$. Dichtigkeit $s = 7{,}61$; mithin

$$\mathsf{E} = (2 \cdot 1843 \cdot 136{,}1)^2 \cdot 7{,}61 = 1915 \cdot 10^9 \,\text{Dyne/cm}^2$$

$$E = \frac{(2 \cdot 1843 \cdot 1{,}361)^2 \cdot 7{,}61}{9810} = 19520 \frac{\text{kg-Gew.}}{\text{mm}^2}.$$

Mittels der raschen Schwingungen bestimmt fällt ein El.-M. in der Regel ein wenig größer aus als durch Ausdehnung bestimmt, weil es an Zeit fehlt erstens für den Ausgleich der Kompressionswärme und zweitens für die elastische Nachwirkung; vgl. S. 218 u. **55b**.

Über die Bestimmung aus Staubfiguren vgl. **56**.

54. Elastizitätsmodul durch Biegung eines Stabes.

Im folgenden werden die Krümmungshalbmesser groß gegen die Dicke, die Durchbiegungen klein gegen die Länge des Stabes und homogenes und isotropes Material vorausgesetzt.

Ein gerader rechteckiger, am einen Ende horizontal eingeklemmter Stab von der Länge l, der Dicke (Höhe) a und der Breite b, alles in mm gemessen, erfährt durch eine Belastung von P kg am freien Ende eine Senkung (Durchbiegung) h (Beweis s. S. 222)

$$h = \frac{4}{E} \frac{l^3}{a^3 b} P \text{ mm.} \qquad 1.$$

Bei kreisförmigem Querschnitt vom Halbmesser r ist statt $a^3 b$ zu setzen $3r^4\pi$ oder $3q^2/\pi$, wenn $q = r^2\pi$ den Querschnitt bedeutet. — Für einen beliebigen Querschnitt ist maßgebend das „Trägheitsmoment K der Querschnittsfigur, bezogen auf die durch den Schwerpunkt gehende Horizontale“,

wobei man die Figur als eine Platte auffaßt, deren Flächeneinheit die Masseneinheit besitzt; z. B. für das obige Rechteck $K = ab \cdot \frac{1}{12} a^2 = \frac{1}{12} a^3 b$, für den Kreis $K = r^2 \pi \cdot \frac{1}{4} r^2 = \frac{1}{4} r^4 \pi$ (29 I). Vorausgesetzt, daß diese Horizontale eine Hauptaxe des Trägheitsmoments ist, gilt dann

$$h = \frac{1}{3} \frac{1}{E} \frac{l^3}{K} P. \qquad 2.$$

h ist von der Gestalt aus zu rechnen, welche der etwa durch Eigengewicht schon etwas gebogene Stab ohne Belastung hat.

Ein beiderseitig aufgelegter, in der Mitte belasteter Stab erfährt eine 16 mal kleinere Durchbiegung als die obige; vgl. S. 223.

I. Geklemmter Stab. Man klemmt einen horizontalen Stab am einen Ende fest ein und beobachtet die Stellung des freien Endes an einem vertikalen Maßstab (Spiegelteilung dicht dahinter; Kathetometer). Eine Belastung des freien Endes durch P kg bewirke die Senkung (den „Pfeil") h mm. Der rechteckige Querschnitt habe die Höhe a und die Breite b; die freie Länge des Stabes sei $= l$, alles in mm. Dann ist nach Gl. 1 der El.-M.

$$E = 4 \frac{l^3}{a^3 b} \frac{P}{h} \frac{\text{kg-Gew.}}{\text{mm}^2}.$$

Über andere Querschnitte vgl. oben. Über die Bestimmung kleiner Querschnitte durch Wägen s. S. 217.

Man belaste, auch im folgenden, vor der Messung mit dem größten nachher anzuwendenden Gewicht und prüfe in jedem Falle, ob nach Entlasten die frühere Gestalt entsteht.

Eine Schwierigkeit bietet die feste Klemmung.

Dünne Drähte. Die Methode ist leicht auf dünne Drähte anwendbar, die man in einen Schraubstock mit glatten Backen klemmt. Über die Berechnung vgl. den Eingang und über die Bestimmung von r S. 217. Kleine Abweichungen vom kreisförmigen Querschnitt werden durch eine zweite Bestimmung eliminiert, bei der man den Draht um 90° gedreht hat.

II. Aufgelegter Stab. Man legt den Stab mit seinen Enden auf zwei feste Unterlagen lose auf. Der Abstand der letzteren von einander sei gleich l. Eine Belastung P der Stabmitte bringe daselbst die Senkung h hervor (Spiegelmaßstab; Kathetometer), so ist

$$E = \frac{1}{4} \frac{l^3}{a^3 b} \frac{P}{h}.$$

Dünne lange Stäbe biegen sich durch ihr Eigengewicht zu stark. Man kann dies mittels eines über eine (reibungsfreie) Rolle geführten Fadens mit Wagschälchen vermeiden, dessen Belastung die Stabmitte nach oben beansprucht.

Spiegelung. Weit genauer wird statt der Senkung der Mitte die Neigung der Enden gemessen (Kirchhoff, Pscheidl). Die Belastung P der Mitte bewirke im Falle II den Neigungswinkel α eines Endquerschnittes, so ist

$$E = \frac{3}{4}\frac{l^2}{a^3 b}\frac{P}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

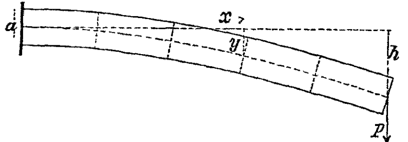
Zur Messung von α verbindet man mit dem Ende einen kleinen vertikalen Spiegel und beobachtet dessen Drehung mit Fernrohr und vertikaler Skale (25). Besser ist die Beobachtung beider Enden und die Mittelnahme. — Statt dessen kann man 2 Spiegel an beiden Enden gegeneinander richten, ein wenig geneigt, so daß das Licht der Skale von dem einen zum anderen Spiegel und von da ins Fernrohr geworfen wird. Fernrohr und Skale stehen jetzt einander gegenüber. A sei der Abstand der Skale von ihrem Spiegel, d der gegenseitige Abstand der Spiegel, beide in Skalenteilen gemessen. n bedeute den beobachteten Ausschlag. Dann kann hinreichend genau gesetzt werden $\operatorname{tg}\alpha = n/(4A + 2d)$. — A. König, Wied. Ann. 28, 108. 1886; über Korrektionen wegen schiefer Spiegelung vgl. Winkelmann u. Schott, ib. 51, 697. 1894. — Eine andere Spiegelmethode für kurze Stäbchen bei Voigt, Wied. Ann. 31, 474. 1887.

Alle Formeln setzen wie gesagt kleine Krümmungen voraus. Starke Krümmung ist wegen der Verschiebung der Enden auf ihren Lagern auch mit Reibung verbunden.

Dickere Stäbe. Verschwindet a^2 nicht gegen l^2, so kommt zu den nach den obigen Formeln berechneten E der Korrektionsfaktor $1 + 3a^2/l^2$. Vgl. Koch, Wied. Ann. 5, 353. 1878. Siehe ebenda die Anwendung der Fizeau'schen Methode (44 II) auf Biegungsmessung. Ein „Elasmometer" ähnlicher Art bei Tutton, Ph. Trans. (A) 202, 143. 1903.

Über die Theorie dicker Stäbe (de Saint-Venant) s. z. B. Love, Theory of Elast. 2. Aufl. 1906. § 227ff; Übers. von Timpe, Leipz. 1907, S. 379.

Ableitungen für rechteckigen Querschnitt. Bei der Krümmung werden die oberen Fasern gedehnt, die unteren verkürzt; die mittelste Schicht behält ihre Länge. Es seien, vom Befestigungspunkte an gerechnet, x die horizontale, y die vertikale Koordinate eines Punktes dieser „neutralen" Schicht, so wird die Krümmung des Stabes an irgend einem Punkte durch d^2y/dx^2 dargestellt, da die Neigung klein vorausgesetzt wird. Es sei nun ε der Abstand einer Faser von der neutralen Schicht,



nach oben positiv, nach unten negativ gerechnet, so ist ein Stückchen der Faser im Verhältnis $\varepsilon \cdot \mathrm{d}^2 y/\mathrm{d}x^2$ zu seiner ursprünglichen Länge ausgedehnt (oder zusammengedrückt). Eine Schicht von der Breite b und der Dicke $\mathrm{d}\varepsilon$ sucht sich also mit der Kraft $E\varepsilon b \cdot \mathrm{d}\varepsilon \cdot \mathrm{d}^2 y/\mathrm{d}x^2$ zusammenzuziehen, also bilden diese Kräfte in den Schichten vom Abstand $+\varepsilon$ und $-\varepsilon$ zusammen ein Drehmoment $2Eb\varepsilon^2 \cdot \mathrm{d}\varepsilon \cdot \mathrm{d}^2 y/\mathrm{d}x^2$. Das in einem ganzen Querschnitt von der Höhe a und der Breite b entwickelte Drehmoment ist also

$$2Eb\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\int_0^{a/2}\varepsilon^2 \mathrm{d}\varepsilon = Eb\frac{a^3}{12}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}.$$

Dieses elastische Drehmoment muß dem von dem angehängten Gewicht an diesem Querschnitt ausgeübten Moment $P(l-x)$ gleich sein, also

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{12}{E}\frac{P}{a^3 b}(l-x),$$

woraus $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{12}{E}\frac{P}{a^3 b}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) \quad \text{und} \quad y = \frac{12}{E}\frac{P}{a^3 b}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right).$$

Am Ende x (merklich $= l$) ist hiernach die Neigung $\operatorname{tg}\varphi$ und die Senkung h

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_l = \operatorname{tg}\varphi = \frac{6}{E}\frac{Pl^2}{a^3 b}, \qquad y_l = h = \frac{4}{E}\frac{Pl^3}{a^3 b}$$

für den einseitig geklemmten Stab.

Da ferner ein Stab, wenn er an den Enden lose aufliegt, angesehen werden kann, wie wenn er an jedem Ende durch die Kraft $\frac{1}{2}P$ hinaufgezogen würde, in der Mitte aber geklemmt wäre, also die wirksame Länge $\frac{1}{2}l$ betrüge, so wird die Neigung $\operatorname{tg}\varphi$ 8mal, die Senkung 16mal kleiner als obiges $\operatorname{tg}\varphi$ und h.

54a. Elastizitätsmodul aus Querschwingungen.

Schwingungszahlen N des Grundtons und der Obertöne cylindrischer Stäbe.

E bedeute den El.-M. in CGS-Einheiten; vgl. S. 214. Alle Dimensionen seien in cm gemessen. l ist die Länge, s die Dichte, m ist ein von der Nummer des Tones abhängiger Zahlenkoeffizient; s. unten.

a) Kreisquerschnitt vom Durchmesser d $\quad N = \frac{1}{4}\frac{d}{l^2}\frac{m^2}{2\pi}\sqrt{\frac{\mathsf{E}}{s}}/\text{sec.}$

b) Rechteckiger Querschnitt mit der, zur Schwingungsrichtung parallelen Seite a $\quad N = \frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{a}{l^2}\frac{m^2}{2\pi}\sqrt{\frac{\mathsf{E}}{s}}/\text{sec.}$

Für einen freien, bez. einen einseitig geklemmten Stab gilt:

	Schwing.-Form	m	Knotenabstände vom Ende
Grundton		4,730	0,2242 l
2ter Ton		7,853	$\frac{1}{2}l$ und 0,1321 l
3ter "		11,00	0,3558 l und 0,0944 l
Grundton		1,875	
2ter Ton		4,694	0,2261 l
3ter "		7,855	0,4999 l und 0,1321 l.

Weiterhin beträgt m für den Ton Nr. k: frei $(k + \frac{1}{2})\pi$, geklemmt $(k - \frac{1}{2})\pi$.

Über Theorie und frühere Literatur (u. A. Strehlke, Lissajous, A. Seebeck) vgl. Rayleigh, Theory of Sound, deutsch von Neesen, § 160 ff. Ferner Aufsätze von Morrow im Phil. Mag. seit 1905.

Nach dem vorigen läßt sich, homogenes und isotropes Material vorausgesetzt, der El.-M. aus den Eigenschwingungszahlen eines Stabes, also, wenn diese innerhalb der musikalischen Skale liegen, aus den Tonhöhen (57; Tab. 21) berechnen. Man erregt die Schwingungen z. B. durch Anschlagen mit einem weichen Hammer oder durch Anstreichen. Beiderseits freie Stäbe werden an zwei Knoten in Fadenschlingen aufgehängt oder auf Kautschukfäden gelegt; an einseitig freien hält man die Stelle des dem Ende nächstliegenden beabsichtigten Knotens mit einer Spitze fest. — Die Knotenlinien können mit Streusand sichtbar gemacht werden.

Sind die Querdimensionen nicht klein gegen die Länge, so bedürfen die Formeln einer Korrektion wegen der Rotationsenergie der Querschnitte. Vgl. Rayleigh, l. c. § 186. — Ausführungen der Methode bei Strehlke, Pogg. Ann. 27, 505 u. 28, 512, 1833; Wertheim, ib. Ergbd. II, 1. 1848; F. A. Schulze (kleine Stäbe), Ann. d. Ph. 13, 583. 1904; Grüneisen l. c. (S. 217). — Über langsame Schw. dünner Stäbchen in Verbindung mit einer schweren Scheibe Voigt, Wied. Ann. 48, 674. 1893. — Weiche Stäbe (z. B. Wachs); auf solche überträgt man Transv.-Schw. eines harten Stabes mittels eines Stegs und mißt die Knotenabstände mit Sand. Vgl. Warburg, Pogg. Ann. 136, 285. 1869.

Membrane und Platten. Über Schwing.-Formen und Schwing.-Zahlen vgl. u. a. Chladni, Akustik, Leipz. 1830; Rayleigh l. c. § 193 u. 214 ff. Ferner Platten: Kirchhoff, Pogg. Ann. 81, 258. 1850, ausführlich Ges. Abh. S. 237; Elsas, Wied. Ann. 19, 474. 1883; Melde, ib. 66, 767. 1898; F. A. Schulze, Ann. d. Ph. 24, 785. 1907. — Membrane: Antolik, Verh. Verein f. Natur- u. Heilkunde 14, 1, Pressb. 1903.

55. Torsionsmodul.

Der T.-M. werde, im CGS-System, d. h. in Dyne/cm² (vgl. Anh. 7 u. 13) ausgedrückt, mit Φ bezeichnet; in der technischen Einheit kg-Gew./mm² gemessen, durch F. Es ist (vgl. S. 215) $F = \frac{1}{98100000}\Phi$. Wir rechnen im allgemeinen mit Φ, weil die Beziehungen so am übersichtlichsten werden.

An einem einseitig geklemmten kreiscylindrischen Stabe oder Drahte von l cm Länge und r cm Halbmesser sei das freie Ende vermöge eines Drehmomentes $\mathfrak{D}$ Dyne $\times$ cm verdreht um den in absolutem Maße (25; Anh. Nr. 3) gemessenen Winkel α; $\alpha \times 57{,}30$ gibt also Bogengrade. Dann ist

$$\mathfrak{D} = \Phi \frac{\alpha}{l} \frac{\pi}{2} r^4 \quad \text{oder} \quad \Phi = \frac{1}{\alpha} \frac{2}{\pi} \frac{l}{r^4} \mathfrak{D}. \qquad 1.$$

Man setzt voraus, daß $r\alpha/l$ klein bleibt; nur an dünnen langen Drähten darf also die Endverdrehung einen beträchtlichen Wert erreichen. Beweis s. am Schluß. — Für F gelten dieselben Gleichungen, wenn l und r in mm und $\mathfrak{D}$ in kg-Gew. $\times$ mm gemessen sind.

I. Bestimmung durch Verdrehungen.

Ein Drehmoment von P kg-Gew. am Hebelarm h mm bewirke am einen Ende eines Kreiscylinders (Drahtes) von l mm Länge und r mm Radius einen Drehungswinkel von γ Bogengraden; dann ist nach obigem

$$F = \frac{57{,}3}{\gamma}\,\frac{2}{\pi}\,\frac{l}{r^4}\,hP\ \frac{\text{kg-Gew.}}{\text{mm}^2} \quad \text{und} \quad \Phi = 98100000\,F\ \frac{\text{Dyne}}{\text{cm}^2}.$$

Über die Ausführung s. z. B. Slotte, Act. Fenn. 35, Nr. 8, Helsingf. 1908.

II. Aus langsamen Schwingungen (Coulomb 1784).

An dem Drahte (l, r) hänge eine Masse vom Trägh.-Mom. K cm² gr. Nach Gl. 1 ist seine Direktionskraft (Anh. 11a) $D = \frac{\mathfrak{D}}{\alpha} = \frac{\pi}{2}\frac{r^4}{l}\Phi$, folglich gilt für die Torsions-Schw.-D. t dieser Masse in sec (vgl. Anh. 12) die Gl.

$$t^2 = \pi^2 \frac{K}{D} = 2\pi \frac{l}{r^4}\frac{K}{\Phi}. \qquad 2.$$

Man belastet (Fig.) einen Draht von l cm Länge und r cm Halbmesser (**21**, 4 u. S. 217) mit einer geeignet gestalteten Masse vom Trägh.-Mom. (**29** I) K cm² gr und beobachtet (**28**) die Schw.-D. t sec. Nach Gl. 2 ist dann der T.-M.

$$\Phi = 2\pi \frac{l}{r^4}\frac{K}{t^2}\ \frac{\text{Dyne}}{\text{cm}^2}$$

und

$$F = \frac{1}{98100000}\,\Phi\ \frac{\text{kg-Gew.}}{\text{mm}^2}. \qquad 3.$$

Ein Cylinder (Kreisscheibe; Fig.) vom Radius R und der Masse M hat das auf die Axe bezogene Tr.-Mom. $\frac{1}{2}R^2M$.

Man kann auch die Schw.-D. t_0 einer Masse von unbekanntem Tr.-Mom. und, nach Zufügung eines bekannten Tr.-Mom. K_1, die gemeinschaftliche Schw.-D. t_1 beobachten und in die Formel statt K/t^2 einsetzen $K_1/(t_1^2 - t_0^2)$. Vgl. **29** II.

Über die Anwendung auf dünne Stäbchen von rechteckigem Querschnitt (vgl. das folgende) s. Voigt, Wied. Ann. 48, 664. 1893.

Andere Querschnitte; St. Venant 1855. (Die Theorie anderer als kreisförmiger Querschnitte verwickelt sich dadurch, daß die Querschnittsgestalt sich durch das Drillen ändert.) Schreiben wir für einen Stab all-

gemein das Drehmoment $\mathfrak{D} = \Phi\alpha/l \cdot N$, so ist der Faktor N:
Ellipse von den Ganzaxen a und b $N = \frac{1}{16}\pi a^3 b^3/(a^2 + b^2)$.
Schmales Rechteck von den Seiten a und b; solange $b < \frac{1}{3}a$, gilt nahe $N = \frac{1}{3}ab^3(1 - 0{,}630\, b/a)$; mithin Grenzwert für dünnes Band $N = \frac{1}{3}ab^3$. Für dickere Rechtecke anstelle von 0,630 eine von St. Venant in Tafeln berechnete Funktion von b/a.

Man kann N auch aus dem Flächeninhalt q und dem auf die Stabaxe bezogenen Trägheitsmoment K der Querschnittsfigur (vgl. auch **54** im Eingang) berechnen, nämlich $N = \varkappa \cdot q^4/K$, wo der Faktor $\varkappa$ für Ellipse [1] und Kreis $\varkappa = 1/4\pi^2 = 0{,}0253$ ist. Für Rechtecke vom Seitenverhältnis 1 (Quadrat) 2 3 4
gilt $\varkappa = 0{,}0234$ 0,0238 0,0249 0,0260.

St. Venant, Mém. sav. étr. XIV, 233. Paris 1856; C. R. 88, 142. 1879; Love-Timpe § 225; Auerbach, Winkelm. Hdb. 2. Aufl. I, 664. 1908.

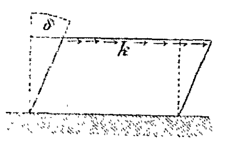
III. Aus Eigenschwingungen kreiscylindrischer Stäbe.

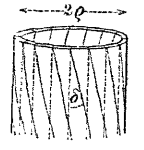
In einem Kreiscylinder (Dichte $= s$) pflanzt sich eine Torsionsverschiebung fort mit der Geschw. $U = \sqrt{\Phi/s}$ cm/sec. 4.

Man klemme den Stab (Länge $= l$ cm), in der Mitte von einem Drahtringe umschlossen, in den Schraubstock und errege mittels eines aufgeschlitzten, mit Kolophonium eingeriebenen Korkringes unter Fingerdruck den Torsionsgrundton von der Wellenlänge $2l$. Seine Schwingungszahl/sec sei $= N$. Dann gilt also (vgl. auch **53**) $N = \sqrt{\Phi/s}/2l$ oder $\Phi = 4N^2 l^2 s$ CGS. 5.

Schneebeli, Pogg. Ann. 140, 608. 1870; Grüneisen, Ann. d. Ph. 25, 827. 1908. Über rechteckige Stäbe F. A. Schulze ib. 13, 583. 1904.

Erläuterungen. Torsions- oder Gleit- oder Scheerungs- oder Schiebungs-Modul oder zweiter El.-M. Eine Platte von der Flächeneinheit sei in ihrer natürlichen Gestalt rechteckig. Die Grundfläche werde befestigt; an der gegenüberliegenden Ebene wirke eine, gleichförmig über diese ganze Fläche verteilte, der festen Fläche parallele Gesamtkraft von k Dynen. Dadurch werden die Plattenschichten aneinander verschoben und die vorher normale Linie wird jetzt mit der Normalen den kleinen „Scheerungswinkel" δ bilden. Dann ist Φ das Verhältnis der Kraft k zu diesem Winkel, also $k = \Phi\delta$.





Torsions-Drehmoment eines Kreiscylinders. Man denke sich diesen in dünne konzentrische Röhren zerlegt, von denen eine den inneren und äußeren Halbmesser ϱ und $\varrho + d\varrho$ habe. Auf dem Umfange dieser Röhre sei eine vertikale Gerade gezogen. Drehen wir nun den untersten Quer-

1) Für eine Ellipse a, b ist $q = \frac{1}{4}\pi ab$ und $K = \frac{1}{64}\pi ab(a^2 + b^2)$.

schnitt um den Winkel α, so wird diese Linie in eine Schraubenlinie verwandelt, welche gegen die Vertikale die Neigung $\alpha\varrho/l$ hat. Dies ist also unser Scheerungswinkel δ der Schichten gegeneinander. Somit wird die Torsionselastizität den untersten Querschnitt $2\pi\varrho\,d\varrho$ der Röhre mit einer Kraftsumme $\Phi\cdot 2\pi\varrho\,d\varrho\cdot\alpha\varrho/l$ in seine frühere Lage zurückzudrehen suchen. Da ϱ der Halbmesser der Röhre, so gibt diese Kraft das Drehmoment $2\pi\Phi\varrho^3 d\varrho\cdot\alpha/l$.

Ein solches Moment erfährt aber jede Röhre in ihrem Endquerschnitt, so daß das über die ganze Endfläche des Drahtes integrierte (Tab. 50a) Drehmoment $\mathfrak{D}$, in Übereinstimmung mit Gl. 1, S. 224, beträgt:

$$\mathfrak{D} = 2\pi\Phi\frac{\alpha}{l}\int_0^r \varrho^3 d\varrho = \Phi\frac{\pi r^4}{2}\frac{\alpha}{l}.$$

Die beträchtlichen Abweichungen, denen die hierin ausgedrückte Abhängigkeit vom Durchmesser bei dünneren Drähten unterliegt, beweisen einen Mangel an Homogenität. Vgl. Baumeister, Wied. Ann. 18, 578. 1883.

Über das Verhältnis des Torsions- zum Dehnungsmodul s. unten.

55a. Poisson'sche Konstante μ (Querkontraktion).

Die elastische Dehnung durch Zug ist in der darauf senkrechten Richtung von einer Kontraktion begleitet, die jener Dehnung proportional ist. Bedeutet an einem Stabe λ/l die relative Dehnung und δ/d die damit verbundene relative Verkürzung des Durchmessers d, so ist also $\frac{\delta}{d}:\frac{\lambda}{l} = \mu$ für einen bestimmten Stoff eine Konstante (Poisson); erfahrungsgemäß liegt sie zwischen 0,2 und 0,5.

Volumänderung φ durch elastische Dehnung. Das Volumen v eines Stabes ist proportional ld^2, die Änderungen φ, λ und $-\delta$ stehen also, vorausgesetzt, daß sie klein sind (S. 6), in der Beziehung (vgl. auch **55b**)

$$\frac{\varphi}{v} = \frac{\lambda}{l} - 2\frac{\delta}{d} = \frac{\lambda}{l}(1 - 2\mu).$$

Da μ zwischen $\frac{1}{2}$ und 0 liegt, so ist φ/v jedenfalls positiv, aber $< \lambda/l$.

Verhältnis der Elast.-Moduln der Dehnung und der Torsion. Nach der Theorie (Poisson) ist $E:F$ oder $\mathsf{E}:\Phi = 2(1+\mu)$, wenn μ das Verhältnis der Querkontraktion zur Längenausdehnung bedeutet. Da nun $0 < \mu < \frac{1}{2}$ ist, so muß $\frac{1}{2}E > F > \frac{1}{3}E$ sein; für den Mittelwert $\mu = \frac{1}{4}$ gilt $F = \frac{2}{5}E$. Vgl. z. B. Clebsch, Theorie der Elast., § 3 u. 92.

I. Direkte Methode.

Man mißt gleichzeitig Dehnung und Querkontraktion. Dies theoretisch einwandfreie Verfahren erfordert wegen der Kleinheit der zu messenden Änderungen meist empfindliche Spiegel- oder Interferenzapparate.

Vgl. u. A. Röntgen, Pogg. Ann. 159, 601. 1876; Bauschinger, Der Civilingenieur 25, 81. 1879; Stromeyer, Proc. R. Soc. 55, 373. 1894; Benton,

Ann. d. Ph. 3, 471. 1900; Morrow, Phil. Mag. (6) 6, 417. 1903; Grüneisen, ZS f. Instr. 1908, 89; Ann. d. Ph. 25, 829. 1908.

II. Aus dem Verhältnis der Elastizitätsmoduln der Dehnung E und der Torsion F.

Nach dem oben erwähnten Satze $F = \frac{1}{2}E/(1+\mu)$ ist

$$\mu = \tfrac{1}{2}(E/F) - 1.$$

Inhomogenität oder Heterotropie bilden eine schwer zu vermeidende Fehlerquelle, die besonders an gezogenem Material beträchtlich auftritt.

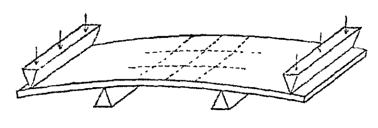
Siehe auch Voigt, Wied. Ann. 48, 674. 1893; Sommerfeld, Wüllner-Festschrift, 162. 1905, gleichzeitige Dehnungs- und Drehungsschwingungen, deren Verhältnis aus Lissajous'schen Figuren beurteilt wird.

III. Aus der Volumänderung bei einseitigem Zug.

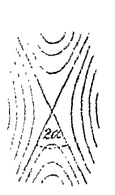
Vgl. hierüber **55b**.

IV. Aus der Oberflächengestalt eines gebogenen Stabes (Cornu).

Biegt man eine ebene Platte so, wie in der Figur, so treten zugleich transversale Kräfte auf, und zwar in der oberen, gedehnten, (Fig. S. 222) Hälfte als Zug, in der unteren, verkürzten, als Druck; beide zusammen bewirken eine sattelförmige Oberflächengestalt. Der Hauptkrümmungshalbmesser der primären Biegung geteilt durch den der Querbiegung gibt direkt die Größe μ.



Die obere Fläche sei eben poliert. Man bedeckt sie lose mit einer ebenen Glasplatte. Durch die Gestaltsänderung entstehen zwischen den beiden Platten Interferenzstreifen (**65** V), die zwei Systemen von Hyperbeln mit gemeinsamen Asymptoten angehören. Bezeichnet 2α den nach der Querrichtung der Platte offenen Winkel der Asymptoten, welcher bei senkrechter Beobachtung erscheint, so ist



$$\mu = \mathrm{tg}^2 \alpha.$$

Cornu, C. R. 69, 333. 1869; über die zur Ausführung dienende Anordnung und die Winkelmessung mit dem Dove'schen Reflexionsprisma vgl. Straubel, Wied. Ann. 68, 369. 1899.

55b. Volumelastizitätsmodul. Kompressibilität.

Über Manometer und Druckpumpen s. **36**.

Druckwirkungen auf feste Körper. Die auf ein Flächenelement wirkende Druckkraft fällt hier, auch im Gleichgewichtszustande, im allgemeinen nicht in die Normale der Fläche; man unterscheidet normale

und tangentiale Druckkomponenten. Allseitig gleicher normaler äußerer Druck äußert sich jedoch in homogenem isotropem Material nur in normalen Komponenten; die Gestalt eines Körpers bleibt bei der Zusammendrückung eine ähnliche.

Bei einem nicht homogenen oder einem heterotropen (kristallinischen, oder inneren Spannungen unterworfenen) Körper ist aber die Volumänderung auch unter allseitigem Druck von einer Gestaltsänderung begleitet. Wir schließen solches Material im folgenden aus, bemerken jedoch, daß gerade bei nicht kristallisierten Körpern die Homogenität usw. selten und von vorn herein schwer zu verbürgen ist, so daß sie im allgemeinen erst durch die Übereinstimmung der nach verschiedenen Methoden gefundenen Konstanten festgestellt wird. Bisher läßt diese Übereinstimmung noch viel zu wünschen.

Zusammendrückbarkeit oder Kompressibilität ($\varkappa$) eines festen oder flüssigen Körpers heißt seine relative Volumverminderung, wenn der allseitige äußere Druck um Eins zunimmt. $1/\varkappa = M$ ist der Volum-El.-Modul. Verkleinert sich durch eine Druckzunahme p das Volumen v um φ, so gilt in den Grenzen der Proportionalität

$$\varphi/v = \varkappa p = p/M. \qquad 1.$$

I. Bestimmung der Volumelastizität fester Körper.

Im Anschluß an die anderen elastischen Vorgänge werde p entweder in kg-Gew./mm²(≐ 96,8 Atm) oder in der CGS-Einheit = Dyne/cm² gemessen. M drückt sich dann in denselben Einheiten aus; sein Zahlenwert ist, wie früher (S. 215), im CGS-System $981 \cdot 10^5$mal größer als im anderen.

Nach der Theorie bestehen zwischen den Moduln E der Dehnung, F der Torsion, μ der Querkontraktion (**52** bis **55a**) und M die Beziehungen

$$\text{I.}\quad \frac{1}{M} = \frac{9}{E} - \frac{3}{F}; \qquad \text{II.}\quad M = \tfrac{1}{3}\frac{E}{1-2\mu}. \qquad 2.$$

Zwei von den Größen genügen also zur Charakterisierung des Körpers, aber nur dann, wenn Isotropie verbürgt ist.

1. Aus der Volumvergrößerung eines longitudinal gedehnten Stabes oder Rohres; Cagniard Latour 1827.

Die Belastung der Querschnittseinheit betrage p. Ihr entspricht, wenn E den El.-M. der Dehnung bedeutet, die relative Verlängerung $\lambda/l = p/E$. Hiermit ist, nach der Definition von μ, eine rel. Volumvermehrung (**55a** im Eingang) $\varphi/v = (1-2\mu)p/E$ verbunden, also ist $E/(1-2\mu) = pv/\varphi$.

Aus Gl. 2 II folgt andrerseits $E/(1-2\mu) = 3M$; demnach gilt für die Volumvermehrung φ, welche dem auf die Querschnittseinheit wirkenden Zuge p entspricht,

$$\frac{\varphi}{v} = \tfrac{1}{3}\frac{1}{M}p, \quad \text{woraus} \quad M = \tfrac{1}{3}\frac{v}{\varphi}p. \qquad 3.$$

Die Volumänderung wurde aus der Steighöhe einer Flüssigkeit ermittelt.

Dieselben Formeln gelten für das Innenvolum gedehnter kreiscylindrischer Röhren; bei der Anwendung auf Messungen entstehen Schwierigkeiten aus der Definition der Rohrenden und dem notwendigen Ausschluß von Biegungen. — Vgl. Amagat, Ann. chim. phys. (6) 22, 95. 1891.

2. Aus der Verminderung des Innenvolumens eines geschlossenen Rohres oder einer Hohlkugel bei äußerer Druckerhöhung p; Regnault 1847.

Es gilt z. B. für eine Hohlkugel vom inneren und äußeren Halbmesser r_1 und r_2

$$\frac{\varphi}{v} = \frac{9}{2} \frac{r_2^3}{r_2^3 - r_1^3} \frac{1-\mu}{E} p. \qquad 4.$$

Wenn E anderweitig bestimmt ist, so berechnet sich hieraus μ, und dann M nach Gl. 2 II. Für ein Rohr gelten entsprechende Beziehungen.

Die Volumänderung wird aus der Steighöhe einer Flüssigkeitsfüllung in einer angesetzten Kapillare beurteilt.

Regnault, Mém. de l'acad. des sciences 21, 429. 1847.

Das Verfahren läßt sich, umgekehrt, zur Druckmessung gebrauchen.

3. Aus gleichzeitiger Messung der Verlängerung und Querkontraktion bei Zug.

Nach Gl. 2 II. — S. hierüber **55a**, I.

4. Aus der Verkürzung eines Stabes durch allseitigen Druck.

Schwierigkeiten der Messung liegen in der Längenbestimmung im Innern eines auf Hunderte von Atm. zu pumpenden Druckcylinders.

Der Stab steht auf dem Boden eines aufrecht gestellten Druckcylinders. Die Berührung des oberen Endes mit einer, von außen mikrometrisch verstellbaren Platinspitze wird durch den Schluß eines elektrischen Stromes erkannt. Verkürzt sich die Stablänge l um λ, wenn der Druck um p vermehrt wird, so gilt

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{1}{3} \frac{1}{M} p, \quad \text{also} \quad M = \frac{1}{3} \frac{l}{\lambda} p. \qquad 5.$$

Als erhebliche Korrektion tritt die von λ abzuziehende Eigenverlängerung des Cylinders durch den Innendruck herein; vgl. Nr. 5.

Amagat l. c.; Richards, ZS f. ph. Ch. 61, 171. 1907.

Hat der Körper Drahtform, so kann man den Druckbehälter in Glaskapillaren endigen lassen, durch welche hindurch die

Verkürzung mikroskopisch gemessen wird. Anisotropie und Krümmungen sind als Fehlerquellen zu beachten.

Vgl. Buchanan, Proc. R. S. 73, 296. 1904.

5. Aus der Verlängerung eines cylindrischen, auch an den Enden geschlossenen Rohres bei Innendruckerhöhung.

Die Rohrlänge sei $= l$, der innere und äußere Halbmesser $= r_1$ und r_2; der Innendruck p bewirke die, ähnlich wie bei der Wärmeausdehnung (**44**) zu messende Verlängerung λ. Dann gilt für ein relativ langes Rohr nahe

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{1}{3}\frac{1}{M}\frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}p \quad \text{oder} \quad M = \frac{1}{3}\frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\frac{l}{\lambda}p. \qquad 6.$$

Mallock, Proc. R. S. 74, 50. 1905. Hierzu die Bemerkungen und Verallgemeinerungen von Chree, ib. 74, 518. — Zur Theorie vgl. Lamé, Leç. s. la théor. de l'élast., Paris 1852, 188; Love-Timpe, § 100.

II. Kompressibilität von Flüssigkeiten; Canton, Oersted u. A., seit 1885 Amagat bei hohen Drucken.

Man komprimiert in einem „Piezometer", d. i. in einer Glasbirne mit angeblasener Kapillare (**23**, **24**), durch einen, sowohl auf den Flüssigkeitsmeniskus wie auf die Außenwand wirkenden Druck. Zu der so beobachteten „scheinbaren Kompr." ist die Kompr. des Piezometergefäßes zu addieren, die nach einer der obigen Methoden zu bestimmen ist. — Es gilt der Satz, daß das Außen- und das Innenvolumen eines isotropen Hohlgefäßes, welches von außen und innen gleich stark gedrückt wird, beide ebenso verkleinert werden, wie gleich große massive Körper durch Außendruck.

Man kann die Veränderungen des Piezometers auch empirisch dadurch bestimmen oder eliminieren, daß man in ihm eine Flüssigkeit bekannter Kompr. (Wasser, Hg) beobachtet. — In jedem Falle die Kompr.-Wärme beachten! Vgl. unten.

Bei sehr hohen Drucken in undurchsichtigen Gefäßen dient die Methode des elektrischen Kontakts (I 4 und S. 134).

Vgl. u. A. Röntgen u. Schneider, Wied. Ann. 29, 165. 1886; 31, 1000. 1887; besonders Amagat, Ann. chim. phys. 29, 68 u. 505. 1893, Zusammenstellung der Meßmethoden und des Volumganges von Gasen und Flüssigkeiten bis 3000 At. und teilweise bis 260°; Rapp. au Congrès I, 551. 1900.

Auch feste Körper können, mit einer bekannten Flüssigkeit zusammen, im Piezometer in leicht ersichtlicher Weise untersucht werden.

Siehe z. B. Röntgen u. Schneider, Wied. Ann. 34, 531. 1888. — Richards, Publ. Carnegie Inst. Nr. 76 u. ZS f. phys. Ch. 61, S. 77, 171, 183. 1907.

Veränderlichkeit des Kompr.-Koeffizienten. Mit wachsendem Druck nimmt die Volumverminderung verzögert zu, d. h. $\varkappa$ nimmt ab. Mit wachsender Temperatur wächst $\varkappa$, und zwar teilweise beträchtlich.

Kompressionswärme; besonders unter I 2, 4, 5 und II zu berücksichtigen. — Bei rascher, „adiabatischer" Kompr. gilt für kleine Druckänderungen Δp, wenn α der kubische Temp.-Ausd.-Koeff., s die Dichte, c_p die sp. Wärme (Tab. 2, 4, 11, 12), T die abs. Temp. ist, $\frac{\Delta T}{T} = \frac{\alpha}{s c_p} \Delta p$.

Vgl. z. B. Creelman u. Crocket, Proc. R. Soc. Edinb. 13, 311. 1885; Burton u. Marshall, Proc. R. S. 50, 130. 1891; Röntgen, Wied. Ann. 45, 560. 1892; Galopin, Arch. sc. phys. (3) 31, 382. 1894.

55c. Elastische Nachwirkung (W. Weber 1841).

Elastische Deformationen vollziehen sich nur zu einem Teile sofort; ein Rest, die „Nachwirkung" folgt langsamer. Bei Platin, Stahl, Quarz (wie es scheint, bei Kristallen allgemein) ist er sehr klein, erreicht aber bei manchen Metallen und Gläsern wohl 5%, bei organischen Körpern, wie Kokon oder Kautschuk 30%, ja in niederer Temperatur die größere Hälfte der Deformation. — Nachwirkungen können lange Zeiten, selbst Monate dauern.

Nachwirkungen zeigen sich auch an anderen Molekularvorgängen, wie an der Wärmeausdehnung, dem elektrischen Leitungswiderstand, bei der Magnetisierung und insbesondere auch als elektrischer Rückstand.

Von diesen mit der Zeit verschwindenden Abständen von einem neuen elastischen Gleichgewicht sind die dauernden Gestaltsänderungen zu unterscheiden, die einer Überschreitung der Elastizitätsgrenze usw. folgen. (Über solche Erscheinungen an Gußeisen s. z. B. Berliner, Ann. d. Ph. 20, 527. 1906). Die Trennung wird oft durch die Übereinanderlagerung beider Erscheinungen erschwert, und auch in der Theorie vermischt man sie häufig; die Trennung ist aber für die Erkenntnis der beiden Vorgänge unerläßlich.

Am leichtesten zu beobachten ist die Nachwirkung nach Deformationen, während sich die natürliche Gestalt eines Körpers, der ausgedehnt, gebogen, gedrillt gewesen war, mit der Zeit wieder herstellt.

Es sei s die Deformation, welche zur Zeit t nach dem Aufhören der die Gestalt ändernden Kräfte noch besteht. Die Annäherung an die natürliche Gestalt vollzieht sich mit einer Geschwindigkeit $-\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$, welche, falls die primäre Deformation kurz gewirkt hatte, dem Gesetz folgt (F. K.)

$$-\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = a\frac{s}{t}, \quad \text{also } s = \frac{c}{t^a}. \qquad \text{I.}$$

Nur für die ersten, der Beobachtung nicht zugänglichen Bruchteile von Sekunden gilt die Formel nicht. a, welches die Geschwindigkeit bedingt, mit der die Nachwirkung verschwindet, ist für dieselbe Art von Deformationen an demselben Körper nahe konstant; es wurde, t nach Minuten

gerechnet, an verschiedenen Körpern bei verschiedenen Vorgängen, zwischen $\frac{1}{6}$ und 1 gefunden. Die Konstante c, d. h. die zur Zeit 1 nach Aufhören der deformierenden Kräfte noch vorhandene Nachwirkung, ist cet. par. der Größe der vorangegangenen Deformation nahe proportional und wächst mit deren Dauer.

Nach längerer Dauer der primären Deformation gilt der allgemeinere Ausdruck

$$-\frac{ds}{dt} = a\frac{s}{t^n}, \quad \text{also} \quad s = C \cdot e^{-pt^m}, \qquad \text{II.}$$

worin $p = a/(1-n)$ und $m = 1 - n$ ist. m wächst mit der Dauer der vorangegangenen Gestaltsänderung von sehr kleinen Werten allmählich an, aber erfahrungsmäßig nicht über $\frac{1}{3}$; n liegt zwischen 1 und $\frac{2}{3}$.

Nach denselben Ausdrücken vollzieht sich die Annäherung an einen neuen Endzustand, der einer plötzlich einsetzenden konstanten Kraft oder Deformation entspricht.

F. K., Pogg. Ann. 119, 337. 1862; 128, 1. 1866; 158, 337. 1876.

Genähert lassen sich auch, z. B. an Glas, manche Nachwirkungen, die einer Deformation S von der Dauer T folgen, zur Zeit t nach dem Aufhören, durch $AS \cdot \lg[(T+t)/t]$ ausdrücken (Boltzmann). Falls umgekehrt zur Zeit Null eine konstant bleibende Deformation plötzlich eintritt, so gilt für die elastische Kraft zur Zeit t genähert der Ausdruck $P(1 - A\lg t)$; Die Konstante A hat in beiden Ausdrücken für denselben Körper und für die gleiche Art von Deformation denselben Wert.

Boltzmann, Pogg. Ann. Erg. VII, 624. 1876. — Weiteres Material, Theorien, umfangreiche Literatur bei Auerbach, Winkelmanns Handbuch, 2. Aufl. I, 796. 1908.

Um die Größe und Hartnäckigkeit der Nachwirkung zu bestimmen, lasse man etwa eine Deformation S 1^{min} lang bestehen und beobachte dann die Nachwirkung s. Aus zwei Beobachtungspaaren $t_1 s_1$ und $t_2 s_2$ kommt in Formel I $a = \frac{\lg s_1 - \lg s_2}{\lg t_2 - \lg t_1}$ und $c = t_1^a s_1$ oder $= t_2^a s_2$. Graphische Darstellungen sind nützlich. c/S gibt die relative Größe der Nachwirkung zur Zeit Eins. $1/a$ bezeichnet die Hartnäckigkeit.

Bei Körpern mit geringer Nachwirkung muß die Deformation vielleicht längere Zeit (10 min) bestehen, um eine Nachwirkung von ausreichender Größe zu geben. Dann gilt aber im allgemeinen der Wert $n = 1$ nicht mehr, so daß man die umständlichere Formel II nehmen muß.

Die Beobachtung ist für Torsion mit Ablesung an Spiegel und Skale (**25**) einfach. Der an den Draht gehängte Körper von kleinem Trägheitsmoment mit leichtem Spiegel sei durch einen Flügel in Flüssigkeit oder einen Luftdämpfer (8, 32) nahe bis zu aperiodischer Schwingung gedämpft (**108**). Man drillt am besten oben, mittels eines Torsionskopfes mit

Gradteilung, während der Schwingungskörper gegen eine Hemmung anliegt. — Ähnlich werden Biegungsnachwirkungen an eingespannten Stäben leicht beobachtet. — Die Messung von Längsnachwirkungen verlangt, außer an Kautschuk, Kokon u. dgl., große Längen oder sehr empfindliche Ablesevorrichtungen; die Wärmeausdehnung eliminiert man am einfachsten nach einem kongruenten ausgeruhten Nachbardraht.

Die Gefahr störender dauernder Gestaltsänderungen wird verringert, wenn der Körper vor einer längeren Frist einer größeren Deformation in gleichem Sinne unterworfen worden war.

Die Temperatur hat einen beträchtlichen Einfluß. Bei harten Körpern steigert sie die anfängliche Größe der Nachwirkung, aber auch die Geschwindigkeit ihres Verschwindens. Bei Kautschuk ist die Nachwirkung in niederer Temperatur größer.

55d. Härte oder Eindringungsfestigkeit.

Nach einem, der Mineralogie entlehnten Verfahren beurteilte man die Härte einer Oberfläche nach ihrer Verletzbarkeit innerhalb einer Staffel kristallisierter Mineralien. Dies ist nicht eindeutig, denn eine Spitze verletzt unter Umständen selbst einen härteren Körper; auch hängt das Ritzvermögen von der Geschwindigkeit der Führung ab. Relativ brauchbar wird das Ritzverfahren, wenn man eine und dieselbe kegelförmige (Diamant-)Spitze mit bestimmter Belastung und Geschwindigkeit führt und die Breite des Risses mißt. Vgl. Martens, Handb. d. Materialienkunde I, 24. 1898.

Definition nach Hertz, 1882; Gesamm. Werke I, 155 u. 183. 1895. Die Härte wird in folgender Form durch einen Druck (Kraft/Flächeneinheit) dargestellt. Sie ist gleich dem Drucke, der im Zentrum einer kugelsegmentförmigen Druckfläche herrschen muß, damit in einem Punkte des Körpers die Spannungen die Elastizitätsgrenze erreichen.

Nach der Theorie ist der Druck im Zentrum das $\frac{3}{2}$fache des mittleren Druckes p_m auf der ganzen Druckfläche. Bedeutet nun p'_m den kleinsten Wert von p_m, bei welchem eine dauernde Veränderung eintritt, so gibt nach Hertz $\frac{3}{2}p'_m$ die gesuchte Härte in abs. Maße.

Spröde Körper erfahren durch Überschreiten der Grenze Zerstörungen. Plastische hingegen, z. B. Metalle, beginnen zu „fließen", d. h. sie erleiden dauernde Eindrücke, ohne den Zusammenhalt zu verlieren.

Größe der Eindrücke. Theorie. Zwei kugelige Oberflächen aus gleichem Material von den Elast.-Konstanten E und μ (**52** u. **55a**), von den Radien ϱ_1 und ϱ_2, seien durch die Belastung P zusammengepreßt; hierdurch entstehe ein Druckkreis vom Halbmesser r, also von der Flächengröße $r^2\pi$, so daß $p_m = P/(r^2\pi)$ ist. Bis zur Elastizitätsgrenze gilt dann $r^3 = \frac{3}{2}\,\frac{1-\mu^2}{E}\,\frac{P}{1/\varrho_1 + 1/\varrho_2}$, woraus, wenn $\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{3}\frac{E}{1-\mu^2}\right)^{2/3}$ als eine Materialkonstante $= C$ bezeichnet wird, folgt

$$p_m = C\cdot\left[P\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)^2\right]^{1/3}. \qquad 1.$$

Preßt eine Kugel ($\varrho_1 = \varrho$) einen ebenen Körper ($\varrho_2 = \infty$), so kommt, mit derselben Bedeutung von C,

$$p_m = C \cdot \left(\frac{P}{\varrho^2}\right)^{1/3}. \qquad 2.$$

Formel 2 gilt auch für die Kreisdruckfläche, welche beim Zusammenpressen zweier über Kreuz gelegter gleicher Cylinder vom Radius ϱ entsteht.

Stellt nun P' die kleinste Belastung vor, bei der eine dauernde Änderung gerade eintritt, so gibt das nach diesen Gleichungen berechnete $\frac{3}{2}p'_m$ nach Hertz die Härte.

Die Hertz'sche Definition läßt sich nicht streng durchführen, weil die El.-Grenze im allgemeinen nicht scharf bestimmbar ist. Auch zeigen sich die theoretischen Formeln nicht streng gültig, insofern beim Zusammenpressen einer Ebene mit verschieden gekrümmten Linsen die so berechnete Härte mit der Linsenkrümmung wächst (Auerbach).

In der Technik gebräuchliche Verfahren.

Diese schließen sich der Hertz'schen Definition insofern an, als sie als Kriterium die Deformation in Pressungskreisen benutzen. Sie verfolgen diese jedoch bis weit oberhalb der El.-Grenze, z. B. bis zu 1 cm Durchmesser.

Bedeutet wieder p_m den Quotienten aus der Belastung P und der gesamten (dauernden + elastischen) Druckfläche, so ergeben die Versuche, daß p_m viel langsamer mit P wächst, als die Formeln 1 bez. 2 verlangen. Jedoch zeigt sich auch hier p_m als eine Funktion von $P(1/\varrho_1 + 1/\varrho_2)^2$, bez. von P/ϱ^2 (Stribeck). Man bekommt also stets das gleiche p_m (die gleiche Härtezahl), wenn man P dem Quadrate von ϱ proportional wählt (d. h. bei geometrisch ähnlicher Eindrückung). Es lassen sich also die mit verschiedenen ϱ erhaltenen Beziehungen zwischen p_m und P auf eine einzige „Härtekurve" reduzieren; durch diese ist das Material definiert.

Die Härtekurve läßt sich erfahrungsmäßig für nicht zu kleine Belastungen in einem einfachen Ausdruck darstellen. Es zeigt sich nämlich von etwa $2r = d = 1$ mm aufwärts nahe die Beziehung $P = ad^n$ erfüllt, wo a und n Konstanten des Materials sind; n wurde $= 2$ bis 2,4 gefunden. Setzt man diesen Wert von P in p_m ein, so entsteht $p_m = (4/\pi) \cdot ad^{n-2}$. Für $n = 2$ ist demnach $p_m = (4/\pi)a$ ein von der Belastung unabhängiges Härtemaß; der gewöhnliche, bei hartem Material stets gefundene Fall $n > 2$ bedeutet, daß p_m mit der Pressung wächst.

Diese Prüfungen pflegen folgendermaßen angeordnet zu werden.

A. Mit gegenseitiger Pressung von Stücken des Prüfmaterials:

1. Kugeldruck. Kugel gegen Kugel oder gegen Ebene; Hertz, Auerbach, Stribeck.

2. Cylinderdruck. Zwei Cylinder gleichen Durchmessers; Föppl.

Diese beiden, im Hertz'schen Sinne absoluten Verfahren sind wegen der verlangten besonderen Körperformen umständlich. Technisch gebräuchlicher sind deswegen die folgenden:

B. Mittels Pressung eines ebenen Probestückes durch einen sehr harten Körper (Stahl), der selbst nicht dauernd deformiert wird:

3. Brinell'sche Kugeldruckprobe. Pressung durch eine Stahlkugel; $2r = 5$ bis 20 mm. In der Praxis benutzt man als Maß der Härte das Verhältnis der Belastung zur sphärischen Oberfläche des Eindrucks. Vgl. jedoch Eug. Meyer und Martens u. Heyn, l. c. unten.

4. Kegeldruck (Ludwik). Pressung durch einen Stahlkegel von 90° Öffnungswinkel. Man pflegt den Eindruckhalbmesser r am oberen Rande des entstandenen Randwulstes zu messen und setzt die Härte

$$p_m = P/(r^2\pi).$$

Literatur: Hertz, s. oben. — Ferner zu 1) Auerbach, Wied. Ann. 43, 61. 1891 (Apparat zur Messung); 45, 262. 1892; 53, 1000. 1894; 58, 357. 1896 (Versuch, die mineralogische Skale auszuwerten); Ann. d. Ph. 3, 108. 1900 (Zahlenwerte). Stribeck, ZS Ver. deut. Ing. 51, 1445, 1500, 1542. 1907. — Zu 2) Föppl, Wied. Ann. 63, 103. 1897; Mitteil. Mech.-Techn. Labor. München, Heft 28, 34. 1902. — Zu 3) Kürth, Ph. ZS 8, 417. 1907. Auch Martens u. Heyn, ZS Ver. d. Ing. 52, 1719, 1908; hier wird empfohlen, die Eindrucktiefe der Kugel zu messen. — Zu 4) Ludwik, die Kegelprobe, Berlin 1908. — Zum ganzen besonders: Eug. Meyer, ZS Ver. d. Ing. 52, 645, 740 u. 835. 1908; Auszug Phys. ZS 9, 66. 1908.

Über Härte und Atomgewicht s. Rydberg, ZS f. ph. Ch. 33, 353. 1900; Benedicks, ib. 36, 529. 1901. — Über Beziehungen zur Zerreißfestigkeit und Streckgrenze Kürth, ZS Ver. deut. Ing. 52, 1560 u. 1608. 1908.

Bei allen diesen Verfahren und Definitionen ist übrigens im Auge zu behalten, daß sie in den Fällen, wo, etwa an rasch gekühlten Körpern, die Oberfläche anders beschaffen, und zwar meist härter ist als das Innere, den Zustand der Oberfläche nicht geben, und den des Inneren nur für größere Pressungen.

Zug-, Bruch- und Torsionsfestigkeit.

Man pflegt die Tragkraft eines longitudinal beanspruchten Prismas oder Cylinders vom Querschnitt q gleich Cq zu setzen. Ferner den Bruchwiderstand eines an den Enden aufgelegten Stabes von der Länge l, gegen eine Belastung seiner Mitte, für ein rechtwinkliges Prisma von der Höhe a und der Breite b gleich $C'\frac{2}{3}a^2b/l$; für einen Kreiscylinder vom Halbmesser r gleich $C'\pi r^3/l$. Endlich den Zerdrehungswiderstand eines Kreiscylinders (r) gegen ein Drehmoment gleich $C''\frac{1}{2}\pi r^3$.

C, C' und C'', die Zug-, Bruch- und Torsions-Festigkeitskonstanten des Materials sind von gleicher Größenordnung.

Die obigen Beziehungen unterliegen starken Abweichungen; z. B. nimmt die Zugfest.-K. im allgemeinen mit wachsendem Querschnitt ab.

Formeln für allgemeinere Fälle hat besonders St. Venant abgeleitet.

Eingehendes z. B. bei Bach, Elastizität und Festigkeit; Martens, Handb. d. Materialienkunde. Vgl. auch Brodmann, Festigkeit von Glasstäben, Gött. Nachr. 1894, 44.

56. Messung von Wellenlängen; Bestimmung der Schallgeschwindigkeit.

Die Schallgeschwindigkeit[1]) in trockner atmosphärischer Luft von der Temperatur t beträgt $u_t = 331\sqrt{1+0{,}00367\,t}$ m/sec. Mittlere Luftfeuchtigkeit wird für Zimmertemperatur genähert berücksichtigt, wenn man 0,004 statt 0,00367 setzt (**18**); z. B. $u_{18} = 343$. — Vgl. ferner **53**.

Zwei gegen einander laufende gleiche Wellenzüge erzeugen stehende Wellen von einem Knotenabstand gleich der halben Wellenlänge.

I. Staubfiguren (Kundt 1866).

1. Schallgeschwindigkeit in festen Körpern.

Die Schallgeschwindigkeit in einem Stabe (oder einer Röhre) läßt sich auf diejenige in der Luft dadurch zurückführen, daß man die Wellen des longitudinalen Stabtones auf Luft überträgt und in dieser mißt.

Man klemmt den horizontal gelegten Stab an seiner Mitte fest ein. Das eine Ende E wird longitudinal gerieben (s. unten), das andere ragt in eine, mindestens 30 mm weite (vgl. S. 239), am hinteren Ende durch einen dicht schließenden verschiebbaren Stöpsel S verschlossene, gereinigte und getrocknete Glasröhre, die ein wenig Lycopodiumsamen, Korkstaub oder geglühte Kieselsäure (aber sehr wenig) enthält. Die Stöße des freien Endes erzeugen in der Glasröhre stehende Luftschwingungen, durch welche sich der Staub in periodische Figuren ordnet. Durch Verschieben von S findet man die richtige Stellung, bei der nämlich das Aufwirbeln des Staubes möglichst energisch geschieht. Man kann auch die Röhre bei S fest verschließen und anstatt des Stöpsels die ganze Röhre verschieben. — Auf einen Stab von kleinem Querschnitt klebt man, um das Übertragen der Stöße an die Luftsäule zu verstärken, eine leichte Kork- oder Pappscheibe.

S E

Ist l der Abstand benachbarter Knotenpunkte von einander, d. i. die halbe Länge der Luftwelle, L die Länge des Stabes, d. i. die halbe Länge seiner Welle (vgl. **53**), so verhalten sich die Schallgeschwindigkeiten U im Stabe und u in der Luft $U:u = L:l$, also gilt (vgl. den Eingang)

$$U = 331\sqrt{1+0{,}004\,t}\,\frac{L}{l}\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

1) Die Einzelwerte für 0° (z. B. Regnault, Bureau des Longitudes, Moll u. van Beek, Violle, Wüllner, Thiesen) liegen zwischen 330 und 333; s. u. a. Wüllner, 6. Aufl. I, 963. 1907; Violle, Rapports au Congrès 1900, I, 228; Thiesen, Ann. d. Ph. 25, 506. 1908. Der richtige Wert in freier Luft liegt wohl 332 näher als 331. Da hier fast nur Fortpflanzungen in Röhren in Betracht kommen, ist 331 eingesetzt, um die berechneten Werte in nicht zu engen Röhren unkorrigiert (vgl. S. 239) gebrauchen zu können.

Der El.-M. ist dann (53), wenn s die Dichtigkeit des Stabes bedeutet,
$$E = \frac{U^2 s}{9810} \frac{\text{kg-Gewicht}}{\text{mm}^2}.$$

Um eine genauere Länge der Staub-Halbwelle zu erhalten, messe man den Abstand eines Paares von Knoten (oder mehrerer Paare; z. B. wenn $2n$ Punkte gemessen werden, Nr. 1 bis $n+1$, 2 bis $n+2 \ldots n$ bis $2n$), die weiter auseinander liegen, und dividiere ihn (oder das Mittel) durch die Anzahl der zwischenliegenden Wellen. Über Rechnung mit kleinsten Quadraten vgl. **3** II.

Beispiel. Ein 900 mm langer Glasstab gab bei der Lufttemperatur 17° die Länge der Staub-Halbwellen $l = 62{,}9$ mm. Die Schallgeschwindigkeit im Glase betrug also $331\sqrt{1+0{,}004 \cdot 17} \cdot 900/62{,}9 = 4890$ m/sec; mithin El.-M. des Glases, dessen Dichte $= 2{,}7$ war (**15** B, 1 oder 3),
$$E = 4890^2 \cdot 2{,}7/9810 = 6580 \text{ kg-Gewicht/mm}^2.$$

Längere Stäbe kann man, anstatt in der Mitte, auch in $\frac{1}{4}$ vom Ende klemmen und in der Mitte reiben, dann ist die Wellenlänge im Stabe gleich der ganzen Stablänge, also das wie oben berechnete U durch 2 zu dividieren.

2. Schallgeschwindigkeit in Gasen.

Man setzt im folgenden den Gaszustand voraus, der hinreichend genau durch $vp/(273+t) = \text{Const.}$ dargestellt wird; vgl. S. 79. Bemerkungen über Abweichungen s. daselbst, sowie S. 82 u. 159. Besonders bei tiefer Temp. und hohem Druck sind die allgemeineren Zustandsgleichungen heranzuziehen.

Berechnung (Laplace 1816). Es bedeute s die Dichtigkeit, p den in CGS-Einheiten (Dyne/cm²) gemessenen (**36** I) Druck eines Gases, ferner sei das Verhältnis seiner sp. Wärmen bei konst. Druck u. konst. Volumen (**50b**) (welchem die Erwärmung bei plötzlicher Verdichtung proportional ist) $c_p/c_v = \varkappa$; dann gilt für die in cm/sec gemessene Schall-Geschw. u die Beziehung
$$u^2 = \varkappa p/s. \qquad 1.$$

Nennt man h den in cm Quecksilber (0°; 45° geogr. Breite) gemessenen Gasdruck, so ist (**36** I) $p = 13333\,h$. Bedeutet ferner s_0 das sp. Gew. des Gases bei 0° unter 76 cm Quecksilberdruck, so wird (**18**) für eine Temp. t, wenn α ($= 0{,}00367$) der Ausd.-Koeff. der Gase, $s = s_0 \frac{h}{76} \frac{1}{1+\alpha t}$. Werden diese Ausdrücke für p und s in 1. eingesetzt, so hebt h sich heraus (die Schallgeschw. hängt nicht vom Drucke ab) und es kommt
$$u^2 = \varkappa\, 13333 \cdot 76\,(1+\alpha t)/s_0 = 1013300\,\varkappa\,(1+\alpha t)/s_0 \text{ (cm/sec)}^2,$$ oder, u in m/sec gemessen:
$$u^2 = 101{,}33 \cdot \varkappa \frac{1+\alpha t}{s_0} \left(\frac{\text{m}}{\text{sec}}\right)^2. \qquad 2.$$

Für zwei Gase gilt demnach das Verhältnis
$$\frac{u^2}{u'^2} = \frac{\varkappa}{\varkappa'} \frac{1+\alpha t}{1+\alpha t'} \frac{s_0'}{s_0}. \qquad 3.$$

Diese Beziehungen dienen für ein Gas von bekanntem $\varkappa$ und s_0 zur Berechnung seiner Schallgeschwindigkeit und zu den Aufgaben unter IV.

Verzögerung in Röhren. Die Sch.-Geschw. wird hier, durch Reibung und Wärmeaustausch, um eine Korrektion verkleinert, die der Rohrweite (d cm) und der Wurzel aus der Schw.-Zahl N/sec umgekehrt proportional ist (Helmholtz, Kirchhoff). Für Luft in gewöhnlicher Temp. folgt aus Versuchen von Low, Stevens, J. Müller, F. A. Schulze, als Korrektionsfaktor etwa $1 - 0{,}45/(d\sqrt{N})$; 3 Promille für $d = 3$ cm u. $N = 2000$. — Vgl. aber Sturm, Ann. d. Ph. 14. 822. 1904. Siehe auch Thiesen, Ann. d. Ph. 24, 401. 1907; Fürstenau, ib. 27, 735. 1908.

Messung mit Staubwellen; **56** I (l = Halbwellenlänge).

1. Man erregt Wellen bekannter Frequenz N (**57**) und rechnet
$$u = 2lN.$$

2. Man vergleicht das Gas mit der Luft (S. 237), indem man in beiden Mitteln Figuren mit demselben angeriebenen Stabe oder mit derselben, vor der Rohrmündung angestrichenen Stimmgabel oder angeblasenen Pfeife erzeugt. Den entstehenden Wellenlängen sind die Schallgeschwindigkeiten proportional. Wird also dabei beobachtet l' in trockener Luft von der Temp. t' und l im Gase von der Temp. t, so gilt für das Gas bei 0° die Sch.-Geschw.
$$331 \frac{l}{l'} \sqrt{\frac{1 + 0{,}00367t'}{1 + 0{,}00367t}} \frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$
(Über 331 vgl. übrigens Anm. S. 237.)

Beiderseitig geschlossene Röhren. Anreiben erzeugt scharfe Knotenpunkte im eingeschlossenen Gase nur dann, wenn die der Tonhöhe des Rohres entsprechende Halbwellenlänge nahe ein ganzer Bruchteil der Rohrlänge ist. Durch ausprobierte Endbelastungen (beiderseitig angekittete Metallscheibchen) kann man dies bewirken; vgl. Behn u. Geiger, Verh. D. Ph. Ges. 1907, 657. — Über Tonerregung an einem angeschmolzenen Stab und Messungen an Dämpfen von höheren Temperaturen Kundt u. Warburg, Pogg. Ann. 157, 353. 1876; Strecker, Wied. Ann. 13, 20. 1881.

Anreiben eines Stabes. Außer auf das Freihandverfahren (S. 219) sei auf die, durch Laufwerk angetriebene rotierende Reibscheibe (R. König) hingewiesen, deren Umfang, mit zwei Kautschukschläuchen und darüber gespanntem befeuchtetem Seidenstoff belegt, die zu diesem Zweck sehr fest eingespannte Glasröhre einseitig reibt. (Die Endverbreiterung, welche die Stöße überträgt, wird, haltbarer als durch ein aufgekittetes Scheibchen, durch Aufblasen hergestellt.) Vgl. Altberg, Ann. d. Ph. 11, 410. 1903.

Tropfbare Flüssigkeiten. Es bedeute s die Dichtigkeit, $\varkappa$ die Kompressibilität (**55b**) in CGS, d. h. die Zahlen in Tab. 19a geteilt durch 1013300 (**36**), dann ist $U^2 = 1/\varkappa s$.

Auch hier lassen sich Schallgeschw. mittels Kundt'scher Staubwellen

(Bimssteinsand) bestimmen; vgl. z. B., auch über Lit., Dörsing, Ann. d. Ph. 25, 227. 1908; über den bedeutenden Einfluß der Weite und Wandstärke auch Korteweg, Wied. Ann. 5, 525. 1878.

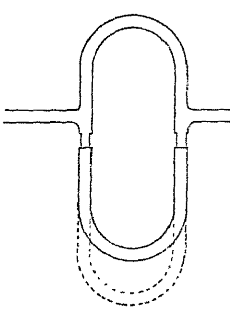
II. Akustische Bestimmungen von Wellenlängen in Gasen.

1. **Stehende Wellen durch Reflexion** (Quincke). Die Tonquelle, z. B. die Zinken oder der Resonanzkasten einer Stimmgabel, befindet sich vor dem offenen Ende eines hinten eben geschlossenen weiten (30 mm) Rohres. Durch Reflexion an der Hinterwand bilden sich stehende Wellen. Mittels eines engen (8 mm), verschiebbar eingeführten Rohres, von welchem ein Kautschukschlauch zum einen Ohre führt, tastet man die Wellen ab. Das andere Ohr ist verstopft; Kratzen des Hörrohres wird durch einige umgebundene Fäden (in hoher Temperatur Asbest) vermindert. Die an einer mm-Teilung abgelesene Strecke zwischen aufeinanderfolgenden Stellungen maximaler (oder minimaler) Tonstärke ist je $\frac{1}{2}$ Wellenlänge.

Statt des verschiebbaren Hörrohres vor dem festen Boden kann eine feststehende Höröffnung mit Schlauch und ein verschiebbarer Boden dienen. Eine einfache Anordnung s. Fig., wo das verstellbare Wasserniveau den Boden bildet.

Quincke, Pogg. Ann. 128, 190. 1866; Stevens, Ann. der Ph. 7, 285. 1902. Kalähne, ib. 11, 225. 1903 (hohe Temp.); 20, 398. 1906. Hier auch die weitere Literatur.

2. **Interferenz-Doppelrohr** (Quincke). Der Ton wird in das eine Ende eines verzweigten Kanals geschickt, dessen einer



Zweig mittels eines Posaunenauszuges meßbar verlängert werden kann. Vom anderen Ende führt man wie oben einen Schlauch zum Ohre. Die Summe der beiderseitigen Verschiebungen zwischen zwei Stellungen minimaler Tonstärke gibt die Wellenlänge. Denn die beiden Wellenzüge interferieren jedesmal abschwächend, wenn ihre Weglängen sich um ein ungerades Vielfaches der halben Wellenlänge unterscheiden.

Quincke, Pogg. Ann. 128, 179. 1866. Eine Abänderung, welche mittels eines T-Stückes die eine der Öffnungen verschieben läßt, s. bei Handke u. Martens, Verh. D. Ph. Ges. 1907, 121.

Über Messungen mit Membranen in Pfeifen s. W. Kohlrausch, Wied. Ann. 8, 584. 1879. — Vgl. ferner **57**, 4.

3. **Resonanz.** In einem elastischen Körper, besonders in einer abgegrenzten Gasmasse entstehen durch die Zuführung regelmäßiger Anstöße Eigenschwingungen, deren Intensität ein Maximum ist, wenn die Schwingungszahl mit einem Eigenton des Körpers zusammentrifft.

Der Ton einer Sirene von meßbar veränderlicher Schwingungszahl wird einem geschlossenen Rohr (l etwa $= 100$; $2r = 5$ bis 6 cm) am einen Ende durch eine enge (1 mm weite) Öffnung zugeführt. Die Wellenlänge des (tiefsten) Tones, für welchen das Maximum der, durch eine Metallmembran (Neusilber, $1/3$ mm stark) hindurch beobachteten Resonanz eintritt, ist gleich der doppelten Rohrlänge.

Thiesen, Ann. d. Ph. 25, 506. 1908. S. über die Anwendung eines Saitenunterbrechers Fürstenau, l. c. (S. 237). Vgl. noch **57** II, 5.

4. **Aus der Tonhöhe einer Pfeife.** Eine und dieselbe kleine Pfeife wird mit dem zu untersuchenden und mit einem Gase von bekannter Schallgeschwindigkeit angeblasen. Vorbehaltlich Korrektionen aus der Stärke des Anblasens usw. verhalten sich die Schallgeschwindigkeiten wie die Tonhöhen. Vgl. Wachsmuth, Ann. d. Ph., Boltzmannband, 923. 1904.

III. Messung sehr kleiner Wellenlängen mit Beugungsgittern.

Über die theoretischen Grundlagen des Verfahrens vgl. Optik **65** I.

Die Wellen, nötigenfalls mittels eines Hohlspiegels parallel gemacht, fallen auf ein Stabgitter (Drähte; Glasstäbe) von einigen mm Gitterperiode. Man sucht mit einem Schalldruckmesser (**57a**, 4) die Richtungen der Energiemaxima (nur das mittelste und die beiderseitig nächsten pflegen deutlich zu sein) hinter dem Gitter und rechnet wie in **65** I. Altberg, Ann. d. Ph. 23, 267. 1907; bis etwa $\lambda = 1$ mm abwärts.

Oder man untersucht die gebeugt reflektierten Strahlen mittels Drehung des Gitters vor einem zweiten Hohlspiegel, der sie auf den Schalldruckmesser konzentriert. Dieckmann, Ann. d. Ph. 27, 1066. 1908; bis etwa $\lambda = \frac{1}{2}$ mm (ca. 700000 Schw./sec). S. daselbst die Berechnungsweise und die Literatur über das Erzeugen der schnellen Schwingungen, besonders durch elektrische Funkenstrecken.

IV. Anwendungen von Schallgeschwindigkeiten.

1. Bestimmung von Gasdichten. Ist $c_p/c_v = \varkappa$ bekannt (vgl. **50b** u. Tab. 12a), so folgt aus der Sch.-Geschw. u m/sec das spez. Gewicht bei 0° und 760 mm Quecks. (Formel 2, S. 238)

$$s_0 = 101{,}33\,\varkappa\,\frac{1+\alpha t}{u^2}.$$

2. Bestimmung des Verhältnisses $\varkappa = c_p/c_v$. Aus dem bekannten spez. Gewicht s_0 (0^0, 760 mm) und der Sch.-Geschw. u bei t folgt

$$\varkappa = 0{,}00987 \frac{s_0 u^2}{1+\alpha t}.$$

Über tiefe Temp. u. hohe Drucke vgl. z. B. Valentiner, Ann. d. Ph. 15, 74. 1904; P. P. Koch, ib. 26, 551 u. 27, 311. 1908.

3. Messung von Temperaturen. Als Gas werde trockene Luft angenommen. Der Sch.-Geschw. u entspricht die Temperatur

$$t = 0{,}00249\, u^2 - 273.$$

Sind die Wellenlängen eines und desselben Tones (vgl. 57) λ und λ' bei den Temperaturen t und t', so gilt

$$\frac{273+t}{273+t'} = \frac{u^2}{u'^2} = \frac{\lambda^2}{\lambda'^2}.$$

Über hohe Temperaturen vgl. Kalähne, Ann. der Ph. 11, 225. 1903.

Die Formeln unter Nr. 1, 2 u. 3 setzen merklich vollkommenen Gaszustand voraus; vgl. den Eingang.

57. Absolute Schwingungszahl eines Tones.

Über physikalische Akustik s. besonders Rayleigh, Theory of Sound, deutsch von Neesen 1879. Second Ed. 1894/95.

Ein Wellenzug enthält einen einfachen Ton, wenn seine Schwingung sinusförmig ist (Ohm). Weitaus die meisten Tonquellen geben Schwingungen anderer periodischer Form, die, besonders mit Hilfe Fourierscher Reihen, in den Grundton (Ton der langsamsten, im Klange enthaltenen Periode) und in Obertöne zerlegt werden können.

I. Gebräuchliche Tonquellen.

1. Sirene (Cagniard la Tour 1820), durch Anblasen, elektromagnetisch oder durch einen Motor (8, 26) angetrieben. Der Grundton ist durch die Periode der Stöße gegeben; begleitende Geräusche und Obertöne hängen von den Umständen ab.

2. Stimmgabel, angeschlagen, angestrichen oder elektromagnetisch angetrieben; fundamental wegen ihrer, auch von der Temperatur wenig beeinflußten, Konstanz ihrer Schwingungszahl[1]) und, richtig behandelt, wegen der Schwäche ihrer, vom Grundton weit abliegenden Obertöne, die außerdem mittels eines auf den Grundton abgestimmten Resonanzkastens relativ noch weiter abgeschwächt werden können. — Zur optischen Darstellung der Schwingungen dienen Spiegel an den Zinken, am besten nicht weit von der Mitte befestigt. Der schwingende Strahl fällt auf einen zweiten, geeignet bewegten Spiegel. — Schreibende Stimmgabel s. S. 244.

1) Normalstimmgabeln werden von der P.-T. Reichsanstalt geprüft.

Neue Literatur z. B. Hartmann-Kempff, Ann. d. Ph. 13, 124. 1904 (Einfluß der Amplitude); Sieveking u. Behm, ib. 15, 793. 1904; Martens, Verh. D. Ph. Ges. 1907, 111; Kielhauser, die Stimmgabel, Leipz. 1907. — Stimmgabel vor einer Öffnung mit Luftstrom Rayleigh, Ph. Mag. 13, 316. 1907.

3. Transversal schwingende gestreckte Stäbe (vgl. **54a**), rechteckig oder cylindrisch, angeschlagen oder angestrichen; im allgemeinen zahlreicher, zu einander unharmonischer Töne fähig. Um den Grundton zu bevorzugen, stütze man in dessen, nahe um $^2/_9$ von den Enden entfernten Knotenpunkten. Wichtig besonders als Normale für hohe Töne (R. König). — Über Stimmplatten s. Melde, Wied. Ann. 66, 767. 1898; ib. 67, 781. 1899.

4. Schwingende Federn (Zungen), meist durch Anblasen oder elektromagnetisch erregt. Für tiefere Töne am freien Ende beschwert. Auch als Tonnormale verwendet (Appunn).

5. Longitudinal schwingende Stäbe, angerieben; s. S. 220 u. 239. Die je nach der Anzahl der Knoten entstehenden Tonhöhen verhalten sich wie 1:2:3...; harmonische Tonreihe.

6. Gespannte Drähte und Saiten. Längs: angerieben s. S. 220. Besonders auch für sehr hohe Töne zuverlässig brauchbar. Über Anwendung zur Bestimmung der oberen Hörgrenze s. F. A. Schulze, ZS f. Ohrenheilk. 56, 167. 1908. — Quer: angeschlagen, angestrichen oder elektromagnetisch betrieben (Saitenunterbrecher); s. unten Monochord. — Tonreihe: 1:2:3...

Über optische Untersuchung der Schwingungsform s. z. B. Krigar-Menzel u. Raps, Sitz. Ber. Berl. Akad. 1891, 613.

7. Gassäulen (Pfeifen), meist über Schneiden angeblasen, auch durch empfindliche Flammen erregbar. Von Korrektionen abgesehen: a) Beiderseitig offen oder geschlossen: Grundton $= u/(2l)$ (vgl. S. 238); Tonreihe 1:2:3... b) Einseitig geschlossen: Grundton $= u/(4l)$; Tonreihe 1:3:5... — Relativ kurze („kubische") sowie Zungenpfeifen folgen anderen Beziehungen.

Galton-Pfeifen, mit einem Gummiball, zuverlässiger mit einem Gebläse von konstantem Druck über eine kreisförmige Schneide angeblasene kurze, cylindrische Luftmassen, deren Länge nebst der hierdurch bestimmten Maulweite mikrometrisch verändert werden kann. Tabellen geben die zugehörigen Tonhöhen, die bis über 50000 Schw./sec reichen können. Ausführung z. B. von Edelmann, Ann. d. Ph. 2, 469. 1900. — Über Eichung, Fehlerquellen, Literatur vgl. besonders F. A. Schulze, ib. 24, 785. 1907; Hegener, Beiträge z. Anat. usw. des Ohres 1, 321. 1908.

8. Schwingungen in elektrischen Lichtbögen und Funkenstrecken. In Hertz'schen Funkenstrecken bis 200000/sec (vgl. Altberg, Ann. d. Ph. 23, 267. 1907), im Poulsen-Lichtbogen bis zur Ordnung 800000 (Dieckmann, Ann. d. Ph. 27, 1066. 1908). S. auch **125**.

Relative Schwingungen der *reinen* Dur-Tonleiter:

c	d	e	f	g	a	h	c_1
1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2

Einfachste Ton-Intervalle:

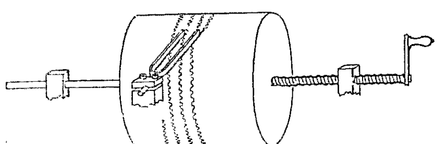
Oktav	Quint	Quart	Große u. kl. Terz		Gr. u. kl. ganzer u. halber Ton		
2:1	3:2	4:3	5:4	6:5	9:8	10:9	16:15
$\frac{c_1}{c}$	$\frac{g}{c}\ \frac{h}{e}\ \frac{c_1}{f}$	$\frac{f}{c}\ \frac{g}{d}\ \frac{a}{e}\ \frac{c_1}{g}$	$\frac{e}{c}\ \frac{a}{f}\ \frac{h}{g}$	$\frac{g}{e}\ \frac{c_1}{a}$	$\frac{d}{c}\ \frac{g}{f}\ \frac{h}{a}$	$\frac{e}{d}\ \frac{a}{g}$	$\frac{f}{e}\ \frac{c_1}{h}$

Gleichschwebende Stimmung hat jeden halben Ton $= 2^{1/12} = 1{,}0595$; Tab. 21.

Die obere Hörgrenze ist, individuell verschieden, von der Ordnung 20000 Schw./sec.

II. Bestimmung der Schwingungszahl.

1. **Graphisch.** Tönender fester Körper. Man befestigt diesen neben einer Stimmgabel von bekannter Schwingungszahl und läßt beide mittels angeklebter leichter biegsamer Spitzen (feine Metallfeder, Streifchen aus einer Federspule, geschabtes Celluloid usw.) Sinuskurven in eine dünne Rußschicht schreiben. Die nebeneinander liegenden Wellen werden abgezählt.



Oder man läßt neben die Kurve des Körpers in bekanntem Takte Marken zeichnen und zählt die zwischen ihnen liegenden Wellen. Die Marken werden z. B. durch eine elektromagnetische Schreibvorrichtung hergestellt, welche durch den Stromschluß (Quecksilbernapf) bei jeder Schwingung eines Sekundenpendels bewegt wird. Oder dieser Stromschluß geht durch die primäre Rolle eines Induktionsapparates, während die Pole der sekundären mit der Walze bez. mit der Stimmgabel verbunden sind; die Induktionsfunken durch die Schreibspitze zeichnen sich auf der Rußschicht ab. — Für besonders schnelle Schwingungen dient anstatt Ruß eine dünne Fettschicht; die hier geforderte rasche Fortbewegung wird durch einen Glasstreifen leichter erzielt als durch die Walze; Melde, Wied. Ann. 51, 661. 1894.

Auch lichtempfindliche Schichten werden angewendet. S. auch die in der Physiologie viel gebrauchten Chronographen von Ludwig, Marey u. A.

Tonwellenzüge in Luft. Man läßt solche auf eine freie rußende Acetylen-Flamme wirken. Diese zuckt im Takte des Tons und zieht Rußringe auf einen mit bekannter Geschwindigkeit vorbeibewegten Streifen. Marbe, Ph. ZS 7, 543. 1906; 8, 92. 1907.

2. **Aus Schwebungen.** Stimmgabeln oder sonstige Tonquellen von nahe gleicher oder in einfachem Zahlenverhältnis stehender Schwingungszahl lassen sich nach der Anzahl der Schwebungen vergleichen, welche sie miteinander erzeugen. Jede Schwebung bedeutet ein Vorauseilen des einen Tones um eine ganze Schwingung. Weiß man nicht, welcher von beiden Tönen der höhere ist, so kann man z. B. den einen von ihnen ganz wenig vertiefen. Werden die Schwebungen dadurch langsamer, so war dieser Ton der höhere und umgekehrt. Ein Stimmgabelton kann durch ein Stückchen Kautschukschlauch, welches dem Ende oder der Mitte näher geschoben wird, mehr oder beliebig wenig vertieft werden, der Ton einer Pfeife durch Annähern der Hand an eine Öffnung.

In einer fortlaufenden Reihe benachbarter Tonquellen, die mit einander schweben, ist die Schw.-Z. jedes Tones gleich der Summe der sekundlichen Schwebungsfrequenzen von ihm bis zu seiner höheren Oktav. Andere Tonhöhen lassen sich mittels Schwebungen einreihen (Scheibler'scher Tonmesser).

3. **Mit dem Monochord.** Eine gespannte weiche Saite von l m Länge, gespannt durch ein Gewicht P, wenn 1 m der Saite das Gewicht p hat, besitzt eine Schwingungszahl N ihres Grundtones (Mersenne 1636)

$$N = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{9{,}81\,P}{p}}.$$

Durch Längen- oder Spannungsänderung kann man also zum Zweck von Vergleichungen eine beliebige, aus der Formel zu berechnende Tonhöhe hervorbringen. — Die eigene Elastizität der Saite macht die Schwingungszahl etwas größer als berechnet. Messing- oder besser noch Silberdraht, auch besponnener Klaviersaitendraht ist geeignet. Vgl. Rayleigh, § 118ff., besonders 137.

4. **Aus der Wellenlänge in Luft.** Wenn u die Fortpfl.-Geschw. (**56**), λ die Wellenlänge des Tons in Luft, so ist $N = u/\lambda$. Man mißt λ z. B. durch Übertragen des Tones auf Kundt'sche Staubfiguren (**56** I) oder auf eine Quincke'sche Röhre (**56** II). Oder man läßt den Ton von einer ebenen Wand reflektieren und tastet die Interferenzknoten oder Bäuche ab, bei tieferen Tönen z. B. vor einer vertikalen Wand mit einer empfindlichen Flamme (Rayleigh), bei hohen, selbst bei nicht mehr hörbaren

Tönen einer Galtonpfeife, nahe über einer Tischplatte mittels einer kleinen, auf einen Korkring geklebten und mit Sand bestreuten Glimmerplatte. Vgl. noch **56** II u. III.

S. hierüber F. A. Schulze, Ann. d. Ph. 24, 785. 1907.

5. **Mit Resonatoren.** Man probiert einen Resonator von bekannter Schwingungszahl aus, der auf die gesuchte Tonhöhe anspricht. Resonatoren sind meist abgegrenzte Luftmassen. Nahe einheitlichen Ton gibt der Kugelresonator (Helmholtz); für eine Kugel vom Volumen V mit verhältnismäßig enger Öffnung von der Fläche F ist die Eigentonhöhe prop. mit $u \cdot F^{\frac{1}{4}} V^{-\frac{1}{2}}$, wenn u die Schallgeschw. im Gase.

Multiple Res. s. Rayleigh, Phil. Mag. 13, 319. 1907; Reihen, die vermöge verschiedener Einsatzöffnungen von $\frac{1}{2}$ zu $\frac{1}{2}$ Ton fortschreiten, Edelmann, Ph. ZS 7, 510. 1906.

Cylinderresonatoren. Die Tonhöhe berechnet sich am einfachsten für einen beiderseitig geschlossenen Cylinder; die Länge kann durch Ausziehen regulierbar sein. Enge Öffnungen in den Endplatten dienen zum Einlaß des Schalles und zum Hören. Vgl. **56** II 3. — Man beachte das Ansprechen auch auf Obertöne.

Über Luftresonatoren vgl. Helmholtz, Tonempfindungen, Beilage II u. IV.

Feste dünne Platten (Glas, kreisförmig) können vermöge der Chladni'schen Klangfiguren, aus welchen sich die Schwingungszahl ergibt (Kirchhoff), als Resonatoren gebraucht werden.

Vgl. Rayleigh (Neesen), Theor. of Sound I, § 193 ff.; Anwendungen bis über 30000 Schw./sec bei F. A. Schulze l. c.

Resonanz durch Berührung; besonders auch auf sehr hohe Schw.-Z. anwendbar. Eine an den tönenden Körper gekittete kleine Korkschneide berührt das freie Ende eines geklemmten flach liegenden Stabes, dessen Länge man variiert, bis einer von seinen Tönen auf den zu bestimmenden anspricht. Die Knoten werden aus Sandlinien erkannt, die Schw.-Zahl nach den Formeln S. 223 berechnet, nachdem der Stab bei irgend einer Länge nach einem bekannten Ton geeicht ist. Melde, Wied. Ann. 52, 238. 1894; auch 66, 767. 1898.

6. **Mit der Sirene.** Man erhält eine Sirene mit Zählwerk auf der Höhe des zu bestimmenden Tones und zählt die Umdrehungen während einer gemessenen Zeit.

7. **Phonisches Rad** (La Cour, Rayleigh). Mit einem Zählwerk ist eine hohle Trommel verbunden, die etwas (reines) Quecksilber

enthält. Durch seine Trägheit und Reibung wirkt dieses ausgleichend auf den Gang und erteilt insbesondere, wenn die Trommel während einer Rotation plötzlich stehen bleiben möchte, einen Stoß nach vorwärts.

Auf der Peripherie sind in gleichen Abständen Eisenstäbchen eingelassen. Die Trommel rotiert vor einem Elektromagnetpol. Wird dieser in einem bestimmten Takt erregt, so reguliert eine Geschwindigkeit, die man der Trommel durch einen Anstoß gegeben hat, sich von selbst so, daß die Eisenstäbe den Pol im gleichen Takt oder mit einem ganzen Vielfachen dieser Geschwindigkeit passieren.

Das phonische Rad zählt also Oszillationen, die man auf bewegliche elektrische Kontakte übertragen hat, z. B. die von schwingenden Federn, Stimmgabeln usw. Da die Ordnungszahl der Schwingungen so gut wie immer bekannt ist, so wird eine besondere Untersuchung darüber, um wie viele Stäbchen sich bei jeder Schwingung die Trommel fortschiebt, selten gefordert. Andernfalls findet man sie leicht dadurch, daß die Umdrehungszahl durch vorübergehendes Bremsen mit dem Finger auf die nächst niedrige Zahl ermäßigt wird.

La Cour, Das phonische Rad; deutsch von Kareis, Leipzig 1880; s. auch Rayleigh, Phil. Mag. 13, 330. 1907. — Über Umlaufzähler auch **119**.

8. **Stroboskopisch.** Man reguliert die Umdrehungsgeschwindigkeit eines durch ein Laufwerk getriebenen Kreises mit Löchern so, daß die schwingende Stimmgabel, Saite, Feder usw., mit bloßem Auge, mit Fernrohr oder Mikroskop durch die Löcher betrachtet, scheinbar still steht. Hat die Scheibe m Löcher und ist ihre Umdrehungszahl $= k$/sec, so ist die gesuchte Schwingungszahl $N = mk$. Erblickt man mehrere ruhende Bilder, so dividiert man das Resultat durch deren Anzahl.

Täuschungen, die, wie leicht ersichtlich, die Ordnungszahl fälschen können, werden sicherer vermieden, wenn die Rotationsgeschwindigkeit nur so weit reguliert wird, daß noch eine langsame stroboskopische Bewegung des schwingenden Körpers nachbleibt. Zählt man dann während einer Zeit von t sec s stroboskopische Schwingungen, und macht in derselben Zeit die Scheibe S Umdrehungen, so ist $N = (mS \pm s)/t$, und zwar $+$, wenn bei vermehrter Rotationsgeschwindigkeit die stroboskopische Schwingung langsamer wird und umgekehrt.

Die Umdrehungszahl erkennt man mit Hilfe eines Zählwerkes, welches man eine gemessene Zeit hindurch mitlaufen läßt, oder man beobachtet die Umdrehungszeit eines in bekanntem Verhältnis langsamer laufenden Rades des Laufwerks.

57a. Schallintensität in Gasen.

Bezeichnungen und Definitionen für harmonische (Sinus-) Wellen. s Dichtigkeit des ruhenden Gases; $\varkappa = c_p/c_v$ (**50b** u. Tab. 12a). Ferner u Schallgeschw. (**56**); Λ Wellenlänge; $N = u/\Lambda$ Schw.-Zahl; A ganze Schwing.-Weite; $v_0 = \pi A u/\Lambda = \pi N A$ Max.-Geschw. eines Teilchens; alles in cm und sec. Endlich die ganzen relativen max. Schwankungen: der Dichte $\delta = 2 v_0/u = 2\pi N A/u$, und des Druckes $\Delta = \varkappa\delta = 2\pi\varkappa N A/u$.

Intensität J ist die auf 1 ccm bezogene mittlere räumliche Energiedichte (Potential- und Bewegungsenergie). Es gilt für fortschreitende Wellen:

$$J = \tfrac{1}{2} s v_0^2 = \tfrac{1}{2} s(\pi N A)^2 = \tfrac{1}{8} s u^2 \delta^2 = \tfrac{1}{8} s u^2 (\Delta/\varkappa)^2 \text{ Erg cm}^{-3}. \qquad 1.$$

Die Int. stehender Wellen ergibt sich, wenn v_0 usw. für sie die obige Bedeutung behalten, aus ihrer Zusammensetzung aus zwei fortschr. Wellen von $\frac{1}{2} v_0$ usw., offenbar ($= 2 \cdot \frac{1}{4}$) gleich der Hälfte der Ausdrücke 1.

Die Energiemenge, welche bei fortschreitenden Sinuswellen in 1 sec durch ein zur Bewegungsrichtung senkrechtes qcm wandert, wird in Erg cm^{-2} sec^{-1} aus den Ausdrücken 1 gleich Ju erhalten.

I. Aus der maximalen Dichte- oder Druckänderung.

1. **Optisch** (A. Toepler u. Boltzmann). Man läßt zwei Lichtstrahlen interferieren, von denen der eine durch die tönende, der andere durch ruhende Luft geht. Die schwingenden Interferenzstreifen werden entweder nach dem stroboskopischen Prinzip (S. 247, Nr. 8) verlangsamt und sichtbar gemacht, oder, indem man sie bis auf ein schmales Querbündel abblendet, auf eine rotierende Trommel photographiert (wodurch auch die Form der Schwingungen aufgezeichnet wird).

Aus der in Streifenabständen gemessenen Verschiebung des Streifensystems gegen die markierte Null-Lage ergibt sich die Änderung des Brechungsverhältnisses n und hieraus die Änderung der Dichte nach dem Satze, daß $n - 1$ der Dichte proportional ist (**60**).

Vgl. Toepler und Boltzmann (strobosk.), Pogg. Ann. 141, 321. 1870; Einfache Anordnungen, besonders zur Demonstration, bei Mach, Opt.-akust. Versuche, Prag 1873; Raps (photogr.), Wied. Ann. 50, 193. 1893.

Über Messung der Druckänderung in Pfeifen mittels Ventilmanometers vgl. Kundt, Pogg. Ann. 134, 563. 1868; Raps, Wied. Ann. 36, 273. 1889.

Eine Anordnung, bei der die Druckänderungen am Beobachtungsort aus den mikroskopisch gemessenen Ausschlägen einer Telephonmembran berechnet werden, besonders für absolute Hörschärfemessungen brauchbar, bei M. Wien, Pflüger's Archiv 97, 1. 1903.

2. **Mit dem Vibrationsmanometer** (M. Wien). Die sonst in das Ohr gesteckte Öffnung eines auf den zu untersuchenden Ton abgestimmten Kugelresonators (57, 5) ist erweitert und durch eine, ebenfalls auf diesen Ton abgestimmte Membran geschlossen. Die Schwingungen der Membran werden auf einen anliegenden leichten Spiegel (36 IV, Fig. 1) übertragen, der das Bild einer an ihm reflektierten Lichtlinie in ein Band auszieht, dessen Breite der Druckamplitude Δ proportional ist; ihr Quadrat gibt ein relatives Maß der Schallstärke. Über die Reduktion auf absolutes Maß vgl. Wien l. c., S. 837—843.

M. Wien, Wied. Ann. 36, 834. 1889.

II. Aus der Wirkung von Schallwellen auf Wände.

3. **Rayleigh'sche Scheibe.** Eine innerhalb Schallwellen befindliche Scheibe sucht sich senkrecht zur Bewegungsrichtung zu stellen. Eine relativ sehr dünne Kreisscheibe vom Halbmesser r (etwa 2 mm), deren Normale gegen die Schallbewegung um ϑ geneigt ist, erfährt in fortschreitenden Sinuswellen (über s, N, A s. vor. S.) genähert das Drehmoment $D = \frac{2}{3}\pi^2 s N^2 A^2 r^3 \sin 2\vartheta$. Man mißt D durch das Torsionsmoment der Aufhängung (feiner Quarzfaden). Nach Gl. 1 ist also $J = \frac{3}{4}\frac{D}{r^3 \sin 2\vartheta}$.

Über einen Korrektionsfaktor wegen der Scheibendicke vgl. König und Zernov l. c.

Rayleigh, Phil. Mag (5) 14, 186. 1882; Grimsehl, Wied. Ann. 34, 1028. 1888; W. König, ib. 43, 43. 1891; 50, 639. 1893; Lebedew, ib. 62, 163. 1897. Besonders auch Zernov, Ann. d. Ph. 21, 131. 1906; 26, 79. 1908.

4. **Aus der Druckkraft von Schallwellen.** Stehende Schallwellen von der räuml. Energiedichte J (S. 248) üben auf eine vollkommen reflektierende, zur Schallbewegung senkrechte Wand einen Druck aus $p = J(\varkappa + 1)/2$ (Rayleigh). p wird mit einer empfindlichen Wage oder an einer Coulombschen Drehwage gemessen.

Rayleigh, Phil. Mag. (6) 10, 366. 1905; vgl. Altberg, Ann. d. Ph. 11, 405. 1903; über relative Messung auch 23, 267. 1907; Zernov, ib. 21, 136. 1908. — Man beachte, daß Rayleigh früher, ohne Rücksicht auf die Kom-

pressionswärme, gefunden hatte $p = J$; Phil. Mag. (6) 3, 338. 1902. Diese Formel liegt der Altberg'schen zu Grunde.

Nr. 1 und 2 sind nur auf Sinusschwingungen, 3 und 4 auf die Gesamtenergie jeder Schwingungsform anwendbar.

Über mechanische Wirkungen von Schallwellen vgl. auch Dvorak, Pogg. Ann. 157, 42. 1876, Wied. Ann. 3, 328. 1878.

Alle Methoden vereinfachen sich, wenn es nur auf relative Messungen ankommt. Eine hierfür bequeme Methode s. Sieveking und Behm, Ann. d. Ph. 15, 793. 1904. Vgl. auch die Messung der relativen Intensität der Partialtöne eines Klanges mit dem Phonographen, L. Hermann, Pflüger's Archiv 53, 1. 1883. — Über den Vorschlag zu einer Methode mit Telephon und elektrischem Detektor (Molybdenit) s. Pierce, Proc. Am. Acad. 43. 377. 1908.

Kapillarität. Reibung. Diffusion.

58. Bestimmung einer Kapillarkonstante (Oberflächenspannung).

Zahlentabellen z. B. bei Pockels, Winkelmann Handb. 2. Aufl. 1908, I, 1165. — S. auch Tab. 18.

Die Kapillarkonstante α einer Flüssigkeit ist das Flüssigkeitsgewicht, welches von der Längeneinheit der Berührungslinie der Oberfläche mit einer vertikalen, vollkommen benetzten Wand getragen wird. — In einer Kugeloberfläche vom Halbmesser ϱ bewirkt die Krümmung einen nach der konkaven Seite gerichteten Kohäsionsdruck $\alpha \cdot 2/\varrho$. Bei anderer Gestalt mögen an einem Punkte der Oberfläche ϱ_1 und ϱ_2 den kleinsten und größten Krümmungshalbmesser bedeuten; dann beträgt hier der Krümmungsdruck (Laplace'sches Gesetz) $\alpha(1/\varrho_1 + 1/\varrho_2)$.

Ist die Fläche nach beiden Seiten gekrümmt (Sattelfläche), so ist der Druck nach der Seite des kleineren Hauptkrümmungsradius (ϱ_1) gerichtet und beträgt $\alpha(1/\varrho_1 - 1/\varrho_2)$.

Praktisch drückt man meist die Längen in mm, die Kräfte oder getragenen Gewichte in mg-Gewicht aus, d. h. man mißt α in mg-Gew./mm.

In CGS-Einheiten, also in Dyne/cm ausgedrückt ist die K.-K. $[\alpha]$ eine 9,81 mal größere Zahl; $[\alpha] = 9{,}81\,\alpha$. Denn es kommt bei dem Übergange von mm zu cm der Faktor 10, von mg zu gr der Faktor 1/1000, endlich vom Grammgewicht zur Dyne der Faktor $g = 981$.

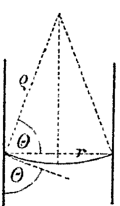
Kapillare Steighöhe H in einem engen kreiscylindrischen Rohre. Der Radius r sei so klein, daß die Höhenunterschiede im Meniskus vernachlässigt werden können. Die Benetzung sei vollkommen, d. h. der Randwinkel $= 0$. Dann gilt, wenn s das sp. Gewicht ist,

$$H = 2\,\alpha/(r \cdot s).$$

(Die Proportionalität mit $1/r$ heißt wohl das Gesetz von Jurin; 1718).

Beweis. Innerer Umfang $= 2r\pi$, gehobenes Gewicht $= r^2\pi\,Hs$; also trägt die Längeneinheit des Umfangs das Gewicht $\frac{1}{2}rHs$, welches $= \alpha$ sein muß. — Oder: Da die Unterschiede des hydrostatischen Druckes in der Oberfläche zu vernachlässigen sind, so muß daselbst der Kohäsionsdruck, also die Oberflächenkrümmung konstant sein, d. h. die Oberfläche muß Kugelgestalt haben. Da ferner der Randwinkel $= 0$ sein soll, so bildet die Oberfläche eine Halbhohlkugel vom Radius r. Folglich ist ihr, nach oben gerichteter Krümmungsdruck $= \alpha \cdot 2/r$. Dieser muß gleich dem (negativen) hydrostatischen Druck Hs sein.

Eine andere Definition nennt, unter der Bezeichnung a^2, das Produkt rH oder $2\alpha/s$ Kapillarkonstante (Steighöhenkonstante; spez. Kohäsion). Die beiden Definitionen stehen also im Verhältnis $\alpha:a^2=s:2$.



Steighöhe in einem engen, unvollkommen benetzten Rohr mit dem Randwinkel Θ. Der vorige Ausdruck ist mit $\cos\Theta$ zu multiplizieren, also $H = 2\alpha\cdot\cos\Theta/(rs)$. Denn der Krümmungshalbmesser der Oberfläche ist (Fig.) jetzt $\varrho = r/\cos\Theta$, also gilt $\alpha\cdot 2\cos\Theta/r = Hs$.

Kapillar-Depression (Quecksilber) tritt ein für $\Theta > 90°$, wodurch $\cos\Theta$, also auch H negativ wird.

Ebene, vollkommen benetzte Vertikalwand. Die Theorie ergibt für die Steighöhe h, gerechnet von einem ebenen Teil der Oberfläche, $h=\sqrt{2\alpha/s}$. — Das längs einer Berührungslinie von der Länge L gehobene Flüssigkeitsvolumen V ist, gemäß der Definition von α, $V=\alpha\cdot L/s$. Für die Randerhebung in einem weiten benetzten Gefäß vom Umfang L gelten nahe dieselben Ausdrücke.

I. Aus der Steighöhe in engen Röhren.

Ein kreiscylindrisches Rohr wird sorgfältig (mit konzentrierter Schwefelsäure, Chromsäure, Alkalilösung, Alkohol, alles sorgfältig frei von Fett) gereinigt, so daß es vollkommen benetzt, d. h. daß der Randwinkel = Null wird, dann sofort mit der zu untersuchenden Flüssigkeit nachgespült und in diese vertikal eingesetzt. Besonders Wasser und viele wässrige Lösungen sind schwer zu vollkommener Benetzung zu bringen; die Glassorte hat einen Einfluß auf die Schwierigkeit. Vor einer Ablesung der Steighöhe hebt man das Rohr, so daß der Meniskus an einer vorher länger benetzten Stelle liegt, und liest rasch ab. H bedeute die Steighöhe der Flüssigkeit, s ihr sp. Gewicht und r den inneren Halbmesser des Rohres in mm, dann ist nach dem früheren

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\, rHs \text{ mg-Gew./mm.} \qquad 1.$$

Verschwindet r nicht gegen H, so ist $H=H_0+\frac{1}{3}r$ zu rechnen, H_0 bis zum tiefsten Punkte des Meniskus gemessen.

Weitere, vollkommen benetzte Kreisröhren. Solange $(r/H)^3$ gegen 1 verschwindet, gilt $H=H_0+\frac{1}{3}r-0{,}129\,r^2/H_0$ (Volkmann).

Für größere Weiten, bis etwa 8 mm bei Wasser, kann man als Meniskusfläche angenähert ein halbes Rotationsellipsoid von der halben Drehaxe $b=6\alpha r/(6\alpha+r^2 s)$ annehmen und $H=H_0+\frac{1}{3}b$ setzen (G. Hagen).

(Das Volumen eines solchen Meniskus ist $=\frac{1}{3}\pi r^2 b$, nahe $=r^2 b$ cmm.)

Kapillarkorrektion für manometrische Zwecke (**36**, **37**). Die Druckhöhe einer benetzenden Flüssigkeit wird, selbst unten am Meniskus,

zu hoch abgelesen. Um die äquivalente Einstellung einer ebenen Oberfläche zu erhalten, hat man, wie sich aus dem vorigen ergibt, von der Ablesung abzuziehen $\frac{2\alpha}{rs} - \frac{1}{3}b$.

Über die Kap.-Korrektion bei Quecksilber s. **36** I u. Tab. 18a.

Bestimmung des Halbmessers r. Ein Quecksilberfaden von der Länge l mm bei der Temperatur t wiege m mg, dann ist in mm (die Rücksichtnahme auf den Meniskus s. in **24**)

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{\pi}\frac{m}{l}\frac{1+0{,}000182\,t}{13{,}60}\right)}; \text{ z. B. für } 18^0 \quad r = 0{,}1532\sqrt{\frac{m}{l}}.$$

Maßgebend ist der Halbmesser am oberen Ende der gehobenen Säule, so daß man die Länge des Quecksilberfadens zu messen hat, während seine Mitte mit dieser Stelle zusammenfällt. Die kreiscylindrische Gestalt läßt sich am abgebrochenen Ende oder auch mit einiger Annäherung nach S. 103 prüfen.

Über Messung in hoher Temp. s. Ramsay u. Shields, ZS f. phys. Ch. 12, 447. 1893.

II. Mit der Wage (Wilhelmy).

Ein dünnes, etwa 25 mm breites, am unteren Ende platiniertes Platinblech hängt aufrecht an der Wage und wird, nachdem der untere Rand benetzt worden ist, äquilibriert. Man nähert ihm die Flüssigkeitsoberfläche, bis sie diesen Rand berührt, wenn die Wage einsteht.

Die jetzt nach unten ziehende Oberflächenspannung wird nun allmählich durch Gewichtstücke kompensiert, bis eben ein Abreißen erfolgt. Aus dem Abreißgewicht P mg und der Länge l mm der Kante folgt

$$\alpha = \frac{P}{2l}\frac{\text{mg}}{\text{mm}}. \qquad 2.$$

Zur raschen Messung eignet sich eine Mohr'sche Wage. In der Figur S. 69 hängt man links das Blech, rechts ein dieses äquilibrierendes Gegengewicht. Betragen die Reitergewichte wie gewöhnlich 5 gr, 0,5 gr..., so kann man mit einem 25 mm breiten Blech, bis auf die Kommastellung, α direkt ablesen.

III. Aus der Gestalt einer freien Oberfläche; Luftblasen oder Flüssigkeitstropfen (Laplace, Quincke).

1. Luftblasen. Die Flüssigkeit befinde sich in einem Troge mit vertikaler Planwand. Man erzeugt unter einer eingetauchten horizontalen Platte eine breite Luftblase (20 mm oder mehr) und mißt die Höhe h

eines Punktes weitester horizontaler Ausbauchung über dem, als eben vorausgesetzten tiefsten Teil der Blase; dann ist

$$\alpha = \tfrac{1}{2} s h^2. \qquad 3.$$

2. Tropfen. Eine Flüssigkeit, welche auf ebener Unterlage einen nicht benetzenden breiten Tropfen bildet, schätzungsweise auch ein geschmolzenes Metall, dessen Tropfen auf einer erwärmten Platte erstarrt sind, läßt sich ebenso untersuchen. h bedeutet die Höhe der Kuppe über der größten horizontalen Ausbauchung.

Man mißt diese Höhen mit einem kleinen Kathetometer.

Über Ausführung und Korrektion auf unendliche Breite der Blasen oder Tropfen vgl. Quincke, Pogg. Ann. 160, 354. 1877; über kleinere Blasen Lohnstein, Wied. Ann. 53, 1062. 1894; Siedentopf, ib. 61, 235. 1897; Heydweiller, ib. 65, 311. 1898.

Randwinkel. Kennt man noch die ganze Höhe h' der Blase oder des Tropfens, so wird der Randwinkel Θ zwischen Flüssigkeit und Platte erhalten aus

$$\cos \tfrac{1}{2}\Theta = h'/(h\sqrt{2}).$$

3. Aus der Gestalt eines Meniskus (Eötvös). Man mißt die Neigung der Tangenten an zwei in verschiedener Höhe liegenden Punkten durch Lichtreflexion. Über Theorie und Ausführung s. Eötvös, Wied. Ann. 27, 452. 1886; Géza Zemplén, Ann. d. Ph. 20, 783. 1906.

IV. Aus Oberflächenwellen (L. Matthiessen; Rayleigh).

Oberflächenwellen auf Flüssigkeiten werden teils durch die Schwere, teils durch die Oberflächenspannung fortbewegt. Bedeutet λ die Wellenlänge, N die Schwingungszahl, so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit u oder $N\lambda$ gegeben (W. Thomson) durch

$$u^2 = N^2\lambda^2 = g\left(\frac{\lambda}{2\pi} + \frac{\alpha}{s}\frac{2\pi}{\lambda}\right). \qquad 4.$$

Bei sehr kurzen Wellen von wenigen mm Länge kann man das erste, der Schwere entsprechende Glied vernachlässigen.

Man bringe zwei leichte Stäbchen, welche an die Enden einer Stimmgabel von bekanntem N (57; Tonhöhe zwischen c und c_1 etwa) angeklebt sind, mit der Oberfläche der Flüssigkeit in Berührung und schlage die Stimmgabel an. Dann bilden sich zwischen den Spitzen stehende Wellen, deren λ (das doppelte des Abstandes benachbarter Wellenberge) mit einem Zirkel und Maßstab in mm ausgemessen wird. Es ist dann $u^2 = N^2\lambda^2 = \alpha \cdot \frac{2\pi g}{s\lambda}$, also, $g = 9810\,\mathrm{mm/sec^2}$ gesetzt,

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} s \frac{\lambda^3 N^2}{g} = \frac{1}{61600} s \lambda^3 N^2 \frac{\text{mg-Gew.}}{\text{mm}}. \qquad 5.$$

Matthiessen, Wied. Ann. 38, 118. 1889, wo $T = \alpha/s$ gesetzt ist. — Verflüssigte Gase: Grunmach, Ann. der Ph. u. a. 22, 107. 1907. — Ein Verfahren mit einer Spitze und Blitzbeleuchtung bei Rayleigh, Ph. Mag. 30, 386. 1890.

V. Aus dem Maximaldruck bei der Bildung kleiner Tropfen und Blasen (nach Cantor).

Aus einer in die Flüssigkeit tauchenden vertikalen Kapillare mit kreisförmigem, aus einer scharfen Schneide bestehendem Rande vom Halbmesser r werde eine Luftblase in die Flüssigkeit langsam ausgetrieben. Der dabei zum Überwinden der Oberflächenspannung nötige Überdruck im Endquerschnitt der Kapillare hat für eine bestimmte Blasengröße ein Maximum p, welches bei sehr enger Röhre offenbar für die Halbkugelform erreicht ist, weil bei dieser die Krümmung der Blase den größtmöglichen Betrag erreicht. Und zwar gilt dann $p = \alpha \cdot 2/r$. Vgl. den Eingang.

p wird manometrisch abgelesen, wobei der als Ballast wirkende hydrostatische Druckunterschied zwischen der Kapillaröffnung und der freien Flüssigkeitsoberfläche abgezogen wird.

Für einen sehr kleinen Halbmesser würde nach obigem die Kapillarkonstante merklich $\alpha = \frac{1}{2} r p$ sein. Wegen der Schwere der Flüssigkeit (sp. Gew. $= s$) kommt nach Cantor der mit wachsendem r sich von Eins entfernende Korrektionsfaktor $1 - \frac{2}{3}\frac{sr}{p} - \left(\frac{sr}{p}\right)^2$ hinzu.

Näheres, auch über die Gestalt der Rohrenden, über verwandte Methoden und Anwendung auf gegenseitige Kap.-Konst. von Flüssigkeiten bei Cantor, Wied. Ann. 47, 399. 1892; Feustel, Ann. d. Ph. 16, 61. 1905.

VI. Durch Abtropfen (Tate, Quincke, Traube, Rayleigh, Lohnstein).

Der Tropfen, welchen eine horizontale kreisförmige Fläche vom Halbmesser r mm tragen kann, wiegt (vgl. den Eingang) höchstens $2\pi r \cdot \alpha$ mg; diese Grenze wird aber nur unter besonderen Umständen erreicht. Abfallende Tropfen sind stets kleiner, und zwar in einem Verhältnis, welches vom Halbmesser r der Tropffläche und von der Kap.-K. abhängt. Die folgende Tabelle gibt den empirisch und theoretisch abgeleiteten Faktor Φ, welcher anstelle von 2π in den schematischen Ausdruck $2\pi r \alpha$ einzusetzen ist.

a^2 bedeutet die spez. Kohäsion der Flüssigkeit (S. 252); $a = \sqrt{(2\alpha/s)}$.

$\frac{r}{a} =$ 0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
$\Phi =$ 4,45	4,24	4,12	4,03	3,97	3,90	3,84	3,80	3,78	3,80	3,83

Um die Tabelle zu benutzen, berechnet man zunächst mit einem genäherten Wert von Φ (z.B. $\Phi = 4$) a und r/a. Zu letzterem sucht man in der Tabelle Φ. Wenn dies von dem zuerst angenommenen erheblich abweicht, so wiederholt man das Verfahren mit dem jetzt gefundenen Φ.

Bei dem Versuch läßt man die Flüssigkeit aus einer vertikal stehenden, unten eben geschliffenen und daselbst sehr gut benetzten Kapillarröhre mit dicker Wandung sehr langsam austropfen und wägt eine gezählte Menge von Tropfen. Beträgt das Gewicht des einzelnen Tropfens m mg und der äußere Halbmesser der Röhre r mm, so ist $\alpha = m/(r\Phi)$.

Um geschmolzene Metalle genähert so zu untersuchen, schmelzt man

das untere Ende eines Drahtes in einer kleinen Flamme von möglichst niedriger Temperatur, bis der Tropfen abfällt.

Vgl. Rayleigh, Phil. Mag. (5) 48, 321. 1899; Lohnstein, Ann. d. Ph. 20, 237. 1906; 22, 767. 1907; ZS f. ph. Ch. 64, 686. 1908; F. K., Ann. d. Ph. 20, 798; 22, 191. Guye u. Perrot, Arch. sc. phys. (4) 11, 225 u. 345. 1901; (4) 15, 132. 1903; Morgan u. Stevenson od. Higgins, J. Amer. Chem. Soc. 30, 360 u. 1055. 1908; ZS f. phys. Ch. 63, 151; 64, 170. 1908: Tropfflächen zwischen Schneiden. — Bei G. u. P. sowie bei M. u. St. Literaturzusammenstellung.

Eine erhebliche Fehlerquelle ist der Einfluß geringfügiger, aus der Umgebung oder der Flüssigkeit stammender Oberflächenänderungen auf die Kap.-K., vor allem bei Wasser und Quecksilber. Durch beständiges Erneuern der Oberfläche sucht man dem zu begegnen; selbst die besseren Angaben schwanken aber bei Wasser und Quecksilber um reichlich 10 %.

Die beobachteten Oberflächenspannungen beziehen sich meist auf den Fall, daß die Flüssigkeiten von Luft, teilweise darauf, daß sie von ihrem gesättigten Dampf begrenzt werden.

Besondere Untersuchungen betreffen Grenzflächenspannungen zwischen zwei Flüssigkeiten; vgl. z. B. Pockels l. c., S. 1182.

Temperatureinfluß. Mit steigender Temperatur sinkt α, bei flüssigen Metallen sehr wenig, bei Wasser um etwa $1/5$ %, bei anderen Körpern bis zu $1/2$ % auf $+1°$. — Ist v das Molekularvolumen (chem. Mol.-Gew./Dichte), so nennt man $\alpha v^{2/3}$ die molekulare Oberflächenenergie. Der Temp.-Koeff. $d(\alpha v^{2/3})/dt$ ist für viele Flüssigkeiten nahe gleich und konstant $= -0{,}23$ (Eötvös). Die kleineren Werte anderer Flüssigkeiten werden aus einer Assoziation der Moleküle erklärt. Über den Zusammenhang mit der kritischen Temperatur (wo die Oberfl.-Spannung aufhört) vgl. Eötvös, Ramsay u. Shields, van der Waals, Verschaffelt.

Über Beziehungen zwischen Dampfwärme und sp. Kohäsion vgl. Walden, ZS f. ph. Ch. 65, 257. 1908; daselbst auch viele Zahlen.

58a. Bestimmung des Reibungskoeffizienten einer Flüssigkeit durch Kapillarausfluß (Poiseuille, Hagenbach).

Reibungskoeffizient, Zähigkeits- oder Viskositätskonstante (η) heißt die Kraft, welche der Bewegung einer Flüssigkeitsschicht von der Flächeneinheit dadurch entgegenwirkt, daß die Schicht sich mit der stationären Geschwindigkeit 1 im Abstande 1 (eigentlich mit der unendlich kleinen Geschwindigkeit u im Abstande u) vor einer ruhenden Schicht parallel vorbei bewegt. Die Längen pflegen in cm gemessen zu werden, die Kraft entweder im CGS-System, also in Dynen (Anh. 7), oder in gr-Gewicht. In CGS-Einheiten ausgedrückt $[\eta]$ ist der R.-K. demnach $g = 981$ mal größer als das auf gr-Gewicht bezogene η.

Zur Messung wird meistens der Ausfluß durch enge Röhren gebraucht.

Poiseuille'sches Gesetz. Durch ein Kreiskapillarrohr vom Halbmesser r, dem Querschnitt q (24) und der Länge l, an deren Enden die konstante Druckdifferenz p herrscht, fließt in der Zeit τ ein Flüssigkeitsvolumen v

$$v = \frac{1}{\eta}\frac{\pi}{8}\frac{r^4}{l}p \cdot \tau \quad \text{oder} = \frac{1}{\eta}\frac{1}{8\pi}\frac{q^2}{l}p \cdot \tau. \qquad 1.$$

Poiseuille, Mém. de l'Inst. 9, 433. 1846; auch Pogg. Ann. 58, 424. 1843; Hagenbach, Pogg. Ann. 109, 385 u. 402. 1860.

In Gl. 1 wird vorausgesetzt, daß die Flüssigkeit an den Rohrwänden ruht. Gesetzt, es gäbe (bisher nicht sicher nachgewiesene) Ausnahmen hiervon, d. h. die Reibungskonstante ε zwischen Wand und Flüssigkeit sei nicht merklich unendlich groß, so wäre statt r^4 einzusetzen $r^4 + 4r^3\eta/\varepsilon$ (Helmholtz). Vgl. Helmholtz u. Piotrowski, Wiener Ber. 40 (2), 607. 1860 (Helmh. Abhandl. I, 172). Ferner, auch über Lit. (Warburg, Couette, Petrow, W. König, Mützel, Allen), R. Ladenburg, Ann. d. Ph. 27, 157. 1908.

η nimmt mit der Temperatur stark ab. Bei 18° gilt für Wasser $[\eta] = 0{,}01055\ \text{cm}^{-1}\,\text{gr}\,\text{sec}^{-1}$ oder $\eta = 0{,}00001075$ gr-Gew. sec cm^{-2}; auf $+1^0$ etwa $-2{,}5\,\%$. Siehe Tab. 19; andere Flüssigkeiten 19a. — Man nennt $1/\eta$ wohl Fluidität.

1. Absolute Bestimmung.

Ein kreiscylindrisches Kapillarrohr ist mit einem Behälter verbunden, der dieselbe Flüssigkeit enthält. Um die Gegenkraft der Oberflächenspannung eines Tropfens zu vermeiden und den durch Bewegungsenergie bedingten Druckverlust (vgl. unten) möglichst zu verringern, erfolgt der Austritt aus dem Rohre am besten in ein weiteres Gefäß. Druckhöhe h ist dann die Höhendifferenz beider freien Oberflächen. Wenn h nicht konstant ist, so gilt das zeitliche Mittel während des Versuchs. Ist s das spez. Gew. der Flüssigkeit, so beträgt der Druck hs; streng $h(s - \lambda)$, wo λ das sp. Gew. der Luft. Fließt in τ Sekunden das Volumen v aus, so ist nach Gl. 1 in Gewichtsmaß

$$\eta = \frac{1}{8\pi}\frac{q^2 hs\tau}{lv} \quad \text{oder} = \frac{\pi}{8}\frac{r^4 hs\tau}{lv}\,\frac{\text{gr-Gew. sec}}{\text{cm}^2}. \qquad 2\text{a}.$$

In CGS-Einheiten kommt, 981 mal größer,

$$[\eta] = \frac{981}{8\pi}\frac{q^2 hs\tau}{lv} = 39{,}03\,\frac{q^2 hs\tau}{lv}\ \text{cm}^{-1}\,\text{gr}\,\text{sec}^{-1}. \qquad 2\text{b}.$$

Die Ausführung kann in verschiedener Form geschehen. Am einfachsten ist ein vertikales Kapillarrohr mit einem oben angeblasenen, oder, wenn man genauer messen will, durch Stöpsel- oder Schlauchverbindung angesetzten Behälter; Fig. f. S. Unten mündet das Rohr in ein Gefäß, welches Flüssigkeit enthält, aus der man durch Aufsaugen den Behälter füllt. Man läßt zwischen zwei Marken ausfließen und beobachtet die Zeit.

Das Volumen zwischen den Marken wird durch Auswägen (**23**) bestimmt. — Als Druckhöhe gilt die mittlere zeitliche Höhe vom unteren bis zum oberen Niveau der Flüssigkeit während des Versuchs; man markiere am Behälter den Stand der Flüssigkeitsoberfläche bei halber Füllung. Ist die Höhe des Behälters nicht klein gegen die Druckhöhe, so kommt wegen der ungleichen Zeit des Abfließens der oberen und unteren Hälfte eine etwas kleinere, als die bis zu jener Marke gemessene Höhe h in Rechnung. Für einen cylindrischen Behälter von der Länge l, bez. eine Kugel vom Halbmesser r ziehe man von h ab $\frac{1}{12} l^2/h$ bez. $\frac{1}{20} r^2/h$.

Die neben gezeichnete Anordnung läßt sich in ein Bad stellen; durch einen gut schließenden Kautschukstopfen tritt in das Vorratsgefäß das Reibungsrohr und ein Rohr für Luftaustritt.

Die Rohrdimensionen wird man nach der Zähigkeit des Stoffes verschieden wählen. Je enger, desto vorsichtiger muß man gegen feste Teilchen in der Flüssigkeit sein. Weitere und besonders zugleich kürzere Röhren können Fehler geben, weil die Formel ungenau wird; vgl. unten.

Beispiel. Volumen $v = 10{,}31$ cm^3; Rohrlänge $l = 30{,}14$ cm; 26,43 cm des Rohres faßten 1,092 gr Hg von 18^0; also Querschnitt

$$q = \frac{1{,}092}{26{,}43 \cdot 13{,}596\,(1 - 0{,}00018 \cdot 18)} = 0{,}003049 \text{ cm}^2.$$

Wasser von 18,7^0: Druckhöhe $h = 35{,}26$ cm. Ausflußzeit $\tau = 253{,}5$ sec. Also

$$\eta = \frac{1}{8\pi} \frac{0{,}003049^2 \cdot 35{,}26 \cdot 0{,}9985 \cdot 253{,}5}{30{,}14 \cdot 10{,}31} = 0{,}00001062 \text{ gr-Gew. sec/cm}^2;$$

$$[\eta] = 0{,}01042 \text{ cm}^{-1} \text{ gr sec}^{-1} \text{ oder Dyne sec/cm}^2.$$

Größere Drucke, wenn z. B. bei zähen Flüssigkeiten die eigene Schwere nicht genügt, erzeugt man mittels einer künstlichen Atmosphäre aus komprimierter Luft.

Fehlerquellen. Die Voraussetzung des P.-schen Gesetzes, daß die von den Druckkräften geleistete Arbeit ganz auf das Überwinden der Reibung paralleler Stromfäden in der cylindrischen Kapillare verwendet werde, kann durch die folgenden Umstände verletzt werden, deren Eintreten den nach der Formel berechneten R.-K. zu hoch ausfallen läßt.

Bewegungsenergie. Fließt die Flüssigkeit unten in einem Strahle in die Luft aus, so nimmt das Volumen v, welches in der Zeit τ austritt, die Bewegungsenergie $sv^3/(q^2\tau^2)$ mit, d. h. von der ganzen Arbeit $ghsv$ den Bruchteil $\delta = \frac{v^2}{ghq^2\tau^2}$; um denselben Bruchteil also ist die Reibungsarbeit zu groß berechnet worden, d. h. das oben berechnete η wäre mit $1 - \delta$ zu multiplizieren. Damit δ kleiner wird als 1/1000, muß $l > \frac{1000}{8\pi} \frac{s}{[\eta]} \frac{v}{\tau}$ sein; vgl. Gl. 2b. Im obigen Beispiel ist $\delta = 0{,}0051$.

Beweis. Bedeutet U die mittlere Geschwindigkeit, u die einzelne, für den Halbmesser ϱ geltende (an der Wand verschwindende), so gilt

(Hagenbach, l. c. S. 396) $u = 2U(r^2 - \varrho^2)/r^2$. — Durch den Elementarring vom Halbmesser ϱ und von der Dicke $d\varrho$ geht in der Zeit τ die Masse $dm = su\tau \cdot 2\pi\varrho\, d\varrho = 4\pi s U\tau(r^2 - \varrho^2)/r^2 \cdot \varrho\, d\varrho$ mit der lebendigen Kraft $\frac{1}{2} dm \cdot u^2 = 8\pi s U^3 \tau \cdot r^{-6}(r^2 - \varrho^2)^3 \varrho\, d\varrho$. Da nun $\int_0^r (r^2 - \varrho^2)^3 \varrho\, d\varrho = \frac{1}{8} r^8$ (Tab. 50a), so wird die gesamte Bewegungsenergie im Querschnitt $= \pi s U^3 \tau r^2$. Hierin $\pi r^2 = q$ und $U = v/q\tau$ eingesetzt, entsteht der gesuchte Wert $sv^3/q^2\tau^2$.

Die Korrektion ist nicht anzuwenden auf den Fall, daß die Austrittsöffnung der Kapillare in eine größere Flüssigkeitsmenge mündet. Verbreitert sich der Strahl hier so, wie er bei dem Eintritt sich verengt hat, ohne Wirbel, so heben die Druckänderungen, die mit dem Entstehen und dem Verschwinden der Energie verbunden sind, sich auf. Die zur Erhaltung etwa auftretender Wirbel verbrauchte Arbeit ist klein und erreicht jedenfalls nicht die eben berechnete Bew.-Energie.

Reibung außerhalb der Röhre. Die Stromfäden am Ein- und Ausgang entsprechen einer, vom Durchmesser (d) und von der Form der Rohrenden, sowie von Geschwindigkeit, Reibung und Dichte der Flüssigkeit abhängigen, also nicht allgemein angebbaren Verlängerung der Kapillare. Aus Poiseuille's Versuchen ($d = \frac{1}{120}$ bis $\frac{1}{15}$ cm), bei denen die Rohrenden sich rasch erweiterten, kann geschlossen werden, daß sein Gesetz auf 1 Promille giltig bleibt, wenn $l/d \geqq (2000\, Usd[\eta]^{-1})^{1/2,08} + 4{,}5$. (Hieraus berechnet sich für obiges Beispiel die geforderte Länge $= 20$ cm.) — Vgl. Poiseuille, l. c.; Grüneisen, Wiss. Abh. P. T. R. IV, 151. 1905.

Eliminierung der Rohrenden (Couette). Man schaltet zwei Kapillaren verschiedener Länge l_1 und l_2, aber von gleicher Endbeschaffenheit und den möglichst gleichen Querschnitten q_1 und q_2 zwischen drei Behälter hintereinander. In der Zeit τ fließe durch jede das Volumen v, während die konstanten Druckdifferenzen p_1 und p_2 sind; dann kommt $\eta = \frac{1}{8\pi} \frac{\tau}{v} \frac{q_1^2 p_1 - q_2^2 p_2}{l_1 - l_2}$. — Couette, Ann. chim. phys. (6) 21, 469. 1890.

Kritische Geschwindigkeit; Reynolds 1883. Für den Strömungszustand in einem Rohr ist charakteristisch die Größe $Usd/[\eta]$. Wenn diese, alle Teile in CGS gemessen, den empirisch gefundenen kritischen Wert von nahe 2000 (Reynolds) überschreitet, so wird die, dem P. Gesetze zu Grunde liegende Strömung in parallelen Fäden (Laminarströmung) labil und geht dann aus irgend einem Anlaß in wirbelnde (turbulente) Strömung über. Man kann dies erkennen, wenn man zu der Flüssigkeit dicht vor ihrem Eintritt in das Rohr etwas Farbstoff aus einem Kapillarröhrchen zufließen läßt; auch äußert der Wechsel sich darin, daß der aus dem Rohr frei austretende, bei Laminarbewegung glatte Strahl trüb wird und sich verlangsamt.

Die Druckdifferenz p zwischen zwei um l auseinanderliegenden Querschnitten eines längeren kreiscylindrischen, d cm weiten Rohres läßt sich nach Reynolds in allgemeiner Form ausdrücken durch

$$p = 32\, \frac{Ul[\eta]}{d^2}\, f\left(\frac{Usd}{[\eta]}\right).$$

Im Giltigkeitsbereich des P. Gesetzes ist die Funktion $f = 1$. Wird die mittlere Geschw. U größer als 1,325 mal die kritische (d. h. $Usd/[\eta] > 2650$), so hat nach Reynolds f wieder eine einfache Form, nämlich $f = \text{const.}(Usd/[\eta])^n$, wo n zwischen 0,72 für glatte und 1,0 für sehr rauhe Wände (mit Sinterabsatz) liegt. Für $n = 1$ wird p proportional U^2 und von η unabhängig.

Vgl. O. Reynolds, Phil. Tr. (A) 174, 935. 1883; 186, 123. 1895. Ferner Couette l. c.; Lorentz, Versl. Akad. Amst. 6, 28. 1897; auch Barnes u. Coker, Proc. R. S. 74, 341. 1905; Grüneisen, Wiss. Abh. d. P.T.R. IV, 153. 1905.

Plastische (sehr zähe) Körper. Hier sind, wie aus obigem hervorgeht, weite Rohre zulässig; sehr enge dagegen bedingen Fehlerquellen. Vgl., auch über Lit., z. B. Reiger, Ann. d. Ph. 19, 985. 1906; Glaser, ib. 22, 694. 1907; auch Ladenburg, ib. 22, 287. — Die Temp. äußert meist einen ungeheueren Einfluß.

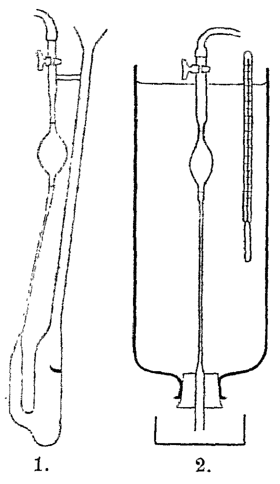
2. Relative Bestimmung.

Man benutzt die Anordnung S. 258 oder eine der nachfolgenden; aber anstatt sie auszumessen, vergleicht man die Ausflußzeit mit derjenigen einer bekannten Flüssigkeit (Wasser; vgl. Tab. 19). Sind τ und τ' die Zeiten, s und s' die spezifischen Gewichte, so verhalten sich die Reibungskoeffizienten

$$\eta : \eta' = s\tau : s'\tau'.$$

Unterscheidet sich s von s' erheblich, so ist der Auftrieb in der Luft (sp. Gew. $= \lambda$) zu berücksichtigen, indem man $\eta : \eta' = (s - \lambda)\tau : (s' - \lambda)\tau'$ setzt.

Über die zur genauen Giltigkeit des Gesetzes geforderten Dimensionen vgl. S. 258. — Korrektionen fallen weg, weil die Geschwindigkeiten in den freien Oberflächen klein sind, und falls die Erweiterungen der Rohrenden schlank verlaufen, so daß keine Wirbel entstehen.


1. 2.

Gewundene Kapillaren gestatten bei geringer Ausdehnung größere Querschnitte; das Poiseuille'sche Gesetz gilt indessen nur für sehr kleine Geschwindigkeiten. Vgl., auch über ein Korrektionsverfahren, Grüneisen l. c.

Die vorausgesetzte konstante Höhenstellung der oberen Birne zum unteren Anfangsniveau ist am leichtesten bei gegenseitiger Vertikalstellung zu verbürgen. Das konstante Anfangsniveau kann nach einer unten angebrachten Marke oder eingeschmolzenen Spitze (Fig. 1) beurteilt werden, am genauesten durch Einfüllen je eines mit $s - \lambda$ proportionalen (vgl. oben) Gewichtes. — Am leichtesten her-

stellbar ist die Anordnung 2 mit einem unten etwas erweiterten, durch einen Kautschukstopfen gedichteten Rohr. — Nr. 1 wird in ein Bad mit Thermometer gebracht.

Die Zeitbestimmungen werden genauer, wenn das Rohr um die Marken herum nicht zu eng ist, so daß der Meniskus mehr als 1 sec braucht, um diese gleichförmige Strecke zu durchlaufen. — Je enger das Rohr, um so mehr ist zu beachten, daß nicht feste Teilchen in die Kapillare kommen.

Hähne müssen so weit sein, daß die Luftreibung nicht in Betracht kommt. Die angesaugte Flüssigkeit soll den Hahn nicht berühren. — Erhebliche Fehler können aus Tröpfchen entstehen, die sich bei ungleichmäßiger Benetzung zeitweilig an den Verjüngungsstellen bilden.

Das seitliche Einfüllrohr an Nr. 1 (durch einen Glassteg mit dem anderen Teil verbunden) soll so gestaltet sein, daß man ev. ein langes Trichterrohr durchschieben kann, mit dem man das Gefäß bis an die Marke füllt. In die Birne wird die Flüssigkeit vor jedem Versuch angesaugt, wozu oft die Wasserluftpumpe oder eine improvisierte ähnliche Vorrichtung bequem sein wird.

Über Messungen in hoher Temperatur s. Thorpe u. Rodger, Phil. Trans. (A) 185 II, 397. 1895; Heydweiller, Wied. Ann. 55, 561. 1895; 59, 193. 1896; Goodwin u. Mailey, Phys. Rev. 26, 28. 1908. — Arndt, ZS f. Elektroch. 1907, 578: geschmolzene Salze.

Andere Methoden. 1) Energieverbrauch einer in der Flüss. langsam bewegten, meist schwingenden, Masse; Scheibe, Kugel oder Cylinder (Coulomb 1802). Das log. Dekrement (27) ist prop. η. S. u. a. die Arbeiten von O. E. Meyer, Grotrian, W. König, Margules. Auch Couette, l. c.

2) Dämpfung eines mit Flüssigkeit gefüllten schwingenden Gefäßes. Vgl. O. E. Meyer, Wied. Ann. 43, 1. 1891; Mützel, ib. S. 15; Ladenburg, Ann. d. Ph. 27, 157. 1908.

3) Langsam absinkende Kugel (Durchm. $= D$ cm, Vol. $= V$ ccm, Masse $= M$ gr, Geschw. $= U$ cm/sec); nur für stark viskose Flüssigkeiten (Reib.-Koeff. $= [\eta]$ CGS, Dichte $= s$). Vorausgesetzt, daß $UsD/[\eta]$ klein gegen 1 ist, bewirkt die Reibung in einer ∞ ausgedehnten Flüssigkeit eine hemmende Kraft gleich $3\pi D[\eta]U$ Dyne (G. Stokes; Kirchhoff). Diese Kraft ist gleich der abwärts gerichteten Schwerkraft in Dynen, d. i. $= g(M - sV)$; somit $[\eta] = g(M - sV)/3\pi DU$. Cet. par. würde $[\eta]$ prop. $1/U$ sein. Man benutzt z. B. Stahlkugeln von Fahrradaxen.

Literatur, Kritik der Methode, besonders auch über die bei absoluten Bestimmungen sehr hohen Ansprüche an die Gefäßgröße, bei Ladenburg, Ann. d. Ph. 22, 287; 23, 447. 1907.

Gasreibung. Man bestimmt sie durch Kapillarausfluß oder durch die Dämpfung von Scheiben, die zwischen festen Scheiben schwingen; auch wohl von einer Kugel innerhalb einer Hohlkugel (s. Zemplén l. c. folg. S.).

Die Reibung eines Gases ist von der Dichte wesentlich unabhängig (Maxwell 1860). Sie wächst mit der Temp., nach Sutherland prop. $\frac{T^{\frac{1}{2}}}{1+c/T}$, wo c eine individuelle Konstante, T die abs. Temp. bedeutet.

Vgl. u. a. die Arbeiten von O. E. Meyer, Maxwell, Kundt u. Warburg, Warburg u. v. Babo, Puluj, von Obermaier, Schumann, Barus, 1866—1889. — Zusammenstellung bei O. E. Meyer, Kinetische Theorie der Gase, 2. Aufl. 1899, S. 171 ff. — Ferner u. A.: Rayleigh, Proc. R. S. 66, 68; 67, 137. 1900; H. Schultze, Ann. der Ph. 5, 140. 1901; Bestelmeyer, ib. 13, 944. 1904; Zemplén, ib. 19, 783. 1906; Hogg, Proc. Am. Ac. 40, 611. 1905; Fisher, Phys. Review 24, 385. 1907. Knudsen, Ann. d. Ph. 28, 75. 1909.

Über die krit. Geschw. bei Gasen s. Ruckes, Ann. d. Ph. 25, 983. 1908; über größere Geschwindigkeiten (Lit.) Fritzsche, Forsch. Arb. d. Ver. deut. Ing. Heft 60, 1908.

Zahlenmaterial und ausgedehnte Lit. über innere Reibung in Landolt-Börnst.-Meyerh. Tab. 3. Aufl., 68—101. 1905.

58b. Diffusion (Graham; Fick).

Gesetz von Ad. Fick; 1855. Unterschiede der Konzentration einer Lösung gleichen sich nach demselben Gesetz aus, wie Temperaturunterschiede in einem leitenden Körper. Bestehen also in zwei um dx auseinanderliegenden Querschnitten von der Größe q die Konzentrationen ϱ und $\varrho + d\varrho$, so wandert in der Richtung des Gefälles durch jeden Querschnitt in der Zeit dt die Menge dm des gelösten Stoffes $dm = kq \cdot (\partial \varrho / \partial x)\, dt$. Der Diffusionskoeffizient k hat die Dimensionen (Anh. 13c) $[l^2 t^{-1}]$ und wird z. B. in cm²/Stunde ausgedrückt. Sein Wert ist nach Lösungsmittel und gelöstem Stoff sehr verschieden, ändert sich aber auch mit der Konzentration und der Temperatur.

Aus obigem Gesetz (vgl. Fick, Pogg. Ann. 94, 59. 1855) folgt, wenn die Änderung nur nach der x-Axe besteht, die Gleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2} \qquad 1.$$

Die lange dauernden Versuche verlangen gegen die aus Strömungen entspringenden Fehler ein Zimmer oder großes Wasserbad von ausreichender Temperaturkonstanz. Thermostaten sind im allgemeinen bedenklich.

Bei der Messung wird in übereinander geschichteten Konzentrationen deren Änderung entweder während des Vorganges aus einer physikalischen Eigenschaft der Lösung (Lichtbrechung, elektromotorische Kraft) oder nachher durch chemische Analyse ermittelt.

1. Chemische Methode (Graham, Stefan).

In einem Cylinder mit horizontal ebenem (am einfachsten durch Quecksilber hergestelltem) Boden werden zwei abgemessene Mengen der in einander diffundierenden Flüssigkeiten, z. B. Lösung und Lösungsmittel, über einander geschichtet, wobei man unter

der leichteren, zuvor eingefüllten, die schwere mittels einer Pipette sich ganz langsam ausbreiten läßt. Nach einer gemessenen Versuchsdauer — zwischen mehreren Stunden und mehreren Tagen — wird der Inhalt schichtenweise in gleiche Volumina gesondert und analysiert. Für die auf der Integration der Gleichung 1 beruhende Ableitung des Diff.-K. hat Stefan Tabellen berechnet.

Stefan, Wien. Ber. 79, 184. 1879. Über Anordnung des Versuchs s. z. B. Arrhenius, ZS f. phys. Ch. 10, 51. 1892; Öholm, ib. 50, 309. 1904. — Für Gase: Loschmidt, Wien. Ber. 61 (2), 367; 62 (2), 468. 1870.

2. Elektrische Methode (H. F. Weber).

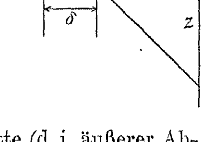
Anwendbar auf Salzlösungen mit umkehrbaren Elektroden aus dem Metall des Salzes.

Zwischen zwei horizontalen Elektroden befinden sich die in einander diffundierenden Schichten; man beobachtet den zeitlichen Verlauf der durch die Konzentrationsdifferenz an den Elektroden bewirkten elektrischen Spannung (**99**; **104**). Die Berechnung gründet sich auf Gl. 1. — Die Schichtung ist entweder mechanisch wie in Nr. 1, oder besser dadurch bewirkt worden, daß man zwischen nahe benachbarten Elektroden kurze Zeit einen elektrischen Strom übergehen ließ.

H. F. Weber, Wied. Ann. 7, 469 u. 536. 1879; Seitz, ib. 64, 759. 1898.

3. Optische Methode (Wiener).

Ein Lichtstrahl, der in ein geschichtetes Mittel parallel der Schichtung eintritt, krümmt sich nach der stärker brechenden Seite hin. Die Größe der Krümmung, d. h. der reziproke Krümmungshalbmesser, ist gleich dem relativen Gefälle $\frac{1}{n}\frac{dn}{dx}$ des Brechungsindex n; vgl. z. B. Wiener l. c., S. 106. Beim Durchsetzen eines Diffusionsgebietes von der Dicke δ erfährt ein Strahl hierdurch, wie leicht zu sehen ist, eine Richtungsänderung $=(\delta/n)\cdot dn/dx$, die bei dem Wiederaustritt aus der Flüssigkeit auf $\delta\cdot dn/dx$ steigt. Auf einen Schirm im optischen Abstand a von der Gefäßmitte (d. i. äußerer Abstand $+\frac{1}{2}\delta/n$; vgl. S. 106) auffallend ist der Strahl dann abgelenkt um die Höhe



$$z = a\delta\cdot dn/dx.$$

Diese Höhe z wird am einfachsten so gemessen: Ein um 45° gegen die Horizontale geneigter Spalt empfängt von einer starken Lichtquelle (Bogenlampe) paralleles, durch ein Strahlenfilter (**59**) homogen gemachtes Licht, welches vom Spalt auf eine Sammellinse und von da auf einen parallelwandigen Diffusionstrog (lichte Dicke $\delta = 2$ bis 3 cm) fällt. Im Abstande a ($1\frac{1}{2}$ bis 2 m) hinter

dem Troge befindet sich der Schirm; die obige Linse entwerfe auf diesem ein deutliches Bild AB des Spaltes. Nach dem Übereinanderschichten der beiden Flüssigkeiten verwandelt dieses Bild sich in eine Kurve von der Gestalt der Figur. z ist die obige Höhe, die sich nun durch den Diffusionsvorgang allmählich vermindert.

Über Messung mittels einer Fadenkreuzlupe vgl. unten Heimbrodt.

t bedeute die seit dem Beginne der Diffusion, d. h. seit dem Bestehen einer unstetigen Berührungsfläche verflossene Zeit und z die jetzt bestehende maximale Senkung der Kurve. Die Konzentrationsunterschiede seien nicht zu groß, so daß man zwischen der Änderung der Konzentration und des Brechungsverhältnisses Proportionalität annehmen kann. n_1 und n_2 seien die Brechungsindices der beiden Originalflüssigkeiten, z. B. des Lösungsmittels und der Lösung; δ und a bedeuten wie oben die Schichtdicke und den Schirmabstand.

Wir bezeichnen $(n_2 - n_1)^2 a^2 \delta^2 / 4\pi = C$; dann folgt aus der Integration der Gl. 1 der Diffusionskoeffizient $k = C/(z^2 t)$. Insofern aber der Nullpunkt der Zeitrechnung nicht genau festzustellen ist, beobachtet man zu zwei Zeiten t_1 und t_2 die Höhen z_1 und z_2 und rechnet

$$k = C \frac{1/z_2^2 - 1/z_1^2}{t_2 - t_1} \quad \text{oder} \quad = C \frac{1}{t_2 - t_1} \frac{z_1^2 - z_2^2}{z_1^2 z_2^2}.$$

Eine seitliche Verschiebung der Kurve während der Diffusion zeigt an, daß der Ort des maximalen Konzentrationsgefälles wandert, und bedeutet eine Abhängigkeit des Diffusionskoeffizienten von der Konzentration.

O. Wiener, Wied. Ann. 49, 105. 1893; Heimbrodt, Diss. Leipzig, 1903.

Theorie bei Boltzmann, Wied. Ann. 53, 959. 1894; Thovert, C. R. 133, 1197. 1901.

Wegen ausführlicher Darstellung, auch der Methoden für Gasdiffusion s. Waitz, Winkelm. Hdb., 2. Aufl. I, 1415. 1908.

Licht und Wärmestrahlung.

Über optische Konstanten s. Tab. 12a u. 22 bis 26. — Eine ausführliche Zusammenstellung mit Quellenangabe in: Recueil de Données numériques, publié par la Société Française de Physique; Optique, par H. Dufet, 3 Bde., Paris 1898—1900. — Wellenlängen der Spektrallinien von Dämpfen auch jährlich in den Reports der Brit. Assoc.

59. Lichtquellen. Spektrum.

Eingehend in Kayser, Handbuch der Spektroskopie, Bd. I—IV, Leipzig 1900—1908.

Weiße starke Lichtquellen sind außer der Sonne der Kalk- oder besser Zirkon-Brenner (Linnemann) im Sauerstoffgebläse und die elektrische Bogenlampe. Bogenlicht ist an ultravioletten Strahlen reicher als Sonnenlicht. — Auch Auer-Licht eignet sich oft, und als konstante, wenn auch nicht so weiße Quelle die Nernst-Lampe.

Licht von bestimmter Wellenlänge.

Es ist für viele Messungen gleichgiltig, ob man Licht durch Absorption bez. spektrale Zerlegung vor dem Eintritt in die Instrumente reinigt oder nach dem Austritt (vor dem Auge). Letzteres ist oft bequemer.

Farbig absorbierende Mittel („Strahlenfilter") sind die einfachsten, freilich unvollkommenen Hilfsmittel. Kräftig rotes Kupferoxydulglas wird häufig angewandt. Auch einzelne grüne Gläser des Handels oder Gelatineplatten sind brauchbar, besonders wenn man verschiedenfarbige Platten geeignet hintereinander stellt. Über Jenaer Farbgläser vgl. Zsigmondy, ZS f. Instr. 1901, 97; Grebe, ib. S. 105. Flüssigkeiten bei Landolt, Drehungsvermögen, S. 390. 1898: Rot „Kristallviolett 5BO" $+ K_2CrO_4$; Gelb $NiSO_4 + KMnO_4 + K_2CrO_4$; Grün $CuCl_2 + K_2CrO_4$; Hellblau „Doppelgrün SF" $+ CuSO_4$; Dunkelblau „Kristallviolett 5BO" $+ CuSO_4$. Das + Zeichen bedeutet Hintereinanderschalten. Näheres l. c.

Man prüft und definiert die resultierende Farbe mit dem Spektralapparat; **64**.

Glühende Metalldämpfe. Metallsalze, außer Na besonders noch Li und Tl (Tab. 22. 23; Fig. S. 277), werden in den Bunsen- oder einen größeren (Terquem-; Teclu-) Brenner eingeführt als Perlen an der Platin-Öse oder von Platin-Drahtkörbchen gehalten (Landolt-Brenner); in das Luft- oder Sauerstoff-Gebläse auch als gegossene Stäbchen. Das Chlorid oder Bromid, wegen Verknisterns vorher erhitzt (die Dämpfe greifen Metalle an), ist heller. Das Carbonat ist ausdauernder, leichter anzuschmelzen und für Lithium durch Ausschütteln des Pulvers mit Wasser leicht zu reinigen.

Auch Stäbchen aus Natronglas können dienen. Thallium, rasch verdampfend, in schwacher Gas- oder Alkoholflamme zu gebrauchen. Vgl. auch 64 II. — Nebenlicht, z. B. aus der Gasflamme selbst, sucht man durch Absorptionsmittel, z. B. farbige Gläser, für Na-Licht auch durch Lösungen von Kaliumbichromat + Uranosulfat zu beseitigen. Vgl. Landolt, l. c. S. 362.

Die Metalle K, Sr, Ca, Rb, Cs, Zn, Cd usw. liefern eine Summe von diskreten Farben, die durch das Prisma getrennt werden können. Über ihre Wellenlänge und Farbe vgl. Tab. 23 und Fig. S. 277.

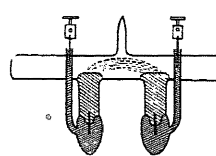
Spektrallampen. 1. Verteilung einer Salzlösung in die dem Brenner zugeführte Luft durch einen Zerstäuber (Gouy; s. Kayser, Handb. d. Spektroskopie I, 149; s. auch Kreusler, Verh. D. Ph. Ges. 1905, 59). 2. Zerspritzen mittels Gasentwicklung in einer auf den Brenner aufgesetzten kleinen elektrolytischen Zelle aus Porzellan oder mittels Zusatzes von Zink und Salzsäure (Beckmann, ZS f. phys. Ch. 57, 641. 1907; ZS f. angewandte Ch. 1907, 561.

Bei der Erzeugung von Metalldampflicht mit dem elektrischen Lichtbogen kann der Bogen so lang gemacht werden, daß die Kohlen sich abblenden lassen; die Banden des Kohledampfes, des Cyans und Eisens aber bleiben als Verunreinigungen des Spektrums. Vgl. Kayser, S. 168.

Die Funken des Induktionsapparates werden für Spektralzwecke meistens durch nebengeschaltete Leidener Flaschen verstärkt. Das Spektrum zeigt außer den Linien der Elektrodenmetalle die aus der Atmosphäre stammenden Linien und ist infolge dessen sehr kompliziert. — Einschalten einer Spule mit Selbstinduktion in den Funkenkreis der Flasche läßt die Luftlinien zurücktreten. Schuster u. Hemsalech, Proc. R. S. 64, 335. 1899; Phil. Trans. (A) 193, 211. 1900.

Geißler'sche Röhren. Die gewöhnliche eingeschnürte Form und, um mehr Licht zu bekommen, eine solche mit Längsdurchsicht s. Fig. Wasserstoff-Füllung gibt die Wellenlängen *C*, *F*, eine aus der Gruppe *G*, sowie *h* (Fig. S. 277). — Lichtstarke Heliumröhren liefern z. B. Goetze, Leipzig und Fueß, Steglitz. — Quecksilber, Zink, Cadmium erwärmt man in der Röhre. — Über Salz-Funkenspektra s. auch S. 297.

Das intensivste Quecksilber- oder Amalgamlicht gibt die Arons'sche Röhre (Wied. Ann. 47, 767. 1892; Ann. d. Ph. 23, 176. 1907), in der ein Vakuum-Lichtbogen zwischen Quecksilberelektroden durch konstanten Strom erzeugt wird. Anfängliches Zusammenfließenlassen des Quecksilbers leitet den Strom ein. Gegen Zerspringen schützt am besten ein Bad mit heißem Wasser. Anordnung von Lummer nebenstehend; auch die Stromzuführung wird durch Quecksilber vermittelt. — Lampen aus Quarzglas, die ergiebigste Quelle für Ultraviolett (vgl. Pflüger, phys. ZS 5, 514. 1904), liefert Heraeus; auch z. B. Fueß.



Andere Formen s. z. B. Kayser, l. c. S. 172 u. 232 ff.; Perot u. Fabry, J. d. phys. 9, 369. 1900, auch ZS f. Instr. 1902, 360; Siedentopf, ib. 1904, 22.

Durchlässigkeit für Ultraviolett und Ultrarot.

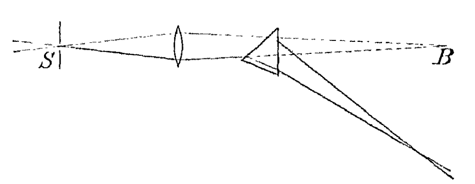
Von den scheinbar farblos durchsichtigen Mitteln, auch Gläsern, werden manche schon nach den Grenzen des Spektrums hin unvollkommen durchlässig, bald darüber hinaus die meisten, und nur wenige bewahren eine starke Durchlässigkeit weit ins Ultrarot oder Ultraviolett. Literatur über das Verhalten der Gläser im Ultraviolett und Angaben über neue durchlässigere Jenaer Gläser s. Krüss, ZS f. Instr. 1903, 197 u. 229; Zschimmer, ib. S. 360. — Filter für Ultraviolett z. B. Giesel, phys. ZS 4, 862. 1903; Kalähne, ib. 5, 415. 1904.

Im Ultraviolett: vor allem Flußspat (farblos oder höchstens etwas grünlich), bis gegen $\lambda = 0{,}12\,\mu$ (0,00012 mm) verwendbar; Quarz, der von $\lambda = 0{,}25\,\mu$ abwärts absorbiert; auch wohl Gips. Von $\lambda = 0{,}185\,\mu$ an absorbiert auch die Luft, so daß schließlich mit Flußspat im Vakuum oder in Wasserstoff gearbeitet werden muß (Schumann).

Im Ultrarot: besonders Steinsalz und Sylvin; bis $\lambda = 7\,\mu$ auch Flußspat. Eingehendes über Absorption, besonders im Ultrarot, in Tab. 25.

Spektrale Zerlegung.

Licht passiert einen Spalt S und dann eine Linse, welche ein objektives Bild B des Spaltes entwirft. Hinter die Linse kommt ein Prisma; falls die Lichtquelle vom Spalte weiter absteht (Sonne), etwa an den Ort des Bildes, welches die Linse von der Lichtquelle entwirft. Ungefähr im Abstande des Bildes B vom Prisma entsteht dann seitlich, bei einem geradsichtigen Prisma nahe bei B, das Spektrum, aus welchem die gewünschte Farbe durch eine Blende herausgeschnitten werden kann. Gewöhnlich gibt man dem Prisma die Stellung, in welcher das Spektrum am wenigsten abgelenkt ist, doch können auch andere Stellungen, welche eine Farbe mehr zusammendrängen oder ausbreiten, Vorteile bieten. — Rutherford'sche zusammengesetzte Prismen geben eine besonders starke Dispersion. — Mehrere hintereinander gestellte Prismen bedürfen beim Übergang aus einem in einen andern Spektralbezirk im allgemeinen einer Änderung ihrer gegenseitigen Stellung; vgl. z. B. **64** III; daselbst auch über Prismen mit fester Ablenkung.



Ein reines Spektrum verlangt einen engen Spalt mit scharfen Schneiden und eine gute achromatische Linse, oft auch ein Abblenden falschen Lichtes. Die Reinheit wird am deutlichen Auftreten der Fraunhofer'schen oder Metalldampf-Linien erkannt, auch wohl nach dem Bilde von einem Querfaden im Spalt beurteilt, welches im Spektrum als Querlinie auftritt.

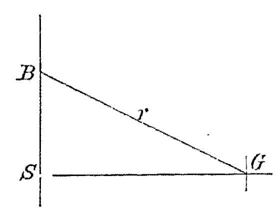
Gitterspektrum.

An die Stelle des Prismas kann das Beugungsgitter („Nobert'sches Gitter") treten, welches nach beiden Seiten Spektra liefert, in der Regel

nach der einen Seite lichtstärker als nach der anderen. Das sichtbare Spektrum 1. Ordnung (Fig. zu **65** I) ist getrennt von den übrigen, die höheren Spektra greifen in einander über.

Reflexionsgitter. Dieselben pflegen in Metallflächen eingegraben zu sein. Ebene Reflexionsgitter wirken ebenso wie durchlässige, sobald man das Spiegelbild der Lichtquelle in der Gitterebene als Lichtquelle ansieht.

Rowland'sches Gitter. Die reflektierende Fläche ist schwach sphärisch und entwirft daher das Spektrum ohne Linse, was wegen der Absorption von Bedeutung ist. — Das deutliche Spektrum ist nicht eben. Seine Teile erscheinen nach und nach deutlich längs der Linie *SB* durch die folgende, meist gebrauchte, Rowland'sche Anordnung mit verschiebbarem Gitter: *S* sei der Spalt, *SG* und *SB* sind zu einander senkrechte Schienen, *BG* ein Arm von der Länge des Krümmungshalbmessers der Gitterfläche. Der Teil des Spektrums bei *B* erscheint deutlich, wenn das Gitter, welches sich während der Bewegung des Armes *r* parallel verschiebt, sich in *G* befindet. — Kayser, l. c. S. 450. 1900. Andere Anordnungen ebenda S. 478 ff.



Über wohlfeilere Reproduktionen (nach Ives) s. z. B. Katalog von Fueß.

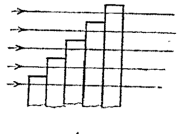
Spektroskopie mittels Interferenzen hoher Ordnung.

Die stärkste auflösende Kraft liefern die Interferenzen sehr hoher Ordnung an dicken Platten, wobei das Zusammenwirken einer beschränkten Anzahl von Strahlen genügt, um scharfe Maxima zu liefern, wenn die Strahlen in einem Fernrohr zur Interferenz gebracht werden. Die Interferenzfähigkeit besteht selbst bei Gangunterschieden von Millionen Wellenlängen noch merklich ungeschmälert. Vgl. auch **63a** u. **65** IV.

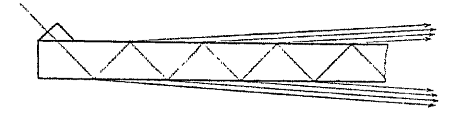
Solche Spektroskope (Interferometer) dienen u. a. zum Studium des feineren Baues einzelner Spektrallinien. — Die Anordnungen sind:

Luftplattenspektroskop; Fabry u. Perot. Ein Parallelstrahlenbündel wird wiederholt zwischen den beiden durchlässig versilberten Glasflächen hin und her reflektiert, welche eine planparallele Luftschicht begrenzen. Zur Interferenz werden die einseitig austretenden Teilstrahlen gebracht. Ann. chim. phys. (7) 16, 115. 1899.

Stufenspektroskop; A. Michelson. Fig. 1. Genau gleich dicke Glasplatten liegen abgestuft aneinander. Zur Interferenz kommen entweder die Strahlen, welche die Stufen durchsetzt haben (Fig.), oder solche, die an den (versilberten) Oberflächen reflektiert worden sind. Journ. de phys. (3) 8, 305. 1899. — Über die Theorie auch Galitzin, ZS f. Instr. 1907, 224.



1.



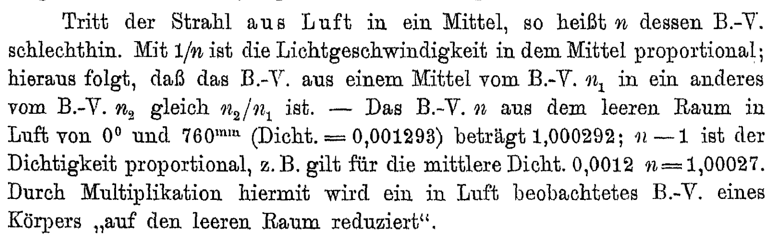
2.

Glasplattenspektroskop; Lummer u. Gehrcke. Fig. 2. Die Strahlen werden in eine vollkommen planparallele Platte so eingeleitet, daß sie bei den wiederholten Reflexionen die Wände beinahe unter dem Winkel der totalen Reflexion treffen. Die fast streifend austretenden Bruchteile der einen Seite werden zur Interferenz gebracht. Ann. der Ph. 10, 457. 1903; Gehrcke u. v. Baeyer, ib. 20, 269. 1906. Über eine einfache Ausführung Gehrcke, ZS f. Instr. 1908, 28.

60. Lichtbrechungsverhältnis eines Prismas. Spektrometer.

Wenn, bei dem Eintritt eines Lichtstrahls aus einem Körper („Mittel") in einen anderen, α der Eintritts- und β der Brechungswinkel ist (Fig.), so stehen die Sinus beider Winkel in einem konstanten Verhältnis zu einander, dem Brechungs-Verhältnis (-Koeffizient, -Exponent, -Index) n des zweiten gegen das erste Mittel; Snell'sches Gesetz, 1621. Also gilt

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$



Geometrisch ist $\sin\alpha = AA'/AC$ und $\sin\beta = BB'/BC$, oder wenn $AC = BC = 1$ ist, $\sin\alpha = AA'$ und $\sin\beta = BB'$. Sinus und Logarithmen s. Tab. 53, 54.

n bedeutet zugleich das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeit oder, was dasselbe sagt, der Wellenlänge im ersten zu derjenigen im zweiten Körper.

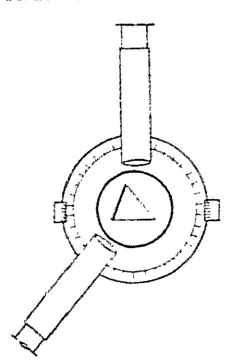
Tritt der Strahl aus Luft in ein Mittel, so heißt n dessen B.-V. schlechthin. Mit $1/n$ ist die Lichtgeschwindigkeit in dem Mittel proportional; hieraus folgt, daß das B.-V. aus einem Mittel vom B.-V. n_1 in ein anderes vom B.-V. n_2 gleich n_2/n_1 ist. — Das B.-V. n aus dem leeren Raum in Luft von 0^0 und 760^{mm} (Dicht. $= 0{,}001293$) beträgt $1{,}000292$; $n - 1$ ist der Dichtigkeit proportional, z. B. gilt für die mittlere Dicht. $0{,}0012$ $n = 1{,}00027$. Durch Multiplikation hiermit wird ein in Luft beobachtetes B.-V. eines Körpers „auf den leeren Raum reduziert".

Wenn s die Dichtigkeit eines Körpers, so heißt $r = (1/s) \cdot (n^2 - 1)/(n^2 + 2)$ sein spezif. Brechungs- oder Refraktionsvermögen; früher auch wohl $(n - 1)/s$, was für ein Gas sich von obigem nicht merklich unterscheidet; auch wohl $(n^2 - 1)/s$. r ist von Temperatur, Druck und Aggregatzustand nahe unabhängig. Also nimmt das Brechungsverhältnis durch Temperaturausdehnung ab. — Wenn A das chemische Molekulargewicht des Körpers, so heißt rA sein molekulares B.-Vermögen.

Zur Bestimmung des B.-V. wird der Körper meist in Prismenform angewandt; ein fester Körper geschliffen, eine Flüssigkeit in ein Prisma mit ebenen Deckplatten eingefüllt. Aus dem Ablenkungswinkel des Lichtes beim Durchtritt durch das Prisma und dem gegenseitigen Winkel der brechenden Flächen (dem „brechenden Winkel") ergibt sich das B.-V.

Spektrometer. Allgemeine Regeln.

Das Spektrometer (Formen von Meyerstein 1856, Abbe, v. Lang) besteht aus dem Teilkreise, dem Tischchen für das Prisma, dem Spaltrohre (Kollimator) und dem Fernrohre mit Fadenkreuz; vgl. Fig. Das meistens feststehende Spaltrohr ist nach außen durch einen in seiner Breite verstellbaren Spalt, nach dem Prisma zu durch eine Linse abgeschlossen, deren Brennpunkt in den Spalt fallen muß, um jedes von einem Punkte des Spaltes ausgehende Lichtbündel als Parallelstrahlenbündel nach dem Prisma austreten zu lassen. Der Spalt vertritt so ein unendlich fernes leuchtendes Objekt. Das, entweder mit oder über dem Teilkreis drehbare, Fernrohr soll den Spalt deutlich erscheinen lassen, muß also auf Parallelstrahlen, „auf unendlich", eingestellt sein. Für manche Methoden ist es nötig, daß auch Drehungen des Prismas gemessen werden können, daß also das Tischchen mit dem drehbaren Teilkreise verbunden und das Fernrohr zugleich festgestellt werden kann.



1. Kreisablesung. Die Anbringung zweier gegenüber liegender Ablesepunkte an einer Kreisteilung soll nicht nur die Ablesefehler verringern, sondern zugleich die Exzentrizität der Kreisteilung gegen die Drehaxe eliminieren. Man beobachte also jedesmal beide Nonien, immer die Nummer des Nonius notierend. Dann nimmt man entweder das Mittel aus den Winkeln, die jeder Nonius angibt, oder bequemer, man rechnet die Gradablesung immer nach Nonius I und nimmt nur in den Bruchteilen (bez. Minuten und Sekunden) die Mittel.

2. Einstellung des Fernrohrs auf unendlich. Man macht zunächst das Fadenkreuz durch Verstellen des ersten Okularglases oder des Fadenkreuzes selbst deutlich sichtbar. Dann richtet man das Rohr auf einen sehr entfernten Gegenstand und bewirkt mit dem Auszuge, daß das Bild dieses Gegenstandes keine Parallaxe gegen das Fadenkreuz zeigt, d. h. daß beide bei einer Seitenbewegung des Auges sich nicht gegen einander verschieben. Vgl. auch Nr. 4a dieses Abschnittes.

3. Einstellung des Spaltrohrs (Kollimators) auf Parallelstrahlen. Man richtet das auf unendlich eingestellte Fernrohr auf den beleuchteten Spalt und zieht das Spaltrohr so weit heraus, daß das Bild des Spaltes keine Parallaxe gegen das Fadenkreuz zeigt.

4. **Beleuchtetes Fadenkreuz.** Das Licht einer seitlich aufgestellten Flamme fällt auf eine geneigte, zwischen (Gaufs'schem) Okular und Fadenkreuz befindliche Planglasplatte (Fig.) oder auf ein kleines Reflexionsprisma, und von da am Fadenkreuz vorüber zum Objektiv. Einem gewöhnlichen Okular kann man ein unter etwa 45° geneigtes Glasplättchen vorkleben, welches seitlich beleuchtet wird.

Ist das Fernrohr auf unendlich eingestellt, so treten Strahlen, die von einem Punkte des Fadenkreuzes kommen, als Parallelstrahlen aus dem Objektiv und geben, von einer ebenen Fläche in das Fernrohr reflektiert, ein deutliches Bild des Fadenkreuzes.

Das beleuchtete Fadenkreuz dient zu folgenden Zwecken:

a) Einstellung des Fernrohrs auf unendlich. Man verschiebt den Auszug, bis das Fadenkreuz und sein an einer Ebene gespiegeltes Bild keine Parallaxe zeigen.

b) Senkrechtstellung einer spiegelnden Ebene gegen das Fernrohr. Man orientiert so, daß das Fadenkreuz und sein Bild zusammenfallen.

c) Senkrechtstellung der Sehlinie des Fernrohrs zu seiner Drehaxe. Auf das Tischchen des Instruments stellt man ein beiderseitig spiegelndes, etwa versilbertes (8, 6) Planparallelglas, welches selbst auf einem kleinen Fuß mit Stellschraube steht oder auch direkt mit Klebwachs befestigt wird. Dieses Glas orientiert man so, daß im Fernrohr das Fadenkreuz ebenso hoch liegt wie sein Spiegelbild. Dreht man nun das Fernrohr um 180°, so müssen, wenn die Sehlinie zur Drehaxe senkrecht ist, abermals die Bilder zusammenfallen. Wenn nicht, so korrigiert man die Hälfte der Abweichung durch Neigen des Spiegelglases, die andere Hälfte durch Neigen des Fernrohrs und wiederholt die Probe u. s. f.

Eine nicht ganz parallele Glasplatte schneide und stelle man so, daß die beiden Bilder des Fadenkreuzes neben einander liegen. Dann läßt sich das Glas zu den Prüfungen verwenden.

d) Prüfung, ob die Drehaxe des Tischchens oder des Kreises senkrecht zur Sehlinie des Fernrohrs steht. Nach der Einstellung des Fadenkreuzbildes dreht man das Spiegelglas um diese Axe um 180°; dann müssen die Bilder wieder zusammenfallen.

e) Hat das Spiegelglas selbst einen kleinen Fuß mit Stellschrauben, so kann man hiermit in leicht ersichtlicher Weise prüfen, bez. mit den Regulierschrauben des Tischchens bewirken, daß die Oberfläche des Tischchens mit der Sehlinie des Fernrohrs parallel ist.

f) Herstellung des Parallelismus einer Ebene (Prismenfläche) mit der Drehaxe. Nach *b* zu bewirken, nachdem die Orientierung *c* ausgeführt worden ist.

Ohne Fadenkreuzbeleuchtung verfährt man mit dem, als berichtigt angenommenen Fernrohr so: Am Spalt wird durch einen Querfaden diejenige Höhe markiert, welche bei gerader Ansicht im Fadenkreuz erscheint. Nun stellt man die zu orientierende Fläche schräg vor das Spaltrohr (vgl. d. folg. Fig.). Wenn dann das Fernrohr auf das in der Fläche gespiegelte Spaltbild eingestellt wird, so muß, wenn diese mit der Axe des Instrumentes parallel ist, dieselbe Spalthöhe im Fadenkreuz erscheinen.

Sind zwei Flächen desselben Körpers (Prisma) einzustellen, so stellt man letzteren so, daß eine der Flächen auf der Verbindungslinie zweier Fußschrauben des Tischchens senkrecht steht. Diese Fläche wird zuerst berichtigt; alsdann die andere, wobei aber die genannten beiden Schrauben nicht mehr benutzt werden.

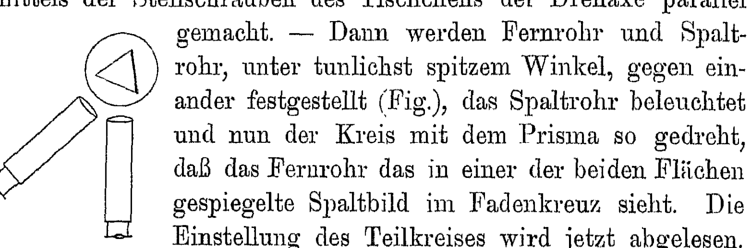
g) Prüfung einer Platte auf Planparallelismus. Die Kennzeichen sind: 1) es muß bei passender Stellung des Fernrohrauszuges das Spiegelbild des Fadenkreuzes deutlich und einfach erscheinen; 2) wenn das Fadenkreuz gegen sein Spiegelbild auf der einen Seite keine Parallaxe zeigt, so muß dies ohne Verstellung des Fernrohrauszuges auch auf der anderen Seite der Fall sein. Dann ist zugleich das Fernrohr auf unendlich eingestellt.

Brechungsverhältnis eines Prismas.

Zu messen ist der brechende Winkel des Prismas und die Ablenkung des Strahls.

I. Messung des brechenden Winkels φ.

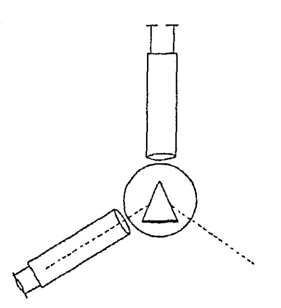
a) Wenn das Fernrohr feststeht und das Prisma mit dem Teilkreise drehbar ist. Das Prisma wird so auf das Tischchen gestellt, daß nach passender Drehung des Kreises die eine brechende Fläche nahe den früheren Ort der anderen einnimmt. Nach 4*f*, v. S. werden zuerst die beiden Prismenflächen mittels der Stellschrauben des Tischchens der Drehaxe parallel gemacht. — Dann werden Fernrohr und Spaltrohr, unter tunlichst spitzem Winkel, gegen einander festgestellt (Fig.), das Spaltrohr beleuchtet und nun der Kreis mit dem Prisma so gedreht, daß das Fernrohr das in einer der beiden Flächen gespiegelte Spaltbild im Fadenkreuz sieht. Die Einstellung des Teilkreises wird jetzt abgelesen.



Durch Drehen des Teilkreises mit dem Prisma stellt man ebenso auf die andere Prismenfläche ein und liest wieder ab. Die Differenz beider Ablesungen, selbstverständlich mit Rücksicht auf eine etwaige Überschreitung des Nullpunktes der Teilung, ergibt von 180° abgezogen den brechenden Winkel φ.

Mit beleuchtbarem Fadenkreuz braucht man keinen Spalt, sondern dreht mit dem Teilkreise zuerst die eine, dann die andere Prismenfläche so, daß das Kreuz mit seinem Spiegelbilde in der Fläche zusammenfällt.

b) Wenn das Prisma feststeht, das Fernrohr mit dem Nonius oder mit dem Kreise drehbar ist. Man stellt das Prisma so auf, daß ungefähr die rückwärts verlängerte Halbierungslinie des brechenden Winkels den Spalt trifft. Sodann wird das Fernrohr auf das Spiegelbild des Spaltes in jeder Fläche eingestellt. Der Unterschied der Ablesungen am Kreise in beiden Lagen ist der doppelte brechende Winkel. Der Spalt muß hier nach Nr. 3 sorgfältig auf unendlich eingestellt sein.

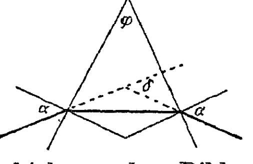


Mit dem beleuchteten Fadenkreuz mißt man den brechenden Winkel, indem man das Kreuz in jeder der beiden Flächen mit seinem Spiegelbilde zur Deckung bringt. Der gemessene Drehungswinkel ergänzt φ zu 180°.

II. Messung des Ablenkungswinkels δ.

Hier wird „homogenes" Licht von bestimmter Brechbarkeit (Farbe, Schwingungszahl, Wellenlänge in Luft) vorausgesetzt, z. B. Natriumlicht; vgl. S. 265. Die Richtung des nicht abgelenkten Strahls wird erhalten, indem man das Fernrohr direkt auf den Spalt einstellt. Durch das Einschieben des Prismas entsteht ein Ablenkungswinkel. Man hat folgende Methoden:

a) Symmetrische oder Minimumstellung (Fraunhofer). Die Größe der Ablenkung eines Strahles hängt von der Richtung ab, in der er das Prisma durchsetzt. Sie ist am kleinsten bei symmetrischem Durchgang (Fig.). Um diese „Minimumstellung" zu haben, stellt man Prisma und Fernrohr so, daß der abgelenkte Strahl im Fernrohr erscheint (über die Stellung vgl. Fig. S. 270), dreht dann langsam das Prisma und folgt der Verschiebung des Bildes mit dem Fernrohr. In der Lage, in welcher der Lichtstrahl die möglichst kleine Ablenkung hat (wo das Bild sich nach derselben Seite bewegt, man mag das Prisma links oder rechts drehen), fixiert man das Prisma, stellt nun das Fadenkreuz auf den Spalt ein und liest den Kreis ab. Diese Ein-



stellung wird von der direkten Einstellung auf den Spalt abgezogen und ergibt den Ablenkungswinkel δ.

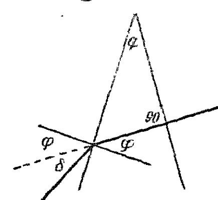
Statt auf den Spalt direkt einzustellen, kann man noch besser den Strahl einmal nach links, das andere Mal nach rechts durch das Prisma minimal ablenken lassen und von den beiden Einstellungen des Fernrohrs die halbe Differenz nehmen.

Das B.-V. n ist, wenn φ den Prismenwinkel bedeutet,

$$n = \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta + \varphi)}{\sin \frac{1}{2}\varphi}.$$

Beweis (Fig. vor. S.). Ein symmetrisch durch das Prisma gehender Strahl bildet mit den beiden Normalen den gleichen Winkel $\frac{1}{2}\varphi$. Nach dem Brechungsgesetz ist $\sin\alpha = n \sin\frac{1}{2}\varphi$. Nun ist offenbar $\alpha = \frac{1}{2}(\delta + \varphi)$, also $\sin\frac{1}{2}(\delta + \varphi) = n \sin\frac{1}{2}\varphi$, q. e. d.

b) Senkrechter Austritt (Meyerstein). Das Verfahren verlangt ein beleuchtbares Fadenkreuz. Man gibt dem Prisma die Stellung, bei welcher die dem Fernrohre zugewandte Fläche zur Sehlinie senkrecht ist, d. h. bei welcher das Fadenkreuz mit seinem Spiegelbild zusammenfällt. Es gilt (Fig.)



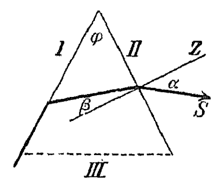
$$n = \frac{\sin(\delta + \varphi)}{\sin \varphi}.$$

c) In sich zurückkehrender Strahl (Abbe); vgl. die Figur zu *b*. Das Verfahren bedarf keines Spaltes, aber eines beleuchtbaren Fadenkreuzes. Das auf unendlich eingestellte Fernrohr wird zur einen Prismenfläche erstens nach Nr. 4*b* senkrecht gestellt und abgelesen. Zweitens stellt man vor derselben Fläche so ein, daß die Strahlen vom Fadenkreuz, welche ins Prisma gedrungen, an der zweiten Fläche reflektiert und durch die erste wieder ausgetreten sind, wieder ins Fadenkreuz fallen (man stellt auf das Spiegelbild des Fadenkreuzes in der hinteren Prismenfläche ein). Die Drehungen können entweder mit dem Fernrohr oder mit dem Prisma geschehen. Beide Stellungen mögen den Winkel ε miteinander bilden. Dann ist

$$n = \sin\varepsilon / \sin\varphi.$$

Folgt aus der Figur zu *b*), indem $\varepsilon = \varphi + \delta$ ist. — Das Abbe'sche Spektrometer läßt die Einstellungen besonders bequem ausführen; es hat außerdem eine Vorrichtung, um die Dispersion (S. 277) selbständig zu bestimmen. Vgl. Abbe, Apparate zur Bestimmung des B.-V. Jena 1874.

d) Streifender Eintritt (F. K.). Die Methode ist instrumentell die einfachste; sie läßt sich mit einem beliebigen drehbaren Teilkreise und danebengestelltem Ablesefernrohr ausführen. Die Prismenfläche I werde von einem breiteren Lichtbündel streifend getroffen, etwa von einer Natronflamme beleuchtet, die man in die Fortsetzung der Fläche gestellt hat. Durch die Prismenfläche II sieht man das Licht dann scharf abgegrenzt; man stellt auf diese Grenze ein. Gesucht wird der Winkel α dieser Sehrichtung S mit der Normalen Z der Fläche II.



Mit beleuchtetem Fadenkreuz mißt man α direkt, indem man, nach Nr. 4*b*, noch auf die Normale Z einstellt. Ist φ klein, so verläuft der Grenzstrahl S nach der anderen Seite von Z; dann soll α negativ gerechnet werden.

Ohne Fadenkreuzbeleuchtung beobachtet man zum zweiten durch Fläche I, wobei II streifend beleuchtet wird. Man dreht hierbei das Prisma mit dem Teilkreis vor dem Fernrohr oder das Fernrohr mit dem Kreis um das Prisma, bis wieder auf die Grenze zwischen hell und dunkel eingestellt ist. Dieser Drehungswinkel, um die Fläche III herum gezählt, heiße w, dann ist $\alpha = 90^0 - \frac{1}{2}(w - \varphi)$.

Es gilt $$n^2 = 1 + \left(\frac{\cos\varphi + \sin\alpha}{\sin\varphi}\right)^2.$$

Denn man hat (Fig.) $n = \sin\alpha/\sin\beta$ und von dem streifenden Eintritt an I noch $n = 1/\sin(\varphi - \beta)$. Die Elimination von β aus beiden Gleichungen gibt obigen Ausdruck. — Vgl. F. K., Wied. Ann. 16, 606. 1882.

Die Genauigkeit der Prismenmethoden wächst im allgemeinen mit dem Prismenwinkel.

II *a* und *d* sind für Glasprismen bis zu 70—80° brauchbar; gebräuchlich ist ein Winkel von etwa 60°. II *b* und *c* können höchstens bis gegen 40°, für stark brechendes Glas nur bis etwa 35° angewandt werden.

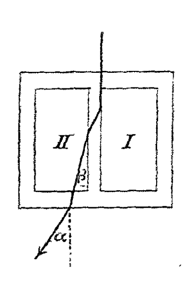
Eine einfache Form des Spektrometers und Bemerkungen zu den Prismenmethoden bei Martens, Verh. D. Ph. Ges. 1901, 10.

Gase (Biot und Arago 1806). Der Prismenwinkel wird sehr groß (160°) gewählt. Die trotzdem kleine Ablenkung mißt man nicht über einem Teilkreise, sondern am Okularmikrometer eines, stark vergrößernden, Fernrohrs.

1. Absolute Messung. Man hat die Richtung der durchgegangenen Strahlen bei Gasfüllung und bei evakuiertem Prisma oder sonst bei ver-

schiedenen bekannten Dichtigkeiten (Drucken) zu vergleichen. Im letzteren Falle reduziert man auf das Vakuum nach dem Satz, daß die Ablenkung in einem bestimmten Gase der Dichtigkeit proportional ist. 2. Relative Messung. Man vergleicht mit einem Gase (Luft) von bekanntem B.-V. bei gleichem Drucke. — Über ein Gasrefraktometer mit Hin- und Hergang des Strahls durch das Prisma und mikroskopischer Ablesung vgl. Haber, ZS f. Elektroch. 1907, 460. — Weitere Methoden s. **63a**.

Bestimmung kleiner Unterschiede von Brechungsverhältnissen mit streifendem Eintritt im Doppeltrog (Hallwachs). Die beiden Flüssigkeiten, z. B. Lösungsmittel und Lösung, sind in einem rechteckigen Glastrog durch eine Scheidewand getrennt; durch die schwächer brechende fällt Licht streifend auf die Wand. Man bestimmt den Winkel α der austretenden Lichtgrenze mit der Normalen der Austrittsfläche. Dann ist $n_2 - n_1 = \sin^2\alpha/(n_1 + n_2)$, wo $n_1 + n_2$ nur genähert bekannt zu sein braucht. Umdrehung der Richtung und Mittelnehmen eliminiert etwaige Keilgestalt der Platten. Kleine Unterschiede lassen sich bis in die sechste Dezimale bestimmen.



Beweis. Planparallele Schichten beeinflussen die schließliche Richtung nicht. Es ist $n_1/n_2 = \cos\beta$; also $\sin\beta = \sqrt{n_2^2 - n_1^2}/n_2 = \sqrt{(n_2 - n_1)(n_2 + n_1)}/n_2$. Dies setze man ein in $n_2 = \sin\alpha/\sin\beta$.

Näheres Hallwachs, Wied. Ann. 50, 577. 1893.

Fernere Methoden zur Bestimmung eines B.-V. s. **62** u. **63**.

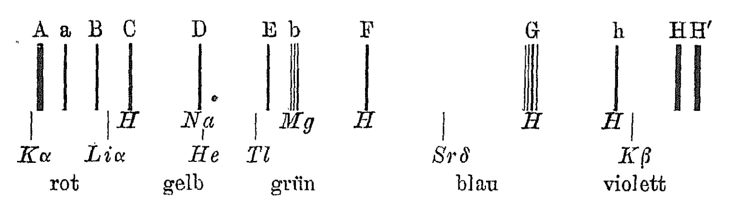
Doppelbrechende Körper. Vgl. hierüber **63** und **70**.

Dispersion. Farbe; Schwingungszahl; Wellenlänge.

Die Brechbarkeit des Lichtes hängt von seiner Schwingungsdauer (Farbe) ab. Sie wächst mit zunehmender Schwingungszahl (abnehmender Wellenlänge), nach den Farben in der Reihenfolge rot, orange, gelb, grün, blau, violett. Das B.-V. muß sich deswegen auf Licht von bestimmter Schwingungszahl beziehen.

Über Quellen einfarbigen (homogenen) Lichtes s. **59**. Am gebräuchlichsten sind die Linien von Natrium, Thallium, Lithium und auch wohl Kalium im Bunsenbrenner, von Wasserstoff, Helium, Quecksilber, Cadmium in Geißler'schen Röhren. —

Sonnenspektrum. Man wirft mit dem Heliostaten Sonnenlicht horizontal auf den Spalt. Zur Definition einer Wellenlänge und zur Messung ihres Brechungsindex benutzt man die Fraunhofer'schen Linien (1814). Die Figur enthält die wichtigsten



C D b F G h koinzidieren mit Spektrallinien von *Na*, *Mg*, *H*; die Hauptlinien von *K*, *Li*, *He*, *Tl*, *Sr* sind unten angegeben.

dieser Linien, wie sie im sichtbaren prismatischen Spektrum verteilt sind. Für das Gedächtnis merke man sich, daß ADFGH ungefähr gleichen Abstand von einander haben. — Wellenlängen in Tab. 23.

Um A und a zu sehen, stelle man den Spalt nicht zu eng und halte ein rotes Glas vor. D zeigt sich bei engem Spalte und starker Vergrößerung als eine feine Doppellinie D_1, D_2.

Die Bezeichnung der Linien im Ultraviolett, über H' hinaus (welches vielfach auch K benannt ist), wird mit lateinischen Buchstaben L, M... weitergeführt. — Zum Sichtbarmachen ultravioletten Lichtes dient ein „fluoreszierendes Okular", welches am Ort des Fadenkreuzes eine fluoreszierende Platte aus Gelatine oder Uranglas trägt. Von Glas wird ultraviolettes Licht teilweise erheblich absorbiert (vgl. S. 267), so daß man auf Prismen usw. aus Quarz oder noch besser Flußspat angewiesen ist.

Vgl., auch über das (ultrarote) Wärmespektrum, **64**.

Der Unterschied der Brechungsverhältnisse für zwei bestimmte Farben (gewöhnlich für C und F Fraunhofer) wird Dispersionsvermögen genannt. Relative Dispersion heißt gewöhnlich das Verhältnis $(n_F - n_C):(n_D - 1)$.

Vgl. Tab. 22, 23 und 24.

Über mikrometrische Bestimmungen der Dispersion s. Pulfrich, ZS f. Instr. 1893, 267.

Anomale Dispersion. Christiansen; Kundt; 1870. In der Nachbarschaft eines intensiven Absorptionsstreifens (z. B. in Cyanin- oder Fuchsinlösungen) wird der gewöhnliche regelmäßige Gang von n mit λ unterbrochen. Von der roten Seite des Spektrums kommend wächst n mit abnehmender Wellenlänge vor dem Absorptionsgebiet unter Umständen sehr stark und setzt in dem Gebiet der wiederauftretenden Durchlässigkeit mit sehr kleinen Werten wieder ein, die dann aber mit weiter abnehmendem λ rasch wachsen. - Vgl. auch Wood, anom. D. des Na-Dampfs, Ph. Mag. (6) 8, 293; Phys. ZS 5, 751. 1904.

Dispersionsformeln. Die Lichtbrechung eines Mittels für einen Strahl von der Wellenlänge in Luft λ (**65**; Tab. 23) hat man u. a. in folgenden Formeln ausgedrückt, wo $A, B, M \ldots$ Konstanten des Mittels sind:

Cauchy $n = A + B/\lambda^2 + C/\lambda^4 + \cdots$

Lommel-Wüllner $n^2 - 1 = \frac{A + B/\lambda^2}{1 - C/\lambda^2}$;

Sellmeier-Ketteler-Helmholtz $n^2 = A + \frac{M}{\lambda^2 - P} + \frac{N}{\lambda^2 - Q}$.

Die beiden letzten Formeln enthalten die anomale Dispersion, insofern Werte von $\lambda = C^{\frac{1}{2}}$ bez. $P^{\frac{1}{2}}$ oder $Q^{\frac{1}{2}}$ ein Unendlichwerden von n, d. h. einen Absorptionsstreifen im Spektrum bezeichnen; ehe man, mit abnehmendem λ, diese Stellen erreicht, kommen Strecken, wo n zunimmt.

Vgl. noch Maclaurin, Proc. R. S. (A) 81, 367. 1908.

61. Messung eines Flächenwinkels mit dem Wollaston'schen Reflexionsgoniometer.

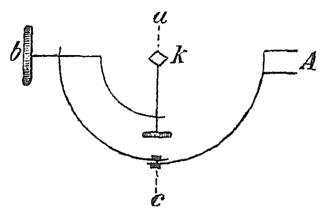
Um die Flächenwinkel sehr kleiner Körper zu messen, bedarf es einer besonderen Orientiervorrichtung, die an manchen Spektrometern vorhanden ist. Manche Kristallflächen sind aber so unvollkommen, daß ihre Bilder besser mit bloßem Auge als mit dem Fernrohr beobachtet werden.

Die Drehaxe soll einer entfernten oberen Horizontalmarke O (Fenstersprosse, Dachfirst) parallel stehen; die zu messende Kristallkante sei der Axe bereits (s. unten) parallel gemacht. Man hält nun das Auge dicht vor den Kristall, dreht an der Axe, bis das in einer Kristallfläche gesehene Bild der genannten Marke O mit einer direkt gesehenen, tiefer gelegenen, ebenfalls horizontalen Marke U (Rand des Fußbodens; Spiegelbild der oberen Marke in einem hinter dem Goniometer befestigten Spiegel) zusammenfällt, und liest die Kreisteilung ab. Dann dreht man den Kreis mit dem Kristall, bis das Spiegelbild von O in der anderen Kristallfläche mit U zusammenfällt, und liest wieder ab. Der Winkel, um den man gedreht hat, ergänzt den gesuchten Winkel der beiden Flächen zu 180°.

Eine etwaige zweite, konzentrische Drehaxe ist zur „Repetition" der Winkelmessung bestimmt.

Einstellung der Kante parallel der Axe. Zur systematischen Orientierung dient ein nach drei Richtungen drehbarer Halter (Naumann). A ist die Axe des Kreises, a, b, c sind die Orientierungsaxen, k der mit etwas Wachs befestigte Kristall.

1. Man stelle durch Drehung um c die Vorrichtung so, daß b die Fortsetzung von A bildet, d. h. beim Drehen von A ruhig



läuft. Nun wird durch Drehen um a die Kristallfläche I zu A, also auch zu b parallel gestellt. Vgl. darüber unten.

2. Man verdrehe c um etwa 60 bis 90^0, so wird sich im allgemeinen die Stellung von Fläche I geändert haben. Durch Drehung um b stellt man I wieder parallel zu A, so daß I jetzt parallel zu A und zu b, also senkrecht auf c steht. Drehen um c ändert also die Lage von Fläche I nicht mehr.

3. Durch Drehung um c stellt man die Fläche II parallel zu A.

Bei jeder folgenden Einstellung einer Axe dürfen die vorher orientierten nicht mehr gedreht werden!

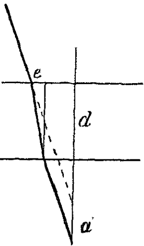
Den Parallelismus einer Fläche mit der Axe A erkennt man mittels zweier in der Ebene des Teilkreises liegender entfernter, zur Drehaxe senkrechter Marken (vertikale Fensterleiste und ein darunter gezogener Strich auf dem Fußboden; oder Schornstein, Blitzableiter usw. und sein Bild in dem festen Spiegel des Goniometers). Die Fläche ist der Axe parallel, sobald bei passender Drehung um A das Spiegelbild der oberen Marke in der Fläche mit der unteren Marke zusammenfällt.

Feinere Meßapparate von Fueß s. z. B. Liebisch, physik. Kristallogr. S. 379, Leipz. 1891; auch Czapski, ZS f. Instr. 1893, 1 u. 242; Klein, Berl. Sitzber. 1900, 248.

62. Messung des Brechungsverhältnisses einer Planplatte unter dem Mikroskop (Duc de Chaulnes 1767).

Die Verfahren sind wenig genau, aber wegen ihrer vielfachen Anwendbarkeit von Bedeutung.

Die Platte habe die Dicke d und das gesuchte B.-V. n.



Durch die Platte gesehen erscheint ein Objekt um $a = d(n-1)/n$ näher. Denn wenn man in den beiden, in Wirklichkeit sehr spitzen, rechtwinkligen Dreiecken, welche e als kleine Kathete haben (Fig.), die Hypotenusen den größeren Katheten d bez. $d-a$ merklich gleich annimmt, so stellt $e/(d-a)$ bez. e/d den Sinus des Einfalls- bez. des Brechungswinkels des Strahles vor. Also hat man $n = d/(d-a)$, oder $a = d(n-1)/n$.

1. Ein Mikroskop sei auf ein Objekt scharf eingestellt. Bringt man zwischen das letztere und das Objektiv

die Planplatte, so muß man den Abstand um eine Strecke a vergrößern, um wieder deutlich zu sehen. Das B.-V. der Platte ist dann $$n = d/(d-a).$$

2. Auf der Vorder- und der Hinterseite der Platte befinde sich je ein gut sichtbarer Punkt. Um von dem einen auf den anderen einzustellen, sei eine Verschiebung um die Strecke h notwendig. Dann ist, wie aus obigem leicht folgt, $h = d/n$, mithin $$n = d/h.$$

d/n, für gewöhnliches Glas also nahe $\frac{2}{3}d$, heißt „optische Dicke" der Platte.

3. Auf der Vorderfläche der Planplatte wird ein gut sichtbarer Punkt mit weißer Farbe angebracht. Man stellt das Mikroskop auf diesen ein. Um sodann das von der Rückseite der Platte zurückgeworfene Spiegelbild des Punktes zu sehen, wird man den Abstand zwischen Mikroskop und Platte um eine Strecke h verkleinern müssen. Das B.-V. der Platte ist
$$n = 2d/h.$$

Bei dem 3. Verfahren beleuchtet man mit auffallendem Licht und verdunkelt den Hintergrund, oder noch besser, man versilbert die Platte auf der Rückseite (8, 6).

Um die Größe der notwendigen Verschiebungsstrecken des Mikroskopes genau zu bestimmen, kann die Schraubenverstellung des Mikroskopes dienen, wenn die Höhe des Schraubenganges (**21**, 2 u. 3) bekannt ist und wenn der Schraubenkopf eine Kreisteilung besitzt.

Die genaue Einstellung wird am besten mit einem Fadenkreuz im Okulare danach beurteilt, daß dieses keine Parallaxe gegen das Bild zeigt. Am geeignetsten ist ein Objektiv von kurzer Brennweite und nicht zu großem Durchmesser. Dann kann bei dickeren guten Platten die dritte Dezimale des B.-V. noch brauchbar werden.

Über die Bestimmung des B.-V. einer Flüssigkeit aus dem Axenwinkel eines Kristalles s. **70** am Schluß.

63. Lichtbrechungsverhältnis aus dem Winkel der totalen Reflexion (Wollaston 1802).

Für diese Methoden genügt eine ebene Grenzfläche; sie lassen sich auch auf unvollkommen durchsichtige Körper anwenden.

Der größte Brechungswinkel Φ, mit dem ein Strahl aus einem Mittel in ein stärker brechendes eintreten kann, entspricht streifendem Eintritt, d. h. dem Einfallswinkel 90°. Sind n und N die einzelnen, also N/n das gegenseitige B.-V., so gilt hiernach $\sin 90°/\sin\Phi$ oder $1/\sin\Phi = N/n$. Dieselbe Beziehung gilt, wenn ein in dem Mittel N verlaufender Strahl das

schwächer brechende Mittel n trifft, für den Grenzwinkel Φ der totalen Reflexion. Für ein beobachtetes Φ gilt also

$$\frac{n}{N} = \sin \Phi, \tag{1.}$$

woraus, wenn das B.-V. von einem der Mittel bekannt ist, dasjenige des anderen berechnet werden kann.

Eine genaue Bestimmung muß auch hier sich auf Licht von einer bestimmten Farbe beziehen (S. 276).

I. Mit dem Prisma (F. K.).

1. Brechungsverhältnis des Prismas gegen Luft; vgl. auch **60** II, d und die Figur daselbst. Man beleuchtet die eine Fläche I eines Prismas, während das Spektrometerfernrohr auf die Fläche II gerichtet ist, von innen, d. h. durch die Fläche III hindurch, mit diffusem homogenen Licht (**59**). Die Grenze der totalen Reflexion an I erscheint als eine scharfe Grenzlinie zwischen hell und weniger hell. Auf diese Linie wird eingestellt. Die Richtung des Fernrohrs entspricht der Richtung S der Figur l. c., und genau so wie dort, auch nach derselben Formel, erhält man das B.-V. des Prismas.

2. Brechungsverhältnis eines anderen Körpers. Man klebt eine ebene Fläche dieses Körpers mit einer stark brechenden Flüssigkeitsschicht (Cassia-Öl, Arsenbromür) auf die Prismenfläche I und verfährt nun wie oben. Falsches Licht wird durch Schwärzen der störenden Flächen abgeblendet. Sowohl Prisma wie Flüssigkeit müssen stärker brechen als der Körper.

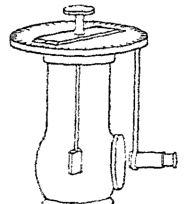
Ist N das B.-V. des Prismas, φ der Prismenwinkel, α der Winkel der Sehrichtung nach der Grenze der totalen Reflexion mit der Normalen auf der anvisierten Prismenfläche (Fig. l. c.), so wird das B.-V. des angeklebten Körpers

$$n = \sin \varphi \sqrt{N^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \varphi \sin \alpha.$$

Denn es ist $N = n/\sin(\varphi - \beta) = \sin \alpha / \sin \beta$, woraus der Ausdruck folgt. Vgl. F. K., Wied. Ann. 16, 607. 1882. — Drehapparate für angedrückte Kristalle von Fueß-Liebisch s. ZS f. Instr. 1884, 185; 1885, 13.

II. Totalreflektometer (F. K.)

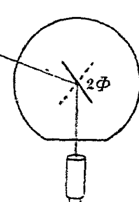
Mit einem Zeiger über einer Kreisteilung dreht sich unten ein Fortsatz, an dessen Ende der Körper mit Kork usw. so befestigt wird, daß seine spiegelnde Fläche nahe zentral und der Axe parallel liegt; Fig. f. S. Ersteres wird mittels einer Schneide, letzteres an einem der Axe parallelen Spiegel (beides hier nicht gezeichnet) erkannt, in dem das Auge oder ein Flämm-



chen in gleicher Höhe erscheinen muß, wie in der zu orientierenden Fläche. Rückseite und Umgebung des Körpers seien mit Tusche geschwärzt.

Das kleine Fernrohr soll auf unendlich eingestellt und der Kreisebene parallel sein. (Um dies zu prüfen oder zu bewirken, kann man das Instrument in seinem Stativ um 90° umlegen.) Die richtige Stellung des Fernrohrs wird daran erkannt, daß ein damit anvisierter entfernter Punkt in der Kreisebene liegt. — Ohne Umlegen orientiert man (Dorn) mit zwei Papierstreifen von einer Länge gleich dem Abstande der Fernrohraxe von der Teilung, vertikal so an zwei Fenster geklebt, daß die Oberkanten in der Kreisebene liegen: 1) Das Spiegelbild der einen Unterkante in der geeignet schräg gedrehten Fläche muß dem dicht herangehaltenen Auge in der Höhe der anderen Unterkante erscheinen. 2) Im richtig stehenden Fernrohr treten dann diese Spiegelbilder in der Visierhöhe auf. — Je kleiner oder unvollkommener die spiegelnde Fläche, desto genauer muß zentriert werden.

Nun stülpt man das mit einer stärker als der Körper brechenden Flüssigkeit (Schwefelkohlenstoff 1,63, α-Monobromnaphthalin 1,66, Methylenjodid 1,74) gefüllte Fläschchen von unten über den Körper, umgibt das Fläschchen mit gut durchscheinendem, nötigenfalls mit Petroleum bepinseltem



Seidenpapier und beleuchtet auf einer Seite mit der Sodaflamme. Bei passender, durch Probieren zu findender Stellung der spiegelnden Fläche und der Lampe wird dann das auf große Entfernung akkommodierte Auge oder Fernrohr das Gesichtsfeld der Fläche in eine helle und in eine weniger helle Hälfte geteilt sehen, auf deren Grenzlinie man einstellt.

Unvollkommen plane Flächen, z. B. natürliche Kristallflächen, beobachtet man am besten ohne vergrößerndes Fernrohr. Geeignet ist das Diopter mit halber Linse, durch welche der Faden deutlich gesehen wird, während die andere Hälfte der Pupille an der Linse vorbei ein nicht vergrößertes Gesichtsfeld hat. — Oder man gebraucht das Fernrohr umgekehrt.

Durch Drehen der Alhidade stellt man auf die Grenzlinie ein und liest den Teilkreis ab. Dann dreht man Fläche und Lampe nach der anderen Seite und stellt wieder ein. Der **halbe** Winkel zwischen beiden Stellungen ist der Grenzwinkel Φ der totalen Reflexion zwischen der Flüssigkeit und dem Körper, also (nach Gl. 1) $n = N \sin \Phi$, wenn N das B.-V. der Flüssigkeit bedeutet.

Das B.-V. des reinen Schwefelkohlenstoffs beträgt für Natriumlicht bei 20° 1,6275 und nimmt auf + 1° um 0,00080 ab. Die **Temperatur** muß also **sorgfältig** beobachtet werden. Ein Schirm mit einer durch eine starke Glasplatte bedeckten Öffnung vor der Flamme vermindert die Erwärmung und verdunkelt zugleich den Hintergrund.

Kristalle. Doppelbrechende Objekte geben im allgemeinen zwei Brechungsverhältnisse, also zwei Grenzen; an deren innerem sowie äußerem Paar führt man die beschriebene Messung aus. Ein einaxiger Kristall wird am bequemsten in einer zur Hauptaxe senkrechten Fläche (siehe **70**) untersucht. Der horizontal polarisierte (d. h. im Nicol'schen Prisma bei vertikaler Stellung der größeren Diagonale verschwindende) Strahl ist der ordentliche, der andere der außerordentliche.

Ist die Kristallfläche der optischen Axe parallel, so bekommt man beide Hauptbrechungsverhältnisse, wenn die optische Axe der Drehaxe parallel liegt. Horizontal polarisiert ist der außerordentliche Strahl.

Eine beliebig gelegene Kristallfläche liefert stets den ordentlichen Strahl; sie enthält aber auch eine zur optischen Axe senkrechte Richtung (Halbierungslinie des seitlichen Winkels in der Spaltfläche eines Rhomboeders; Grundlinie des Dreiecks in der Quarzpyramidenfläche). Diese Richtung horizontal gestellt liefert die beiden Hauptbrechungsverhältnisse.

Ein optisch zweiaxiger Kristall mit einem Schliff parallel einem Hauptschnitt (**70**) gibt zwei Hauptbrechungsverhältnisse, wenn eine optische Elastizitätsaxe horizontal gestellt ist. Drehung der reflektierenden Fläche in sich um 90° liefert das dritte Haupt-B.-V. und eins der obigen noch einmal.

In dem Hauptschnitt, welcher den Doppelpunkt der Wellenfläche enthält, kommt dieser bei geeigneter Stellung zur Erscheinung.

Flüssigkeiten. *a*) Brechungsverhältnis N der Flüssigkeit im Fläschchen. Um dieses mit dem Totalreflektometer selbst zu messen, nimmt man eine kleine Planplatte von bekanntem B.-V. n (z. B. Bergkristall mit $n = 1{,}5442$ und $1{,}5533$ für Na) oder eine Luftschicht hinter einer Planplatte. Man hat

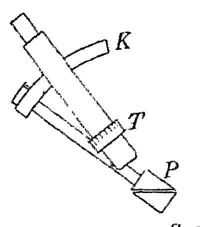
$$N = \frac{n}{\sin \Phi} \quad \text{oder bei Luft} \quad N = \frac{1}{\sin \Phi}\,.$$

b) Ein Flüssigkeitstropfen hinter einer Planplatte kann ebenso untersucht werden wie ein fester Körper.

F. K., Wied. Ann. 4, 1. 1878; über Kristallmessung besonders W. Kohlrausch, ib. 6, 86. 1879; Einrichtungen zu diesem Zweck auch Klein, Neu. Jahrb. f. Mineral. 1879; Klein, Kristallpolymeter, Berl. Sitzber. 1900, 248. — Über die Anwendbarkeit auf weißes Licht mit Hilfe eines quer gestellten Spektroskops vgl. Pulfrich, Wied. Ann. 30, 487. 1887.

III. Refraktometer von Abbe.

Besonders für Flüssigkeiten bestimmt. Fig. f. S. Es genügt ein Tropfen, den man zwischen die Trennungsflächen des Doppelprismas P aus stark brechendem (leicht verletzlichem!) Glase bringt. Man legt hierzu das Instrument um, schiebt das eine Prisma vorsichtig ab, und nach Aufbringen der Flüssigkeit wieder auf. Man mißt hier den, dem Grenzwinkel totaler Re-



flexion gleichen Grenzwinkel des Eindringens. Strahlen, die der Beleuchtungsspiegel S auf die Flüssigkeit wirft, dringen nämlich in das obere Prisma nur innerhalb dieses Winkels ein, so daß man bei richtiger Neigung des Doppelprismas in dem auf Parallelstrahlen eingestellten Fernrohr das Gesichtsfeld in homogenem Licht scharf abgegrenzt sieht.

Man macht mittels des Okularauszuges das Fadenkreuz deutlich sichtbar. Bei Anwendung von Natriumlicht hat man alsdann das Prisma mit dem Zeiger nur so zu drehen, daß die Lichtgrenze auf das Fadenkreuz fällt, dann gibt die Teilung auf dem Kreisbogen K direkt das B.-V. der Flüssigkeit für Natriumlicht an.

Unter Anwendung gewöhnlichen weißen Lichtes erhält man folgendermaßen zugleich die Dispersion der Flüssigkeit. Das Gesichtsfeld ist jetzt im allgemeinen gefärbt. Man stellt den Kompensator, d. h. die Trommelteilung T (mit welcher zwei geradsichtige Prismen sich entgegengesetzt drehen) so, daß die Färbung einer scharfen Grenze Platz macht. Nun bringt man die Grenze auf das Fadenkreuz und liest Alhidade und Trommelteilung ab. Dann sucht man eine zweite Trommelstellung mit scharfer Grenze, stellt wieder ein und liest ab.

Das Mittel der beiden Alhidadenstellungen gibt das B.-V. für Natriumlicht; die Dispersion wird nach einer jedem Instrument beigegebenen Tabelle berechnet.

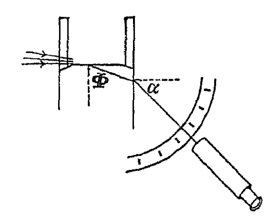
Als Probe für die Richtigkeit, event. für die Korrektion der Teilungen dienen bekannte Flüssigkeiten (Tab. 24), insbesondere Wasser, oder eine bekannte Glas- oder Bergkristallplatte (vor. S.). Die Alhidade muß mit den Prismen sehr fest verbunden sein. Eine Unsicherheit liegt für manche Flüssigkeiten in der Temperatur.

Einen festen Körper klebt man mit einem Tropfen einer stark brechenden Flüssigkeit (Cassiaöl, Arsenbromür) unter das obere der beiden Prismen. Durchsichtige Körper werden mittels des Beleuchtungsspiegels mit Tageslicht oder Lampenlicht durchfallend beleuchtet. Andere erleuchtet man auffallend von der Seite. Einiges Probieren wird die Grenze deutlich sichtbar liefern.

Vgl. Abbe, Apparate z. Best. des Brechungsvermögens, Jena 1874, auch Sitzber. d. Jen. Ges. f. Med. u. Nat. 1879, Febr. 21.

IV. Refraktometer von Pulfrich.

Das Instrument benutzt nicht totale Reflexion, sondern den umgedrehten Vorgang, nämlich streifenden Eintritt, der aber auf dasselbe hinausführt. Die Flüssigkeit wird auf die Oberfläche eines Glaswürfels gebracht, über welchen zu diesem Zweck ein Glascylinder gekittet ist. In $^3/_4$ bis 1 m Entfernung, ein wenig höher als die obere Glasfläche, stellt man eine Natriumflamme auf und vereinigt ihre Strahlen mit einer Sammellinse auf dem unteren Rand des Cylinders. Auf die Grenze zwischen hell und dunkel richtet man von unten das vertikal drehbare, auf unendlich eingestellte Fernrohr, dessen Teilkreis den Grenzwinkel α des Austritts mit der Normalen auf der Austritts-Glasfläche gibt.



Zur Kontrole des Nullpunkts der Kreisteilung läßt man das mittels eines schräg angeklebten Glasplättchens beleuchtete (60, 4) Fadenkreuz an der horizontalen Fläche von oben auf sich zurückspiegeln: die Einstellung soll 270° betragen.

Hat das Glas das B.-V. N, so hat die Flüssigkeit

$$n = \sqrt{N^2 - \sin^2 \alpha}.$$

Denn es ist $N/n = 1/\sin \Phi$, andrerseits $N = \sin \alpha / \sin(90 - \Phi) = \sin \alpha / \cos \Phi = \sin \alpha / \sqrt{1 - n^2/N^2}$, also $N^2 - n^2 = \sin^2 \alpha$, q. e. d.

Es muß $n < N$ sein. Würfel mit $N = 1{,}615$ bez. 1,78 sind gebräuchlich. Eine Tabelle für n wird beigegeben. Die richtige Orientierung der Teilung kann mit Wasser $n_{15^0} = 1{,}3334$, $n_{20^0} = 1{,}3330$ geprüft werden.

Mit einer Heizvorrichtung kann in höherer Temperatur beobachtet werden. Eine Tabelle korrigiert die gleichzeitige Änderung der Brechung im Glase.

Mittels einer Trennungsfläche aus schwarzem Glase lassen sich mehrere Flüssigkeiten gleichzeitig, also bei derselben Temperatur beobachten.

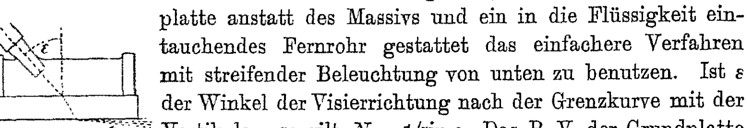
Pulfrich, ZS f. Instr.: die einfache Form (Wolz in Bonn) 1888, 47; die vollkommenere (Zeiß, Jena) 1895, 389. Auch Pulfrich, das Totalreflektometer usw. Leipz. 1890. Le Blanc, ZS f. phys. Ch. 10, 433. 1892. Eine elektrische Heizvorrichtung bei Mabery u. Shepherd, Proc. Amer. Acad. 38, 283. 1902.

Feste ebene Körper lassen sich, durch Vermittelung eines stärker brechenden Flüssigkeitstropfens auf die Grundfläche geheftet, ebenso untersuchen. Gepulverte feste Körper können untersucht werden, indem man sie auf der Fläche mit einem Flüssigkeitsgemisch (Alkohol, Äther, Aceton, Benzol, Toluol, Bromnaphthalin) übergießt, welches man durch Ausprobieren abändert, bis die dem festen Körper entsprechende Lichtgrenze scharf erscheint (Le Blanc).

Um an Kristallflächen bequem die Richtung zu wechseln, dient eine, als Oberfläche eines vertikalen Cylinders oder einer Halbkugel (Abbe) in

sich drehbar gemachte Grundfläche. Czapski, ZS f. Instr. 1890, 246; Pulfrich, ib. 1899, 8; Leiſs, ib. 1902, 331. Über Justierung vgl. Wright, ib. 1908, 201.

Eintauchrefraktometer. Ein Trog mit planparalleler Glasgrundplatte anstatt des Massivs und ein in die Flüssigkeit eintauchendes Fernrohr gestattet das einfachere Verfahren mit streifender Beleuchtung von unten zu benutzen. Ist ε der Winkel der Visierrichtung nach der Grenzkurve mit der Vertikalen, so gilt $N = 1/\sin \varepsilon$. Das B.-V. der Grundplatte hebt sich heraus. Pulfrich, ZS f. Instr. 1899, 335.



V. Mit dem Spektrometer.

a) Durch eine sehr dünne größere planparallele Platte in einem Flüssigkeitstrog mit zwei parallelen ebenen Wänden fällt paralleles homogenes Licht vom Spalt (**60**), den man mit dem Fernrohr durch die Platte anvisiert. Die Flüssigkeit breche stärker als die Platte; die beiden schrägen Stellungen der Platte, in denen das Spaltbild plötzlich verschwindet, liegen um 2Φ auseinander. — Das B.-V. der Flüssigkeit selbst wird ebenso mittels einer dünnen Luftschicht in einem Glaskästchen mit planparallelen Wänden gefunden. Für die Rechnung gelten die Formeln aus II.

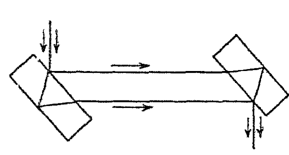
Bringt man zwischen den Trog und das Fernrohr ein geradsichtiges Prisma und beleuchtet mit Sonnenlicht, so erscheint ein Fraunhofer'sches Spektrum (S. 277). Durch Drehung der Objektplatte kann man die Grenze der totalen Reflexion auf irgend eine Linie einstellen.

E. Wiedemann, Pogg. Ann. 158, 375. 1876; Terquem und Trannin, ib. 157, 302. 1876.

b) Das Verfahren II läßt sich mit dem Spektrometer (**60**) ausführen, wenn man einen Flüssigkeitstrog mit Planwand fest aufstellt, in dem die Objektplatte mit dem Teilkreise drehbar ist.

63a. Interferenzrefraktor (Jamin 1856). Bestimmung kleiner Brechungsverhältnisse, z. B. von Gasen, und kleiner Änderungen des Brechungsverhältnisses.

Zwei gleiche, dicke (z. B. 3 cm), planparallele, am besten rückseitig versilberte Glasplatten stehen sich parallel gegenüber, mit der Verbindungslinie ihrer Mitten einen Winkel von 45—50° bildend. Ein auf I fallender Lichtstrahl liefert durch Reflexion an der Vorder- und Hinterfläche zwei Strahlen. Durch Reflexion an II liefert jeder Strahl wieder zwei Strahlen, von denen die beiden gezeichneten mit einander austreten und, sobald die Platten etwas verdreht werden, ein System von Interferenzstreifen erzeugen (Brewster). Die übrigen Reflexe, z. B. der des oberen Strahles an der Außenfläche der zweiten Platte, seien durch Schirmchen vom Auge abgeblendet.



In den Weg der beiden Strahlen zwischen den Platten mögen zwei

optisch gleiche Körper geschoben sein. Nimmt man nun an dem Wege des einen Strahles Änderungen vor, etwa bezüglich Temperatur, Druck, Konzentration, Füllung mit einem Gase usw., während man die Streifen im Auge behält, so wandern diese. Aus ihrer Verschiebung, der Länge der eingeschalteten Körper und der Wellenlänge des Lichtes läßt sich die der Zustandsänderung entsprechende Änderung des Brechungsexponenten bestimmen (II).

Um den beiden Teilstrahlen einen, für die meisten Anwendungen bequemeren, größeren Abstand von einander zu geben, ist die Anordnung mit zwei Platten, die in derselben Ebene liegen, und mit zwei Hilfsspiegeln zweckmäßig (Mach, Zehnder); Fig.

Endlich kann der Zweck, Flächen zu bekommen, die einen Teil des Lichtes reflektieren und einen anderen Teil durchlassen, auch durch ganz dünne Luftschichten zwischen Prismen erreicht werden; dadurch, daß dann die Abblendung von Seitenbildern fortfällt, wird ein größeres Gesichtsfeld erzielt (Mach).

Der Gebrauch unterscheidet sich bei den verschiedenen Anordnungen nicht wesentlich.

Vgl. Zehnder, ZS f. Instr. 1891, 275; Mach, ib. 1892, 89. Eine zusammenfassende Beschreibung von Lummer in der ZS.: Der Mechaniker 1900, S. 25 ff. — Abbildungen und Beschreibungen auch in dem Katalog der Zeiß'schen Werkstätte in Jena.

Temperaturmessung. Vorausgesetzt wird, daß in einem Mittel die Änderung der Wellenlänge durch die Temperatur bekannt ist. Für ein bestimmtes Gas gilt, bei wechselnder Dichtigkeit s, innerhalb weiter Grenzen, wenn n gegen das Vakuum gemessen ist, merklich $(n-1)/s = \text{Const.}$ Innerhalb dieser Grenzen besteht hiernach zwischen der Wellenlänge Λ im Vakuum und λ im Gase von der abs. Temperatur T, wenn bei 0° C und gleichem Druck das B.-V. $= n_0$ ist, die Beziehung $\Lambda = \lambda[1 + (n_0 - 1)273/T] = \text{Const.}$ Auf einer Strecke, die im Vakuum S Wellenlängen enthält, liegt dann bei T eine um $\sigma = S(n_0 - 1)273/T$ größere Anzahl. Messungen von σ ergeben also T. — Vorausgesetzt wird die Giltigkeit der Gasgesetze.

Am einfachsten gehen die beiden Strahlenbündel durch zwei parallele gleich lange Röhren mit demselben Gas. Die eine, auf die zu messende Temperatur erhitzte, bleibt auf Atmosphärendruck. In der anderen, auf bekannter Temperatur erhaltenen vermindert man den Druck so weit, daß keine Verschiebung der Streifen eintritt. Die absoluten Temperaturen der Röhren verhalten sich dann wie die beiderseitigen Drucke. D. Berthelot, Ann. chim. phys. (7) 26, 58. 1902.

I. Aufstellung des Apparates.

Die beiden Platten sind gegenseitig sehr fest aufgestellt, entweder gemeinsam auf schwerem Stativ montiert (z. B. die Ausführung der Zeiß'-

schen Werkstätte), oder, um größeren Raum zu bieten, getrennt auf besonderen Pfeilern.

Wird eine Natriumflamme, am besten in schwarzem Cylinder mit Fenster, etwa 50 cm vor der ersten Platte aufgestellt, so erblickt man, ungefähr auf unendlich akkommodierend, durch die zweite Platte die Streifen sofort oder nach kleinen Drehungen der Platte um eine Vertikal- und eine Horizontalaxe. Man dreht, bis die Streifen scharf, parallel und gerade erscheinen; auf ihre Richtung kommt es häufig nicht an. Meist wird man jedoch die vertikale oder horizontale (cf. unten u. S. 289) Richtung vorziehen.

Zum Beobachten dient am besten ein festes Fernrohr mit einer spaltförmigen Blende vor dem Objektiv, die Spaltrichtung senkrecht zu den Streifen. Bruchteile der Streifenbreiten können mit einem Okularmikrometer gemessen werden (es kann dazu auch ein Kompensator dienen, siehe am Schluß). — Zu viele Streifen im Gesichtsfeld veranlassen leicht Irrtümer beim Zählen; eventuell blende man einige ab.

Nach Einführung der Versuchsröhren usw. zwischen die Platten und eventuell Abblenden der beiden äußeren Bilder werden Streifenrichtung, Streifenabstand und Fernrohr endgiltig eingestellt.

Ist Beobachtung mit weißem Licht nötig (III), so bewirkt man zunächst mit Natriumlicht horizontale (s. oben) Streifen von beträchtlichem Abstand. Mit weißem Licht (durch Schließen des Luftzuges am Brenner) wird man dann durch sehr langsames Drehen der zweiten Platte um ihre Vertikalaxe farbige Streifen in das Gesichtsfeld bringen. Der in ihrer Mitte liegende farblose Streifen wird mitten ins Gesichtsfeld gebracht, worauf man das Fernrohr auf größte Deutlichkeit einstellt.

Unter Umständen wird eine Anordnung mit parallelem weißen Licht (Sonne) vorzuziehen sein (Quincke, Pogg. Ann. 132, 50. 1867). Die unvermeidlichen Temperaturschwankungen bewirken aber leicht ein störendes Wandern der Streifen.

Ein Wassertrog vor der Lichtquelle und Abkürzung der Beleuchtungszeit ist auch bei schwachen Lichtquellen anzuraten.

II. Messung bei stetiger Zustandsänderung.

Läßt sich die Änderung eines Körpers so kontinuierlich und überall gleichmäßig vornehmen, daß man dabei den Gang der Streifen verfolgen kann, wie z. B. bei Druckänderung in einer Flüssigkeit, der Verdünnung eines Gases u. dgl.: so zählt man einfach, um wieviele Streifenbreiten und Bruchteile derselben sich das mit homogenem Licht (Na) erzeugte Streifensystem im Fernrohre verschiebt. Ist dann

L die Länge der durchstrahlten Schicht,

λ die Wellenlänge des Lichtes nach Tab. 23,

s die Anzahl der durchgewanderten Streifenbreiten,
n_1 und n_0 das B.-V. nach und vor der Änderung, so gilt

$$n_1 - n_0 = s\lambda/L.$$

Denn wenn $\lambda_0 = \lambda/n_0$ und $\lambda_1 = \lambda/n_1$ die Wellenlängen in dem ursprünglichen und dem abgeänderten Mittel sind, so ist offenbar

$$s = L/\lambda_1 - L/\lambda_0 = (n_1 - n_0)L/\lambda.$$

III. Messung bei unstetiger Zustandsänderung.

Die Verschiebung der Streifen kann nicht immer zählend verfolgt werden (z. B. beim Auflösen eines Salzes bez. Ersetzen einer Lösung durch eine andere). Dann schlägt man folgenden Weg ein.

Man nimmt weißes Licht. Die (horizontalen) farbigen Streifen liefern durch ihr verschiedenes Aussehen das Mittel, den im Natriumlicht nicht unterscheidbaren Streifen eine Numerierung von einer dem farblosen Streifen (I) benachbarten schwarzen Franse an zu geben. Die durch die Zustandsänderung eingetretene Verschiebung dieses Nullpunktes wird gefunden, indem man bei einfarbigem Licht die zweite Platte um ihre Vertikalaxe, die Streifenverschiebung abzählend, so weit dreht, bis wieder im weißen Licht der Nullpunktsstreifen einsteht. Dies gibt, bis auf eine Korrektion, die Anzahl der infolge der Änderung des Körpers gewanderten einfarbigen Streifen, woraus die Änderung des B.-V. wie unter II bestimmt wird.

Nur horizontale Streifen können im weißen Licht erscheinen. Der Gangunterschied φ zweier interferierender Strahlen im Refraktor ist nämlich (Verdet-Exner l. c. am Schluß) $\varphi = 2nd(\cos b - \cos b')$, wo d und n Dicke und B.-V. der Platten, b und b' die Brechungswinkel der Strahlen in der ersten und zweiten Platte sind. Damit $\varphi = 0$ wird, muß $b = b'$ sein, was nur bei vertikaler gegenseitiger Neigung der Platten eintritt.

Die erwähnte Korrektion besteht in der Abänderung der im vorigen beobachteten Streifenzahl um eine ganze Zahl; sie entspringt aus der Dispersion.

Die Messung findet, wie wir sahen, mittels Kompensation zweier sich entgegenwirkender Gangunterschiede statt, welche nicht für alle Farben gleichzeitig möglich ist, da die beiden entgegenwirkenden „Apparate" (Refraktor und eingeschalteter Körper) die Phasenunterschiede für verschiedene Farben nicht in demselben Verhältnis einführen. Einen farblosen Streif bekommt man für denjenigen aus dem Gegeneinanderwirken der beiden Apparate resultierenden Gangunterschied, der für alle Farben dieselbe Größe behält.

Führt z. B. der eine Apparat die Gangunterschiede für Rot und Blau im Verhältnis 7:9,8 ein, der andere im Verhältnis 7:10, so wird bei Ein-

führung von 7,5 bez. 10,5 Wellenlängen mit dem ersten und —7 bez. —10 mit dem zweiten Apparat der resultierende Gangunterschied für Rot und Blau = + 0,5 sein. Für die übrigen Farben tritt dann im allgemeinen nahe derselbe Gangunterschied 0,5 auf, so daß wir einen diesem entsprechenden schwarzen Streif bekommen.

Jener der Achromasie entsprechende Gangunterschied ändert sich mit dem Wachsen des kompensierten Gangunterschiedes. Die farblose Linie wandert also gleichsam auf dem mit Na-Licht erhaltenen kompensierten Streifensystem und durchläuft dabei verschiedene Helligkeiten von Schwarz zu Weiß, die der Helligkeit ihres Ortes im monochromatischen System entsprechen. Fällt sie auf einen dunkelen Streifen, so ist das farbige Streifensystem um eine schwarze Linie symmetrisch gruppiert, und wenn sie auf die Mitte eines hellen Streifens fällt, um eine weiße Linie. Der Nullpunkt unserer Streifennumerierung wandert also langsam auf dem System fort.

Vgl. Sirks, Pogg. Ann. 140, 621; 141, 393. 1870. Die Beobachtung dieser Wanderung liefert auch die Dispersionsänderung; s. Hallwachs, Wied. Ann. 47, 396. 1892.

Um die Korrektion zu ermitteln, wird bei einem Hilfsversuch der zu untersuchende Körper in genügend kleinen Intervallen abgeändert, bis die achromatische Linie schwarz erscheint. Dann ändert man weiter ab, bis die farblose Linie das nächste Mal wieder schwarz erscheint. Daraus ergibt sich die Größe der Zustandsänderung, bez. der entsprechenden Streifenverschiebung, für welche sich die farblose Linie um eine Streifenbreite in zu beobachtender Richtung verschiebt. Man kann dann, sobald bei einem Versuch die ganze Streifenverschiebung ermittelt ist, immer sagen, welche Nummer einer der dunkelen Nachbarstreifen der achromatischen Linie ursprünglich hatte, d. h. wie weit er vom einmal gewählten Nullpunkt absteht.

Bei einer Lösung ist die einer bestimmten Konzentrationsänderung entsprechende Wanderung der farblosen Linie von der vorausgehenden Konzentration ziemlich unabhängig.

Je nachdem sich der Nullpunkt im Sinne der Streifenwanderung oder entgegengesetzt verschiebt, ist die Nummeränderung des zur Einstellung gewählten dunkelen Nachbarstreifs der achromatischen Linie von der gesamten Streifenverschiebung abzuziehen oder zu ihr zu addieren.

Da die Bruchteile direkt mikrometrisch gemessen werden, so dienen die Beobachtungen mit den Streifen im weißen Licht nur zur Ermittelung der ganzen Anzahl Verschiebungen; die Korrektion beträgt also eine ganze Anzahl Wellenlängen.

Vgl. Siertsema, De Jamin'sche Interferentialrefractor, Proefschrift, Groningen 1890; Hallwachs l. c.

Über die allg. Theorie des Int.-Refraktors siehe noch: Verdet-Exner, Wellentheorie d. Lichtes I, 94. 1881; Ketteler, Farbenzerstreuung d. Gase S. 29. 1865; Zehnder, Wied. Ann. 34, 91. 1888; über die Anordnung eines I.-R. auch für Dispersion: Borgesius, Wied. Ann. 54, 221. 1895.

Jamin'scher Plattenkompensator. Kompensator heißt eine Vorrichtung, durch die ein Gangunterschied zweier Strahlen geändert, z. B. aufgehoben werden kann. Der Jamin'sche K. besteht aus zwei gleich dicken, schwach gegenseitig geneigten Glasplatten, die nebeneinander auf einer gemeinschaftlichen, ihrer Schnittlinie parallelen Drehaxe mit Kreisteilung sitzen und also gestatten, in zwei Strahlengänge verschiedene meßbar veränderliche Glasdicken einzuschalten.

Arago's Keilkompensator. Zwei längs einander gleitende gleiche Glaskeile gestatten, eine meßbar veränderliche Glasdicke herzustellen. Durch diese geht der eine der beiden Strahlen, durch eine der Summe beider Keile in deren mittlerer Stellung gleich dicke Glasplatte der andere. Durch Verschieben der Keile wird der Gangunterschied geändert.

Beide Kompensatoren können selbständig anstelle des Int.-Refr. zur Einschaltung, also auch zur Bestimmung von Gangunterschieden dienen, z. B. zur Bestimmung des Temp.-Einflusses auf das B.-V. einer Flüssigkeit (Jamin; Wallot, Ann. d. Ph. 11, 355. 1903) oder des B.-V. von Gasen (Ketteler, Mascart, Lorenz). Sie lassen sich aber auch in Verbindung mit dem Int.-Refr. oft vorteilhaft statt der Drehung der zweiten Platte benutzen (s. Quincke l. c. S. 204). — Für weißes Licht dient bei der empirischen Graduierung das oben über die Wanderung der farblosen Linie gesagte.

Über Vergleichung des B.-V. zweier Gase vor 2 Spalten mittels Interferenzfransen s. Rayleigh, Proc. R. S. 59, 198; ZS f. phys. Ch. 19, 364. 1896; Ramsay und Travers, Proc. R. S. 62, 225. 1897.

Über andere Methoden für Gase s. S. 275.

63b. Untersuchung optischer Inhomogenität nach der Schlierenmethode (Toepler).

Man bringt vor eine breite Flamme oder in das konvergierende Strahlenbündel des durch eine Linse gegangenen Sonnenlichtes eine kleine, geradlinig begrenzte Öffnung L, entwirft von ihr mittels einer guten Linse A in nicht zu kleiner Entfernung (über 1 m) ein scharfes reelles Bild und bringt dicht hinter diesem das Objektiv B eines auf den Ort MN, wo die Schlieren gesucht werden, akkommodierten Fernrohrs an. Und zwar soll dieser Ort nicht weit von der Linse A entfernt sein.

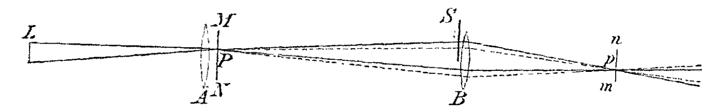
Nun werde mit einer Schneide S, die einer der Begrenzungskanten der zuerst genannten Öffnung parallel ist, durch allmäh-

19*

liches Vorschieben der Ort des reellen Bildes vor dem Fernrohr verdeckt. In der geeigneten Stellung treten alsdann Ungleichheiten der Raumerfüllung, welche eine wenn auch nur kleine Änderung der Lichtbrechung bedingen, als erhellte oder verdunkelte Teile („Schlieren") des Gesichtsfeldes hervor. Um nichts zu übersehen, benutzt man nach einander verschieden gerichtete Kanten jener Öffnung.

Die Empfindlichkeit wächst mit dem Abstande. Für manche Zwecke sieht man die Schlieren auch mit dem bloßen, an den Ort des reellen Bildes gehaltenen Auge.

Das Wesen der Erscheinung besteht in folgendem. mn sei das durch Objektiv B im Fernrohr entworfene Bild der Fläche MN, die sich in der Nähe der von L aus erleuchteten Linse A befindet; in MN werden die Schlieren gesucht. Die Stelle P bildet sich in p ab. Durch Vorschieben des Schirmes S wird p allmählich dunkler und verschwindet, wenn das



ganze von L auf p fallende Lichtbündel abgeblendet ist. Befindet sich nun in P eine prismatisch begrenzte Stelle anderer Lichtbrechung als die Umgebung, so wird das Lichtbündel verschoben (sein Konvergenzpunkt p bleibt dabei an seinem Orte), und je nachdem der Schirm von der einen oder der anderen Seite vorgeschoben wird, verschwindet das Bild p später oder früher als die Umgebung: es tritt in der Nähe der Grenze bei p eine Erhellung oder Verdunkelung gegen die Umgebung auf. Prismatische Wirkung aber wird ein abgegrenzter Raum anderer Brechbarkeit der Natur der Sache nach haben müssen.

Anordnung nach Abbe am Spektrometer. Der Spalt wird durch eine kleine kreisrunde Öffnung ersetzt, das Okular des Fernrohrs durch eine schwarze Kreisscheibe von solcher Größe, daß sie, an den Ort des vom Objektiv entworfenen reellen Bildes der Öffnung gebracht, dieses gerade eben verdeckt, was mit einer vorgehaltenen Lupe zu prüfen ist. Man entfernt nun die Lupe, bringt das zu prüfende Objekt zwischen die beiden Objektive und beobachtet es mit dem vor die Kreisscheibe gehaltenen, bloßen oder so bewaffneten Auge, daß man das Objekt deutlich sieht. Die Schlieren werden dann vermöge der durch sie über den Rand der Scheibe abgelenkten Strahlen als Erhellungen usw. sichtbar.

Auch in den mit dem Interferenzrefraktor (**63a**) erzeugten Streifen werden Schlieren eines durchstrahlten Mittels sichtbar.

Näheres, auch über die Anwendungen, bei Toepler, Pogg. Ann. 131, 33 u. 180. 1867; Über die Anordnung von Abbe s. Czapski, ZS f. Instr.

1885, 117. — Über Aufnahmen von Luftschlieren um Geschosse Mach, Wien. Sitz.-Ber. 92, 625. 1885; 95, 764. 1887; 98, 1310. 1889; 105, 605. 1896. — Darstellung von Funkenschallwellen u. A. bei M. Toepler, Ann. d. Ph. 27, 1043. 1908. — Eine zusammenfassende Darstellung von Lummer in der ZS Der Mechaniker, 1900, S. 61.

64. Spektralanalyse (Bunsen und Kirchhoff 1860).

Eine Lichtsorte wird definiert durch die in ihr enthaltenen einzelnen Wellenlängen und durch deren Intensitätsverhältnis.

Die Analyse wird ausgeführt mittels der Zerlegung des Lichtes in sein Spektrum: 1. durch Brechung im Prisma; 2. durch Beugung am Gitter, bei dem Durchgange oder bei der Reflexion; 3. durch Interferenzen hoher Ordnung. Vgl. S. 267 ff.

Aus der Zusammensetzung des Lichtes kann auf seinen Ursprung geschlossen werden. Glühende feste und flüssige Körper geben ein zusammenhängendes, Gase und Dämpfe ein unterbrochenes Emissionsspektrum, worin die Farben teils als mehr oder weniger scharfe „Linien" auftreten, teils als breitere, häufig einseitig scharf begrenzte, „Banden", die sich auch bei starker Vergrößerung nicht immer in Linien auflösen. Linien werden vorzugsweise den Atomschwingungen, Banden den Molekülschwingungen zugeschrieben. Über Gesetzmäßigkeiten der Verteilung (Serien) s. die Lehrbücher.

Das Spektrum hängt von den im Dampf vertretenen Elementen und ihrer chemischen Verbindung, auch von Temperatur und Dichte ab. In der Bunsenflamme hat ein Metalldampf meist einen von seiner Verbindung im verdampfenden Salz wenig beeinflußten Zustand und das Spektrum charakterisiert wesentlich das Metall.

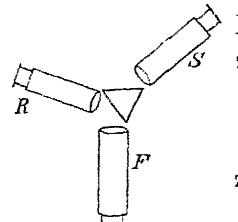
Auch die Absorption des Lichtes in einem Körper läßt häufig auf dessen chemische Beschaffenheit schließen. — Gase oder Dämpfe absorbieren dieselben einzelnen Farben, welche sie bei der gleichen Temperatur selbstleuchtend ausstrahlen. Die Fraunhofer'schen Linien entstehen durch solche Absorptionen in der Sonnenatmosphäre (Kirchhoff).

Der Spektralapparat (Spektroskop) definiert eine Farbe geometrisch, meist durch eine Skale, auf welcher ihre Bestandteile erscheinen.

Geradsichtige Spektroskope haben vor einem Spalt ein oder mehrere geradsichtige Prismensysteme aus Kronglas in Verbindung mit Flintglas oder mit einem stark zerstreuenden Flüssigkeitsprisma (Zimtäther; Wernicke) und eine Linse oder ein Okularsystem, um den Spalt deutlich erscheinen zu lassen. Die Skale sitzt im Okular.

Über ein Spektroskop veränderlicher Dispersion mittels zweier gegeneinander drehbarer Systeme vgl. Krüß, ZS f. Instr. 1906, 139. — Über einen Quarz-Spektrographen Reichenheim, ib. 1908, 340. — Über ein Gitterspektroskop mit nach Wellenlängen geteilter Mikrometerschraube s. Löwe, Verh. D. Ph. Ges. 1908, 671; Phys. ZS 9, 752. 1908; ZS f. Instr. 1908, 261.

Der gebräuchliche Spektralapparat (Fig.). Er trägt wie das Spektrometer, Fernrohr F und Spaltrohr (Kollimator) S; außerdem ein Rohr R mit einer Mikrometerskale. Das Bild dieser Skale wird in der dem Fernrohre zugewandten Prismenfläche gespiegelt.



I. Einstellung des Spektralapparates.

Die Reihenfolge der Operationen ist innezuhalten.

Der Spalt soll einem fernen Objekt entsprechen und deutlich erscheinen. Wenn die richtige Auszugstellung des Spaltrohrs gegeben ist, so hat man nur das Fernrohr auf Deutlichkeit des Spaltbildes auszuziehen; sonst stelle man es erst auf ein fernes Objekt ein, richte es dann auf den Spalt und verschiebe diesen so, daß er deutlich erscheint. — Die Flamme soll das Objektiv des Spaltrohres ganz erleuchten.

Das Prisma soll die Minimumstellung erhalten. Man beleuchtet den Spalt mit der Sodaflamme, stellt das Prisma in nahezu richtiger Stellung vor die Spaltlinse, orientiert sich mit bloßem Auge ungefähr über die Richtung des austretenden Strahles und sucht mit dem Fernrohr das Bild des Spaltes. Nun dreht man das Prisma (indem man wenn nötig mit dem Fernrohr folgt), bis das Spaltbild im Fernrohr umkehrt, und stellt in dieser Lage das Prisma fest.

Das reflektierte Bild der Skale soll deutlich erscheinen. Die Skale wird durch eine nicht zu nahe (20 cm) aufgestellte schmale, kleine Flamme erleuchtet. Nachdem durch Drehen des Skalenrohres das Skalenbild im Fernrohr gefunden ist, zieht man das Skalenrohr heraus, bis ihr deutliches Bild sich bei dem Bewegen des Auges vor dem Okulare nicht gegen das Spaltbild verschiebt.

Ein bestimmter Skalenteil, bei den den Zeichnungen von Bunsen und Kirchhoff angepaßten Skalen der Teil 50, soll mit der Natriumlinie zusammenfallen. Man dreht das Skalenrohr, bis diese Stellung erreicht ist, und stellt es fest.

II. Auswerten der Skale.

Die Skale pflegt in gleiche Teile geteilt zu sein. Das Auswerten bezieht sich, je nach dem Zwecke, auf die Fragen: entweder, welchen

Lichtwellenlängen die Teilstriche entsprechen; hierfür ist, wegen der nahe gleichförmigen Verteilung, das Beugungsspektrum (**65** I) besonders geeignet. Für chemische Analyse fragt man, wo die chemischen Spektrallinien auf der Skale erscheinen.

Das empirische Auswerten ist für beide Fälle grundsätzlich gleich. Wir behandeln in erster Linie die chemische Aufgabe, wie sie am gebräuchlichen Prismen-Spektralapparat vorzuliegen pflegt.

Um zu wissen, welchen Punkten der Skale die den einzelnen chemischen Elementen angehörenden Linien entsprechen, kann man die Spektra der Stoffe einzeln beobachten und die Skalenteile der Linien (nebst Angabe ihrer ungefähren Helligkeit, Breite, Farbe und ihrer Schärfe) notieren. Bequemer ist die Anwendung der nach Bunsen-Kirchhoff's Skale veröffentlichten Abbildungen oder der auf dieselbe Skale bezogenen Tab. 22, auf welche man den Apparat folgendermaßen reduziert.

Man beobachtet auf der Skale einige bekannte Linien an den Enden und in der Mitte des Spektrums (Sonne a, D, F, G, H; oder Kα, Liα, Na, He, Srδ, Kβ; Fig. S. 277), trägt auf kariertes Papier die beobachteten Skalenteile als Abszissen, die entsprechenden der B.-K.'schen Skale als Ordinaten auf und verbindet die entstandenen Punkte durch eine Kurve. Selten wird diese erheblich von einer Geraden abweichen. Aus der Zeichnung findet sich dann zu einem beliebigen beobachteten Skalenteil der entsprechende der B.-K.'schen Skale als Ordinate. — Wenn die Skale des Apparates der B.-K.'schen nahe kommt, was oft der Fall ist, so stellt man Na auf den Strich 50 ein und macht ebenfalls einen Satz von vergleichenden Beobachtungen. Dann zeichnet man eine Kurve für die Korrektionen, indem man die Unterschiede gegen die B.-K.'sche Skale als Ordinaten zu der Skale selbst als Abszisse graphisch aufträgt.

Mit Hilfe von Tab. 23 läßt sich dann auch eine Kurve zeichnen, welche die Skalenteile auf Wellenlängen reduziert.

Die Dämpfe erzeugt man mit einer Salzperle am Platindraht im Bunsenbrenner; die Öse des Drahtes soll geschlossen sein. Das Anschmelzen von Perlen ist meist leichter, wenn man das Erhitzen des Drahtes von hinten vorschreiten läßt. — Perlen aus seltenen Substanzen kann man durch elektrisches Glühen anschmelzen.

Man reinigt den Draht am wirksamsten durch wiederholtes Eintauchen in Salzsäure und reines Wasser und Ausglühen in der Spitze der Bunsenflamme oder vor dem Lötrohr oder in der Gebläseflamme.

Vgl. auch Spektrallampen, **59**, S. 266.

Präparate. Reines Lithiumpräparat erhält man aus Li_2CO_3, welches man wegen seiner geringen Löslichkeit mit Wasser ausschütteln kann. KNO_3 ist sehr rein im Handel. Li_2SO_4 und K_2SO_4, rein käuflich oder durch Umkristallisieren unschwer zu reinigen, geben andauerndere Flammen als die Chloride oder Nitrate. Strontium- oder Bariumsalze reinigt meist das Glühen selbst. — NaCl und KCl werden, um das Zerknistern zu vermeiden, vor dem Spektralgebrauch erhitzt. Angenehmer als das leicht verknisternde oder rasch verdampfende Kochsalz ist geglühte Soda.

III. Chemische Analyse.

Die Körper werden aus dem Zusammenfallen ihrer Spektrallinien mit den Linien bekannter Stoffe erkannt (vgl. II). Dabei notiert man nicht nur die Lage, sondern auch die ungefähre Stärke, Breite und Schärfe der beobachteten Linien. Z. B. fallen Srβ und Liα nahe zusammen; Srβ aber ist verwaschen, Liα ganz scharf. Graphisch kann man die Streifen übersichtlich darstellen, indem man überall die Lichtstärke an irgend einem Punkt der Skale als Ordinate über diesem Punkte auffaßt und so die Kurven für die Spektra zeichnet.

Bezüglich der Unterscheidung der alkalischen Erden beachte man vorzugsweise die (lichtschwachen) charakteristischen blauen Linien von Strontium und Calcium.

Immer wird die Perle in den Saum der Flamme gebracht, der glühende feste Teil so tief, daß er kein störendes kontinuierliches Spektrum gibt. Es ist anzuraten, daß man einmal mit engem Spalte beobachte, um dicht neben einander liegende Linien zu unterscheiden, und dann mit weiterem Spalte zur Auffindung lichtschwacher Linien; desgleichen einmal mit kleiner Gasflamme für die leicht flüchtigen Stoffe (K, Li), das andere Mal mit großer Flamme für schwer flüchtige (Sr, Ba, Ca). Die Spektra der letzteren treten oft erst nach längerer Zeit deutlich hervor. — Das Schwächerwerden eines Spektrums bei längerer Dauer des Versuchs hat häufig seinen Grund darin, daß flüchtigere Verbindungen durch das Glühen in die schwerer flüchtigen Oxyde verwandelt werden. Dann läßt sich die Lichtstärke momentan steigern durch Anfeuchten der Perle am Platindraht mit reiner Salzsäure. Verbindungen wie etwa die Sulfate der alkalischen Erden, die, an sich kaum flüchtig, durch Salzsäure nicht verwandelt werden, glüht man vor dem

Befeuchten mit Salzsäure in dem unteren, reduzierenden Teil der Flamme.

Über Salzperlen, Reinigen der Drähte, reine Salze vgl. II, vor. S.

Falsches Licht blendet man ab: durch einen schwarzen Schirm hinter der Gasflamme, durch eine Kapsel über dem Prisma, welche den Weg nach den drei Rohren frei läßt, endlich durch eine auf das Fernrohr gehängte Blende aus dunklem Papier, die zugleich das Schließen des anderen Auges erspart. Die Skale selbst wird nicht stärker beleuchtet, als zum Erkennen notwendig ist! Im Interesse sehr lichtschwacher Linien mag man die Skale vorübergehend abblenden.

Die Bunsen'sche Gasflamme selbst gibt eine Anzahl schwacher, besonders grüner und blauer Banden. Um Irrtümer zu vermeiden, mag man sie vorher beobachten und die stärksten notieren. Den unteren Teil der Flamme, wo sie besonders stark auftreten, benutze man überhaupt nicht zur Beobachtung. Die Natriumlinie sieht man in den meisten Präparaten. Auch die Luft enthält meist so viel Natrium, daß die Reaktion schon in der freien Flamme hervortritt; durch Wattefilter vor dem Brenner läßt sich dies vermindern. Vgl. z. B. Beckmann, ZS f. phys. Ch. 40. 465. 1902.

Über Spektrallampen, Geifsler'sche Röhren, Induktionsfunken s. S. 266. Induktionsfunken zwischen einer Platinspitze und einer Salzlösung geben das Funkenspektrum des Salzes; dasselbe pflegt eine größere Linienzahl zu zeigen als das Flammenspektrum; „Fulgurator". — Über solche Spektra in Geifsler'schen Röhren s. auch Goldstein, Ann. d. Ph. 27, 773. 1908.

Ultraviolettes Spektrum. Über die Durchlässigkeit der Mittel vgl. S. 267. Siehe auch Reflexionsgitter. Man untersucht mit dem fluoreszierenden Okular (S. 277) oder durch Projektion auf einen fluoreszierenden Schirm oder durch Photographie; auch mit der Thermosäule (s. Pflüger, Ann. d. Ph. 13, 890, 1904. Vgl. auch Kreusler, lichtelektr. Photometer, ib. 6, 398. 1901).

Ultrarotes Spektrum. Die Beobachtung geschieht 1. durch Wärmewirkung, vgl. **72a**; 2. durch Photographie mittels Leuchtfarbe (Draper, Lommel). Eine mit Balmain'scher Leuchtfarbe bestrichene und zu schwachem Leuchten gebrachte ebene Platte wird der Strahlung ausgesetzt; langwellige Strahlen, bis zu F etwa, löschen das Leuchten mehr oder weniger aus. Man legt die exponierte Platte nachher gut schließend auf eine lichtempfindliche Platte.

Vgl. Lommel, Wied. Ann. 40, 681 u. 687. 1890.

Absorptionsspektra; Kolorimetrie. Körperfarben im durchgefallenen oder auffallenden Licht beruhen auf auswählender Absorption. Man beschreibt die Färbung dadurch, daß man die absorbierten Farben

auf eine Spektralskale bezieht. Quantitative Definitionen verlangen Photometrieren (72 VI). — Die Absorption an farbigen Oberflächen beobachtet man am bequemsten in einem objektiven Spektrum (S. 267).

Über Spektra von Fluoreszenzlicht vgl. z. B. Stark u. Steubing, Phys. ZS 9, 661. 1908.

Vergleichung zweier Spektra. Mit einem Reflexionsprisma, welches den halben Spalt bedeckt, kann man zwei Spektra über einander entwerfen. Die eine Lichtquelle wird in der Richtung des Spaltrohres aufgestellt, so daß ihr Licht die unbedeckte Hälfte durchsetzt, die andere stellt man schräg so, daß ihr Licht vom Prisma in den Spalt reflektiert wird. Dies läßt sich z. B. in der Farbentechnik zur Vergleichung von Farbstoffen benutzen.

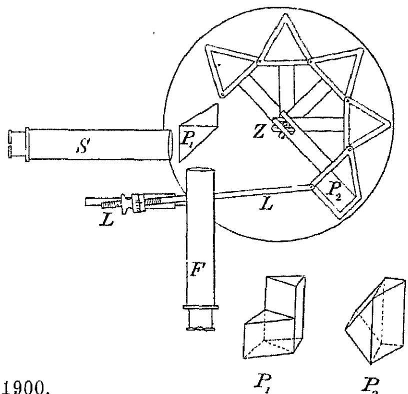
Statt dessen kann man die Spektra auch abwechselnd erzeugen und die gegenseitige Lage von Linien mit einem Fadenmikrometer im Okular bestimmen. Sonnen- und Eisenspektrum, letzteres gewöhnlich als Funkenspektrum (S. 266), sind als Normale geeignet.

Genau untersucht von Kayser u. Runge, Abh. d. Berl. Akad. 1890; besonders von Rowland, Astronomy and Astrophysics 12, 231. 1893; Mem. Amer. Acad. XII, 101. 1896.

Mehrere Prismen (Kirchhoff, Angström, Rutherford). Man dreht die Prismen, mit dem ersten anfangend, jedes in die Stellung der Minimalablenkung (S. 273) und achtet darauf, daß kein Licht vorbei geht. Um das Spektrum, von dem nur ein Teil gleichzeitig im Fernrohr erscheint, ganz zu beobachten, ist erstens das Fernrohr zu drehen. Bei starker Dispersion muß aber auch die Stellung der Prismen zum Spaltrohr und zu einander der Brechbarkeit des Spektralteiles angepaßt werden.

Autokollimation. Darunter versteht man einen Mechanismus, der die Prismengruppe als ganzes für einen Strahl von beliebiger Brechbarkeit der Minimalablenkung anzupassen gestattet. Die Anordnung der Figur (f. S. Littrow; Browning; Krüfs), in welcher der Strahl vom Spaltrohr S die Prismen hin und zurück durchläuft und so ihre Dispersion doppelt ausnutzt, gestattet zugleich, das Fernrohr (F) fest stehen zu lassen. Das erste sowohl wie das letzte Prisma hat nur 30° und je eine der brechenden Flächen wird vom Mittelstrahl senkrecht getroffen. Das Spaltrohr S blickt in die untere Hälfte, das Fernrohr F in die obere Hälfte der Prismen. Das total reflektierende Prisma P_1 bedeckt die untere Hälfte des ersten 30°-Prismas. Das unten durch die Prismen gegangene Licht wird an den geneigten Flächen des an das letzte Prisma angekitteten Prismas P_2 total

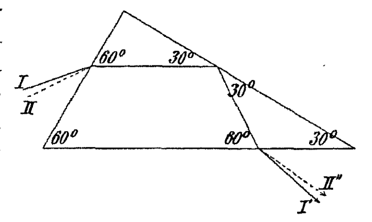
reflektiert und passiert die Prismen rückwärts zum Fernrohr. Dieses steht fest; der durch Gelenke zusammengehaltene Prismenkreis wird mittels der Stange L und der Führung seiner Radien um den Zapfen Z auf die Krümmung gebracht, die der jeweiligen Brechbarkeit des Lichtes angemessen ist. Zu Messungen kann der Faden im Fernrohr in Verbindung mit der Trommelteilung dienen.



Andere Anordnungen siehe Kayser, Handb. d. Spektr. I, 500 ff. 1900.

Prismen mit „fester Ablenkung". Ein Strahl, welcher, mit Hilfe einer inneren Reflexion (Fig.), so durch ein Prisma geht, daß er beim Ein- und Austritt gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Winkel mit den brechenden Flächen bildet, erfährt, von seiner Brechbarkeit unabhängig, als Gesamtablenkung nur die bei der Reflexion im Prisma erlittene.

Beispiel: Jedes rechtw. Prisma von 60° und 30° Seitenwinkel (Abbe) lenkt, wie aus der Figur ohne weiteres folgt, jeden im Prisma der Hypotenuse parallel verlaufenden Strahl, sowohl den Strahl I, wie einen brechbareren II, um 60° ab. I möge nun die durch das Kollimatorrohr gegebene feste Richtung eintretenden Lichts bezeichnen, I′ die, um 60° gegen I gedrehte Visierrichtung eines fest aufgestellten Fernrohrs; im Fadenkreuz erscheint Licht vom B.-V. n_I und daneben die Nachbarteile des Spektrums. Drehung des Prismas um den Winkel δ bringt Licht vom B.-V. n_{II} ins Fadenkreuz. Die Dispersion ist dieselbe wie bei einem 60°-Prisma in Minimumstellung.



Vgl. Löwe, ZS f. Instr. 1907, 271; auch über ein Quarzprisma für ultraviolettes Licht. — Ferner u. A. Wadsworth, Phil. Mag. (5) 38, 338. 1894; Twyman ib. (6) 13, 481. 1907. — Prismen mit 90° Ablenkung von Pellin u. Broca, J. de phys. (3) 8, 314. 1899; ZS f. Instr. 1900, 123.

Stufen- und Plattenspektroskope s. S. 268 und **65** IV.

Beugungsgitter. Ein durchsichtiges Gitter (**65**) stellt man zwischen Spaltrohr und Fernrohr. — Auch Reflexionsgitter lassen sich auf dem Tisch des Spektrometers gebrauchen. Ein Hohlgitter verlangt nur einen geänderten Auszug des Spalt- oder Fernrohrs. — Ein von der Hohlfläche selbst entworfenes objektives Spektrum (S. 267) wird mit der Lupe beobachtet oder photographiert.

Photographie des Spektrums. Über empfindliche Platten für die verschiedenen Farben vgl. Vogel, die Photogr. farbiger Gegenstände, Berlin 1888. — Über Photographieren mit dem Rowland'schen Gitter s. Kayser, Spektralanalyse in Winkelmann's Handbuch und Handbuch der Spektroskopie I, S. 603. — Ein Steinheil'sches Spektroskop zum Photographieren s. bei H. Lehmann, ZS f. Instr. 1902, 261.

Aufnahmen im äußersten Ultraviolett verlangen luftfreie Spektralapparate und Platten ohne Gelatine; Schumann, Wien. Ber. 102, 415 u. 625. 1893; Beibl. 1894, 187. — Über Aufnahmen im Ultrarot vgl. auch S. 297.

65. Wellenlänge eines Lichtstrahles.

λ sei die Wellenlänge eines (homogenen) Lichtes, welches z Schwingungen/sec hat, in einem Mittel von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit u, dann gilt $u = \lambda z$ oder $\lambda = u/z$. Die Wellenlänge derselben Lichtschwingung in verschiedenen Mitteln steht hiernach mit der Fortpfl.-Geschw. im direkten, also mit dem Brechungsindex des Mittels im umgekehrten Verhältnis.

Wellenlänge schlechthin nennt man diejenige im Weltraum (Äther) oder nahe auch in Luft. Da die Fortpfl.-Geschw. hier 300000 km/sec $= 300 \cdot 10^9$ mm/sec beträgt, so gilt für eine in mm gemessene Wellenlänge $\lambda = 300 \cdot 10^9/z$ oder $z = 300 \cdot 10^9/\lambda$, wonach Schw.-Zahl und Wellenlänge aus einander berechnet werden können.

Dem Auge sichtbare Wellenlängen liegen zwischen 0,00075 und 0,00040 mm, ihre, fast eine „Oktave" umfassenden Schwingungszahlen/sec somit zwischen $400 \cdot 10^{12}$ und $750 \cdot 10^{12}$. (Für das Gedächtnis eignen sich also die Zahlen 40 und 75.)

Lichtwellen werden häufig in Mikron „μ" $= 10^{-3}$mm, oder in „$\mu\mu$" $= 10^{-6}$mm oder auch wohl in „Ångström-Einheiten" $= 10^{-7}$mm angegeben.

Wellenlängen in Luft von 20° und 760mm s. in Tab. 23.

Umrechnung einer Wellenlänge aus einem Gase in das Vakuum.

Für ein bestimmtes Gas ist merklich $(n-1)/s =$ Const., wenn s die Dichtigkeit bedeutet. (Die Temp. an sich beeinflußt also n oder λ nicht.) Gilt somit n_0 für 0° und 760 mm (Tab. 12a), n für t^0 und p mm, so findet man n aus

$$\frac{n-1}{n_0-1} = \frac{p}{760} \frac{1}{1+0{,}00367\,t}.$$

Wenn nun λ für t^0 und p mm gilt, so berechnet man $\lambda_{\text{Vak}} = n\lambda$.

Eine in gewöhnlicher Luft gemessene Wellenlänge wird durch Multiplikation mit nahe 1,00027 auf das Vakuum reduziert; vgl. auch Tab. 23.

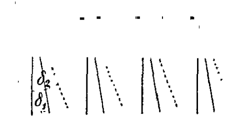
I. Beugungsgitter (Fraunhofer).

Durch die Öffnungen eines engen Gitters geht Licht erstens geradlinig hindurch, zweitens entstehen auf beiden Seiten von der Mittelrichtung Helligkeitsmaxima „erster, zweiter usw. Ordnung", die bei einer sehr großen Anzahl äquidistanter gleicher Gitteröffnungen für homogenes Licht scharf begrenzt sind. Fällt das Licht senkrecht auf ein solches Gitter, so bilden die Richtungen dieser Maxima mit der Mittelrichtung Winkel $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \ldots,$

welche, wenn l den Abstand benachbarter Öffnungen und λ die Wellenlänge bedeutet, durch die Beziehungen gegeben sind

$$\sin\delta_1 = \frac{\lambda}{l}, \quad \sin\delta_2 = \frac{2\lambda}{l}, \quad \sin\delta_3 = \frac{3\lambda}{l} \text{ usw.}$$

Denn in jeder von diesen Richtungen unterscheiden sich die Weglängen von den einzelnen Gitteröffnungen an von einander um 1, 2 ... ganze Vielfache einer Wellenlänge; vgl. schematische Fig. zu δ_1 und δ_2. Die Lichtschwingungen, welche von den verschiedenen Öffnungen ausgehend einen entfernten Schirm (oder ein auf Parallelstrahlen eingestelltes Fernrohr) treffen, sind also in gleichem Schwingungszustande und summieren sich. Jede andere Richtung enthält gebeugte Wellen in unregelmäßigen Abständen von den Öffnungen und deswegen in den verschiedensten Schwingungszuständen, die sich, wenn die Anzahl der Öffnungen hinreichend groß ist, bei der Vereinigung gegenseitig vernichten. — Zusammengesetztes Licht erzeugt also nach beiden Seiten des Gitters reine Spektra.



Die Gitterplatte kommt auf den Tisch des Spektrometers (**60**), die Platte senkrecht zum Spaltrohr, die geteilte Fläche dem Fernrohr zugewandt, die Teilstriche der Drehaxe parallel. Letzteres wird daran erkannt, daß die Spaltbilder oder Spektra bei dem Anvisieren mit dem nach beiden Seiten gedrehten Fernrohr in konstanter Höhe erscheinen, was mittels einer Marke auf dem Spalt leicht kontroliert wird. Fernrohr und Spaltrohr sind zuvor auf unendlich eingestellt (**60**, 2).

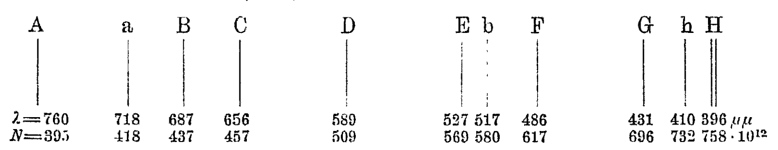
Homogenes Licht. Außer dem mittleren hellen Bild des Spaltes erscheint ein erstes, zweites usw. abgelenktes Bild auf jeder Seite. Bedeuten $\delta_1 \delta_2 \delta_3 \ldots$ die Ablenkungswinkel der Bilder gegen das mittelste Bild, so ist die Wellenlänge der Lichtsorte

$$\lambda = l\sin\delta_1 = \tfrac{1}{2} l \sin\delta_2 = \tfrac{1}{3} l \sin\delta_3 \text{ usw.} \qquad 1.$$

Die genau senkrechte Stellung der Gitterplatte ist dadurch charakterisiert, daß zusammengehörige Seitenbilder bei dieser Stellung ein Minimum des Abstandes haben. — Genauer visiert man den Spalt mit dem Fernrohr an, fixiert dieses, bedeckt den Kollimator mit dunkelem Papier und stellt das Gitter mittels Spiegelung senkrecht. Vgl. beleuchtetes Fadenkreuz **60**, 4.

Beugungsspektrum. Nicht homogenes Licht wird durch das Gitter in Spektra zerlegt, in denen nach obigen Formeln das Licht von größerer Wellenlänge (rot) am stärksten abgelenkt erscheint. Bei Sonnenlicht, in welchem zur Definition und

Einstellung der Farbe die Fraunhofer'schen Linien geeignet sind, ist das erste Spektrum und der größte Teil des zweiten rein; von da an greifen die Spektra übereinander. Im Beugungs- oder „Normalspektrum“ (Fig.) ist das Licht nach den Wellenlängen λ



verteilt, also anders als im Dispersionsspektrum (S. 277), in welchem der brechbarere Teil relativ breiter erscheint. N ist Schwingungszahl/sec.

Über sehr hohe Ansprüche an Beugungsgitter vgl. **114** IX.

II. Zurückführung einer Wellenlänge auf eine andere mittels Koinzidenz. Gitterspektra verschiedener Ordnung.

Sind in den Spektren $m$ter bez. $n$ter Ordnung die Wellenlängen λ_m bez. λ_n gleich abgelenkt, so ist nach den Gleichungen 1. $m\lambda_m = n\lambda_n$ also $\lambda_m : \lambda_n = n : m$.

Die Ordnungszahlen m und n sind ganze Zahlen. Ihr Verhältnis läßt sich ev. aus der genäherten Kenntnis von λ_m und λ_n ableiten.

So kann man durch verschiedene Kombinationen die Wellenlängen, auch im Ultraviolett und Ultrarot (S. 297), auf wenige genau gemessene (Tab. 23) zurückführen. Kleine Unterschiede in den Ablenkungen werden mikrometrisch subjektiv oder in photographischen Aufnahmen gemessen.

Langley, Wied. Ann. 22, 598. 1884.

Sehr hohe Ordnungszahlen werden im allgemeinen nicht durch Abzählen, sondern durch die Hinzunahme einer dritten Lichtsorte von nahe bekannter Wellenlänge ermittelt.

III. Durch Talbot'sche Streifen im Spektrum.

Die Pupille wird vor einem Spektralapparat von der Seite des Violett her zur Hälfte mit einem dünnen durchsichtigen, etwa 0,2 mm dicken Blättchen von bekannter Lichtbrechung bedeckt. Dadurch entstehen Streifen, deren größte Dunkelheit an den Orten liegt, wo der Gangunterschied der durch die Luft und das Blättchen gegangenen Wellen ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}\lambda$ beträgt.

Das Brechungsverh. der Platte für einen Strahl von der Wellenlänge λ in Luft sei $= n$, ihre Dicke $= d$. Dann ist die

Wellenlänge in der Platte $=\lambda/n$ und der obige Gangunterschied $=(n-1)d/\lambda$. Für eine kleinere Wellenlänge λ' gelte n', also der Gangunterschied $(n'-1)d/\lambda'$. Die Anzahl p der Streifenbreiten zwischen den beiden Farben ist gleich der Differenz der beiderseitigen Gangunterschiede, mithin gilt

$$\frac{p}{d}=\frac{n'-1}{\lambda'}-\frac{n-1}{\lambda}.$$

Kennt man nun außer d, n und n' die eine der Wellenlängen (Fraunhofer'sche Linie), so folgt die andere hieraus; vgl. Tab. 23.

S. auch Macé de Lépinay, Ann. chim. phys. (6) 10, 68. 1887.

Umgekehrt läßt sich, wenn λ, n, λ' und n' bekannt sind (Tab. 23 u. 24), die Dicke d ermitteln. — Über die Messung von Wellenlängen im Ultrarot oder Ultraviolett siehe Esselbach, Pogg. Ann. 98, 513. 1856, nach Helmholtz.

IV. Interferometer von A. Michelson, 1890.

Haidinger'sche Interferenzringe geneigten Lichtes zwischen parallelen Ebenen. Gegeben seien zwei parallele Ebenen P und P_1. Auf P falle homogenes Licht, werde zum Teil reflektiert und zum Teil durchgelassen. Letzterer Teil werde an P_1 reflektiert und interferiere nach seinem Wieder-Durchgang durch P mit dem an P direkt reflektierten Teile. Die Durchlässigkeit sei (ev. durch Versilbern usw.) so reguliert, daß beide Teile schließlich eine nahe gleiche Intensität haben, so daß entgegengesetzte zusammentreffende Schwingungszustände sich aufheben. Je nach dem Gangunterschiede tritt dann Verdunkelung oder Erhellung ein; der Gangunterschied aber ist durch die Neigung des Strahles gegen die Schicht bestimmt. Ein auf unendlich akkommodiertes Auge oder Fernrohr, bei dem also parallele Strahlen zur Interferenz kommen, beobachtet dann Kreisfransen (Kurven „gleicher Neigung"), die um die senkrechte Durchsichtsrichtung zentriert verlaufen.

Nähert man die Flächen einander langsam, so wandert das Kreissystem nach seinem Mittelpunkt, wo die Ringe verschwinden und wo jedesmal ein früherer Interferenzzustand sich wiederholt, wenn der Gangunterschied um eine, der Plattenabstand also um eine halbe Wellenlänge geändert worden ist. Man ermittele die Anzahl dieser Perioden, bis die Flächen in Berührung sind; die Hälfte der Zahl drückt den ursprünglichen Abstand in Wellenlängen aus.

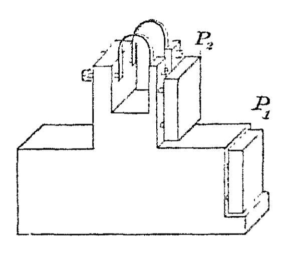
Vgl. Mascart, Ann. chim. phys. 23, 116. 1871; Lummer, Wied. Ann. 23, 49. 1884. S. auch **66** V.

Erkannt wird die Berührung daran, daß die Interferenz weißen Lichtes, welche bei kleinem Abstande sichtbar wird, den farblosen Zustand zeigt, der eben der Berührung entspricht (der z. B., wenn P und P_1 Hinter- und Vorderflächen von Glasplatten sind, dunkel, bei reflektierenden Silberschichten hell ist).

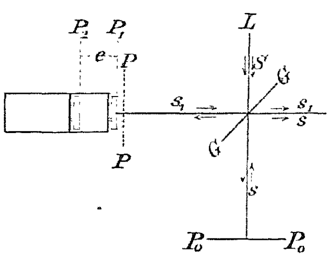
Wir gehen hier nicht darauf ein, daß in Wirklichkeit dieser Zustand

selbst nicht mehr scharf zu beobachten ist und daß deswegen die Anordnung bei Michelson vermöge einer schwachen Neigung ein wenig verändert ist. Hierdurch treten nämlich in kleinem Abstande der Flächen wandernde Fizeau-Newton'sche Streifen auf, deren farblose Mittelfranse zur Beobachtung benutzt wird.

Bei Michelson ist die in Wellenlängen auszumessende Länge der senkrechte Abstand e der beiden ebenen Oberflächen P_1 und P_2, die durch die versilberten Vorderflächen zweier Glasplatten gebildet werden, welche an einem Bronze-Barren justierbar befestigt und parallel gemacht worden sind. Zu der letzten feinen Justierung dient der schwache regulierbare Druck der Federn auf die Stützen der Platten. — Diese neben einander liegenden Ebenen lassen sich nicht direkt auf einander beziehen; sie werden deswegen einzeln auf eine konstant liegende Vergleichsebene P bezogen, die aber nicht wirklich, sondern als das Bild einer wirklichen (spiegelnden) Ebene P_0 in dem unter 45° geneigten Spiegel G vorhanden ist; s. folg. Fig.



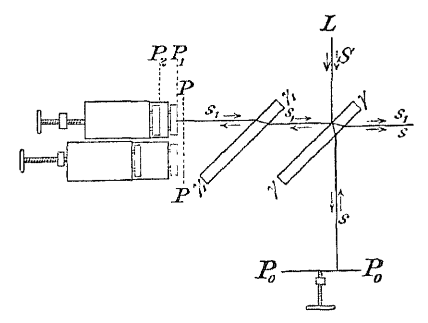
Stellen wir uns G zunächst als einen unendlich dünnen, teilweise reflektierenden und teilweise durchlassenden Spiegel vor, so ist das Schema der Anordnung im Grundriß durch die Figur gegeben. Ein von der Lichtquelle L kommender Strahl S zerlegt sich an G. Der durchgehende Teil s wird an P_0 in sich zurückgeworfen und hat nach seiner Reflexion an G dieselben Eigenschaften, wie wenn er von dem Spiegelbilde P der Fläche P_0 in G zurückgeworfen wäre.



Der an G reflektierte Teil s_1 von S treffe auf P_1; er wird daselbst reflektiert und interferiert nach seinem Durchtritt durch G mit s. Der Gangunterschied von s und s_1 entspricht dem Doppelten des Abstandes zwischen den Ebenen P und P_1. Werden nun andere Strahlenrichtungen hinzugenommen, so entsprechen die Interferenzen zwischen s und s_1 genau dem oben unterstellten Falle, und die Kreisfransen werden, wenn der Barren jetzt allmählich vorgeschoben wird, ihre Wanderung ausführen und schließlich zeigen, daß P_1 genau in P hineinfällt.

Nachdem dies erreicht ist, beobachtet man an P_2, schiebt das Ganze vor und zählt die Perioden, bis P_2 in P fällt. Die halbe Anzahl mißt den Abstand $P_1 P_2$ in Wellenlängen.

An die Stelle des oben angenommenen unmeßbar dünnen Spiegels G tritt wirklich eine vorn schwach versilberte Glasplatte γ. Die Symmetrie des Strahlenganges von s und s_1 wird wiederhergestellt durch Einschalten einer unversilberten gleichen



Platte γ_1 in s_1. Benutzt werden die gezeichneten Strahlen, von denen ein jeder die Glasdicke dreimal durchsetzt hat. Andere Reflexionen usw. werden abgeblendet. γ_1 erleichtert durch seine Drehbarkeit zugleich das Herstellen der Ausgangs-Koinzidenz von P_1 mit P (vgl. vor. S.).

Zu scharfer Interferenz sind die rote, grüne oder blaue Cd-Linie sogar bei Gangunterschieden von ca. 500000 Wellenlängen (über 1 dm) noch fähig. Auszählen einer solchen Größe ist freilich nicht mehr möglich. Direkt gezählt wurden deswegen von Michelson nur die 1200 bis 1600 Wellen eines Etalons von 2^{-8} dm $= 0{,}390625$ mm. Auf diesen wurden acht ebenso angeordnete Stücke von 2^{-7}, 2^{-6} ... bis 1 dm ohne Zählen zurückgeführt. Kombinierte Beobachtungen mit den drei Cd-Farben lassen nämlich die von vorn herein nahe bekannten ganzen Anzahlen der Wellen sicher ableiten; die Bruchteile werden durch Beobachtung ermittelt. Das ganze Dezimeter wird schließlich komparatorisch auf das Originalmeter zurückgeführt.

Michelson, Trav. et Mém. du Bur. Internat. XI. 1895; vgl. über den Apparat z. B. auch Janicki, Ann. d. Ph. 19, 38. 1906.

Michelson fand in Luft von 15° und 760 mm, $\lambda_r = 0{,}6438472$, $\lambda_{gr} = 0{,}5085824$, $\lambda_{bl} = 0{,}4799911 \cdot 10^{-3}$ mm.

Benoît, Fabry u. Perot finden in trockner Luft $\lambda_r = 0{,}6438470 \cdot 10^{-3}$ mm und korrigieren M.'s Zahl wegen Luftfeuchte auf merklich denselben Wert. C. R. 144, 1082. 1907; ZS f. Instr. 1908, 307. — Vgl. auch ihre Anwendung einer dünnen keilförmigen Luftplatte, um das Verhältnis zweier Etalons auf eine ganze Zahl abzugleichen. C. R. 138, 676. 1904.

Interferometer von Fabry und Perot. Zur Interferenz kommen Strahlen, die in einer planparallelen Luftschicht zwischen durchlässig versilberten Oberflächen zweier Glasplatten mehrfach reflektiert worden sind (S. 303); durch das Zusammenwirken der vielfachen Reflexionen treten hier die Haidinger'schen Ringe als scharfe Linien auf. Man führt gleichzeitig Licht von einer bekannten und der zu bestimmenden Wellenlänge ein und beobachtet die Koinzidenzen von Linien bekannter (durch die Hinzunahme einer weiteren nahe gegebenen Wellenlänge ermittelter) Ordnungszahlen. Hieraus ergibt sich (nach II) das Verhältnis beider Wellenlängen, und zwar, da die Ordnungszahlen sehr hohe sind, mit großer Genauigkeit.

Die Koinzidenz wurde entweder durch Dickenänderung der Luftschicht mittels einer exakten Parallelverstellung von einer der Platten bewirkt oder in einer Schicht von konstanter Dicke an den Haidinger'schen Streifen gleicher Neigung beobachtet.

Fabry u. Perot, u. a. Ann. chim. phys. (7) 22, 564. 1901; 25, 98. 1902; ein Verzeichnis weiterer Veröffentlichungen bei Janicki, l. c. — Daselbst auch die Lit. (besonders Michelson, F. u. P., Lummer u. Gehrcke) über die, für die Interferenzfähigkeit wichtige Zusammensetzung von Spektrallinien der Metalle („Trabanten"). — Über Änderungen des Verfahrens auch Rayleigh, Phil. Mag. (6) 11, 685. 1906; 15, 548. 1908.

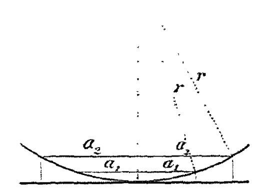
Über ein Verfahren mittels Haidinger'scher Ringe und Talbot'scher Streifen siehe Macé de Lépinay u. Buisson, Ann. ch. phys. (8) 2, 78. 1904; ZS f. Instr. 1905, 87, auch 1903, 378.

V. Newton'sche Ringe (1676).

Wird Licht an zwei hinter einander liegenden Flächen reflektiert, so verstärken oder schwächen sich die beiden Wellenzüge je nach ihrem Gangunterschiede; nach einer Zunahme des Gangunterschiedes um λ, also des Abstandes der Flächen um $\frac{1}{2}\lambda$, wiederholt sich je derselbe Zustand. Hieraus leitet sich die folgende Regel ab.

Eine auf einer Planplatte liegende Kugelfläche von großem Krümmungsradius r (66) werde mit homogenem Licht beleuchtet. Zwei nach ihrer Ordnungszahl um k unterschiedene Ringe mögen bei senkrechter Ansicht die Halbmesser a_1 und a_2 zeigen. Dann hat das Licht in dem Mittel zwischen den reflektierenden Flächen die Wellenlänge

$$\lambda = (a_2^2 - a_1^2)/(kr).$$

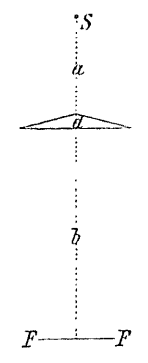


Beweis. Zu einem Ringe vom Halbmesser a gehört (Fig.) eine Höhe unter dem Kugelmittelpunkt $= \sqrt{r^2 - a^2}$ oder, wenn a/r sehr klein ist (Formel 3, S. 9) $= r - \frac{1}{2}a^2/r$. Der Höhenunterschied beträgt demnach in unserem Falle $\frac{1}{2}(a_2^2 - a_1^2)/r$; dies ist gleich $\frac{1}{2}k\lambda$.

Die Formel läßt sich auch benutzen 1) um einen unbekannten Halbmesser r mit Natriumlicht ($\lambda = 0{,}0005893$ mm) zu ermitteln; 2) um die Wellenlänge λ in einem beliebigen, zwischen die Gläser gebrachten Mittel zu bestimmen und daraus (λ_0 = Wellenlänge in Luft) sein B.-V. $n = \lambda_0/\lambda$ abzuleiten; n muß sich, damit Reflexionen entstehen, vom B.-V. der Gläser unterscheiden.

VI. Biprisma von Fresnel, 1826. S bezeichnet einen, der stumpfen Kante des Prismas parallelen, lichtgebenden Spalt, F die Ebene, in welcher die Streifenbreite l der Interferenzfransen beobachtet wird, z. B. den Ort einer durchsichtigen Mikrometerteilung vor einer Lupe. n sei das Br.-V.

des Doppelprismas, d/n also seine „optische Dicke". Seine gleichen, sehr spitzen Winkel seien in absol. Maße (Anh. 3) gemessen $= \varepsilon$. Die Streifenbreite ist dann



$$l = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{n-1} \frac{a+b+d/n}{a} \frac{1}{\varepsilon},$$

also
$$\lambda = 2(n-1)\varepsilon \frac{a}{a+b+d/n} l.$$

Vgl. z. B. Feußner, Winkelm. Hdb. (2) VI, 924. 1906. Daselbst auch Fresnel's und Michelson's Spiegelmethoden. — Über die Verfeinerung der Methode mittels nicht so spitzwinkliger (leichter korrekt zu schleifender) Prismen, die in eine nur wenig anders brechende Flüssigkeit tauchen, s. Winkelmann, ZS f. Instr. 1902, 275.

VII. Durch Projektion auf die Skale eines Spektralapparates, die nach Wellenlängen ausgewertet ist (**64** II; Tab. 23) lassen sich unbekannte Wellenlängen in leicht ersichtlicher Weise so genau bestimmen, wie es die Ablesung am Instrument gestattet. Das Zeiß'sche Gitterspektroskop (s. Löwe, l. c. S. 293) läßt an der Einstellung seiner „Sinus"-Mikrometerschraube (vgl. Pulfrich, ZS f. Instr. 1907, 340) die Wellenlängen unmittelbar ablesen.

66. Messung eines Krümmungshalbmessers.

I. Mit dem Sphärometer.

Das Sphärometer (**21**, 7) wird zuerst auf einer als eben bekannten (vgl. V) Fläche und dann auf der zu messenden Fläche eingestellt; die Stellungen der mittelsten Spitze bei beiden Versuchen unterscheiden sich von einander um eine Höhe h. Nennt man l die Seite des gleichseitigen Dreiecks der drei festen Spitzen, so ist der Krümmungshalbmesser

$$r = \tfrac{1}{6} l^2/h + \tfrac{1}{2} h.$$

Denn wenn H die Höhe in dem von den Seiten l gebildeten Dreiecke, so folgt aus dem, von r als Hypotenuse, $(r-h)$ und $\frac{2}{3}H$ als Katheten gebildeten rechtwinkligen Dreiecke $r^2 = (r-h)^2 + (\frac{2}{3}H)^2$ oder $2rh = \frac{4}{9}H^2 + h^2$. Da ferner $H^2 = \frac{3}{4}l^2$, so kommt obiger Ausdruck.

Man mißt l am einfachsten durch Abdrücken der Sphärometerspitzen auf Papier. Unterscheiden die drei Seiten sich ein wenig, so darf man den Mittelwert einsetzen.

Neuere Sphärometer haben anstatt der Meßschraube einen Maßstab, an welchem die Verschiebungen der Spitze abgelesen werden; außerdem anstatt der drei Basisspitzen einen Kreis mit scharfer Kante vom Radius R. Dann ist $r = \frac{1}{2}(R^2/h + h)$.

Bamberg, ZS f. Instr. 1887, 297; Abbe, ib. 1892, 307.

Im Handel sind für optische Zwecke bequeme Sphärometer mit Zeigerübertragung, die, auf die Fläche aufgedrückt, r oder häufiger wohl $1/r$ ablesen lassen. Auf ihre Richtigkeit müssen sie geprüft werden. An einer beiderseitig gleich gekrümmten Linse (Brillenglas) aus gewöhnlichem Glase vom B.-V. 1,5 stellt $1/r$ die Stärke (reziproke Brennweite) in Dioptrien dar; vgl. 67 im Eingang.

II. Durch Spiegelung.

Eine spiegelnde Kugelfläche entwirft von einem leuchtenden Punkte ein Bild, entweder ein virtuelles aufrechtes (hinten), oder ein reelles verkehrtes (vorn), letzteres aber nur in dem Falle, daß der Punkt außerhalb der Brennweite eines konkaven Spiegels liegt. Die Brennweite ist $f = \frac{1}{2}r$. Bedeutet A den Abstand des leuchtenden Punktes vom Spiegel, so ist die Bildweite a gegeben durch die Beziehung $1/A + 1/a = 1/f$, also $= 2/r$; den Abstand eines virtuellen Bildes oder die Brennweite eines Konkavspiegels hat man hier negativ zu rechnen. Die Bildgröße λ verhält sich zur Gegenstandsgröße L $\lambda : L = a : A$. — Vgl. auch 67.

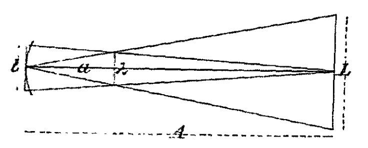
1. Mit Fernrohr und Maßstab (R. Kohlrausch 1840). Die Methode ist anwendbar auf spiegelnde, nicht zu schwach gekrümmte Flächen auch von geringer Größe, z. B. auf die Hornhaut des Auges. Zwei schmale Lichter vom gegenseitigen Abstande L seien in größerer Entfernung A vor dem Mittelpunkt der aufrecht stehenden Fläche angebracht und mitten zwischen ihnen das Objektiv eines Fernrohrs, welches auf die Fläche eingestellt wird. Dicht vor der Fläche, parallel mit der Verbindungslinie der Lichter wird ein kleiner, am besten auf Glas geteilter Maßstab befestigt. Die Lichter geben zwei in der Fläche reflektierte Bilder, deren Abstand l auf dem kleinen Maßstabe mit dem Fernrohr beobachtet wird. Dann gilt

bei einer konkaven $\qquad$ bei einer konvexen Fläche

$$r = \frac{2Al}{L + 2l}, \qquad r = \frac{2Al}{L - 2l}.$$

R. Kohlrausch, Okens Isis 1840, S. 886.

Beweis für eine konkave Fläche. L stellt hier die Gegenstandsgröße dar, die Bildgröße sei λ. Das objektive Bild liege um a vor der Kugelfläche, dann gilt $\lambda : L = a : A$. Aus $1/A + 1/a = 2/r$ (s. oben) ergibt sich nun $a = rA/(2A - r)$; setzt man dies ein, so kommt $\lambda = Lr/(2A - r)$. Das gemessene l ist aber die Projektion von λ auf den Maßstab, also $l = \lambda A/(A - a)$



oder, wenn a und λ durch die obigen Werte ersetzt werden, $l = \frac{1}{2}Lr/(A - r)$, woraus $r = 2Al/(L + 2l)$, q. e. d. — Bei einer Konvexfläche liegen Krüm-

mungsmittelpunkt und Bild hinten; im Beweise ändern sich nur einige Vorzeichen.

Je schwächer die Krümmung ist, desto weiter muß das Fernrohr abstehen, weil sonst die Flammenbilder nicht gleichzeitig mit dem Maßstab genügend deutlich erscheinen. Nützlich wirkt diesbezüglich eine Blende vor dem Objektiv.

Gibt man dem Fernrohrobjektiv eine Entfernung A', während diejenige der Lichter $= A$ bleibt, so ist in den Endformeln anstatt $2l$ im Nenner zu setzen $l \cdot (A + A')/A'$.

Vor einer konkaven Fläche kann man den Maßstab auch, anstatt dicht vor den Spiegel, an den Ort der Bilder bringen, d. h. dahin, wo er keine Parallaxe gegen die Bilder zeigt. Dann mißt man also λ selbst und hat, wenn das Objektiv zwischen den Lichtern liegt (vgl. den obigen Beweis), zu rechnen $r = 2A\lambda/(L \pm \lambda)$.

2. Mit dem Helmholtz'schen Ophthalmometer (**22a**). Dieses mißt ebenfalls λ selbst, und man hat $r = 2A\lambda/(L \pm \lambda)$.

3. Mit dem Theodoliten (**30a**); auch auf schwächer gekrümmte Flächen anwendbar. A' und A mögen bedeuten die Entfernungen der Drehaxe sowie des Mittelpunktes der beiden Lichter von der Fläche. φ sei der Gesichtswinkel zwischen den beiden Bildern. Dann gilt für konkav $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}\lambda/(A' - a)$. Drückt man hierin λ und a durch L, A und r aus (vgl. vor. S.), so findet man $r = \dfrac{4AA'}{L \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\varphi + 2(A + A')}$. Für konvex -2 statt $+2$.

Als Lichter sind Benzinflämmchen zweckmäßig. Auch die Ränder eines Fensters kann man gebrauchen.

An Linsen entstehen auch Bilder von der Hinterfläche. Bei Bikonkav- oder Bikonvexlinsen sieht man an der aufrechten oder verkehrten Lage der Bilder, welche die richtigen sind. Durch Schwärzen der Hinterfläche fallen die falschen Bilder fort.

III. Aus der Brennweite.

Mit geringen Abänderungen läßt sich nach **67**, 1, 3 oder 5 die Brennweite eines Konkav-, nach **67**, 11 die eines Konvexspiegels ermitteln, deren doppeltes den Krümmungshalbmesser ergibt.

IV. Schwach gekrümmte Flächen.

Ein Fernrohr wird so eingestellt, daß ein Gegenstand (etwa eine Teilung), der sich im Abstande A vor dem Objektiv befindet, deutlich erscheint. Mit dem so eingestellten Fernrohr werde in dem zu untersuchenden Spiegel ein Objekt deutlich gesehen, wenn sein Abstand vom Spiegel $= a$, derjenige des Objektivs vom Spiegel

$= e$ (etwa $= \frac{1}{2}A$) ist. Dann findet man den Krümmungshalbmesser

$$r = 2a \frac{A - e}{A - e - a}.$$

Positives r bedeutet Hohlspiegel, negatives r Konvexspiegel.

Zur Erkennung des Deutlichsehens dient die Abwesenheit der Parallaxe des Bildes gegen das Fadenkreuz des Fernrohrs.

Vgl. auch die Methode 65 V mit Newton'schen Ringen.

V. Prüfung von Planflächen.

a) Mit dem beleuchteten Fadenkreuz eines Fernrohrs; vgl. S. 272.

b) Man ziehe ein Fernrohr so aus, daß das Bild eines sehr entfernten Gegenstandes keine Parallaxe gegen das Fadenkreuz zeigt; man halte die Fläche nahe vor das Objektiv und betrachte in ihr das Spiegelbild eines ebenso entfernten Gegenstandes. Dieses darf dann ebenfalls keine Parallaxe zeigen. Ein im Akkomodieren auf große Entfernung geübtes Auge kann auch unbewaffnet in ähnlicher Weise ziemlich scharf prüfen.

c) Einen kleinen Planspiegel prüft man am einfachsten, indem man mit ihm ein Spiegelbild der Sonne auf eine ferne Wand wirft. Das Bild muß rund sein und den scheinbaren Durchmesser der Sonne zeigen. Die Prüfung ist sehr empfindlich. Gibt eine Platte zwei solche Kreisbilder, so sind die Oberflächen wohl eben, aber nicht parallel. Solche Platten sind als Deckgläser oder vorn versilberte Spiegel ohne weiteres verwendbar; hinten spiegelnde richte man für Skalenablesungen so, daß ihre Prismenkante senkrecht auf den Teilstrichen steht.

Prüfung durch Lichtinterferenz. *d*) Eine anderweitig als plan bekannte Fläche wird mit der zu prüfenden in Berührung gebracht. Die dann durch Beleuchtung mit Natriumlicht auftretenden Streifen müssen geradlinig und parallel verlaufen.

e) Prüfung einer planparallelen Platte in sich. Das empfindlichste Kennzeichen des Parallelismus liefern die, durch Reflexion homogenen Lichtes an der Vorder- und Hinterfläche auftretenden, Interferenzkurven (Newton'sche Streifen und Haidinger'sche Ringe; S. 306 u. 303).

An sehr gut planparallelen Platten treten auch bei großer Dicke, bei Akkommodation auf große Entfernung, vermöge der verschiedenen Neigung der die Platte durchsetzenden Strahlen, Ringe auf (Haidinger), die den Fußpunkt des vom Auge auf die Platte gefällten Lotes zum Mittelpunkt haben. Fehler der Platte machen sich durch Abweichung der Kurven von der Kreisform bemerklich oder auch dadurch, daß bei Parallelverschiebung der Platte im Zentrum des Systems ein Wechsel von hell und dunkel eintritt, so oft die Plattendicke sich um $\frac{1}{4}$ Wellenlänge des Lichtes in der Platte (d. h. um $\frac{1}{4}\,\lambda/n$) ändert. Vgl. **65** IV.

Siehe über die Theorie dieser Kurven und ihre Verwendung zum Prüfen Lummer, Wied. Ann. 23, 49. 1884; auch in Müller-Pouillet, Physik, 10. Aufl.

II 1, 751. 1907; W. Feußner in Winkelm. Hdb. (2) VI, 984. 1906; Festschrift d. Wetterau. Ges., S. 53. 1908. Über einen Abbe'schen Prüfungsapparat Czapski, ZS f. Instr. 1885, 149. Ferner über Messungen bis auf 10^{-6} mm Schönrock, ib. 1905, 148; 1906, 188; 1907, 191; 1908, 180.

67. Brennweite.

Brennpunkt F einer Linse (oder allgemein eines brechenden oder reflektierenden Systems von Flächen, durch welches „homozentrisches", d. h. von einem Punkte ausgegangenes Licht wieder in einen Punkt vereinigt wird) ist der Punkt, in welchem Strahlen, die zur Axe des Systems parallel einfallen, sich nach dem Durchgang (oder der Reflexion) schneiden.

Der Abstand eines Brennpunktes von der Linse, streng genommen von der zugehörigen Hauptebene der Linse (s. S. 314), ist ihre Brennweite. Diese ist, wenn, wie wir annehmen, die Strahlen in dasselbe Mittel austreten, aus dem sie eingefallen sind, auf beiden Seiten gleich groß. — Bei Zerstreuungslinsen gibt man der Br.-W. das negative Vorzeichen. — Nummer einer Brille nennt man ihre Br.-W., in der Regel in Pariser Zoll ausgedrückt. — Eine Linse hat zwei Brennpunkte, aber nur eine Brennweite.

Die Stärke einer Linse wird durch die reziproke Br.-W. bestimmt; von einer Linse oder einer Linsenkombination, welche die Br.-W. f Meter besitzt, sagt man, sie habe eine Stärke von $1/f$ Dioptrien. Die Stärke eines Systems von hinter einander gesetzten Linsen ist gleich der Summe (Vorzeichen!) der einzelnen Stärken, wenn die Dicke des Systems klein ist gegen die Brennweiten. — Zwei dicht hintereinander gesetzte Linsen von den Br.-W. f_1 und f_2 haben somit zusammen die Br.-W. $f_1 f_2/(f_1 + f_2)$.

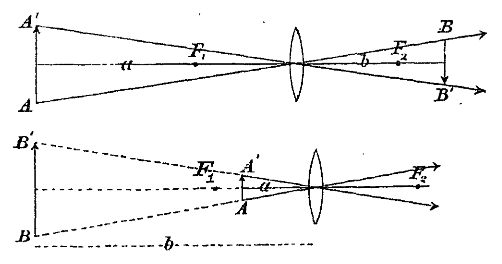
Aus den beiden Krümmungshalbmessern r und r' und dem Brechungsverhältnis n einer Linse erhält man ihre Br.-W. f oder ihre Stärke $1/f$

$$f = \frac{1}{n-1}\,\frac{rr'}{r+r'}\,; \qquad \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right).$$

Gewöhnliches Glas hat nahe $n = 1{,}5$, dann ist also nahe $\frac{1}{f} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)$, d. h. die reziproke Br.-W. ist gleich dem Mittel aus den reziproken Krümmungsradien; sind beide $= r$, so wird $f = r$.

Ist eine Linsenfläche konkav, so wird ihr Krümmungshalbmesser mit negativem Vorzeichen eingesetzt.

Von einem leuchtenden Gegenstande AA' entwirft die Linse ein Bild BB': die Sammellinse, wenn er außerhalb der Brennweite liegt (obere Fig.), ein reelles verkehrtes, wenn innerhalb (unt. Fig.), ein virtuelles aufrechtes und vergrößertes. — Eine Zerstreuungslinse gibt nur virtuelle aufrechte, verkleinerte Bilder.



Gegenstandsweite a und Bildweite b sind mit einander und mit der Brennweite f durch die Beziehung verbunden:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}; \quad \text{also } b=\frac{af}{a-f}. \qquad 1.$$

Die Bildgröße BB' verhält sich zur Gegenstandsgröße AA' stets wie die Bildweite zur Gegenstandsweite[1]):

$$BB':AA'=b:a. \qquad 2.$$

Die Abstände und Größen virtueller Bilder, sowie Brennweiten von Zerstreuungslinsen setzt man mit negativen Vorzeichen ein.

(Andere übersichtliche Beziehungen entstehen, wenn man jeden der beiden Abstände von dem zugehörigen Brennpunkte aus rechnet; er möge dann für den Gegenstand p, für dessen Bild q heißen, so daß $a=p+f$, $b=q+f$ ist. Diese Werte in Gl. 1 u. 2 eingesetzt erhält man leicht $pq=f^2$ und $BB':AA'=q:f$ oder $f:p$.)

Unberücksichtigt bleiben im folgenden die sog. Aberrationen der Linsen. Die „chromatische Abweichung" entsteht durch die Abhängigkeit der Brennweite vom Brechungsverhältnis. Sie äußert sich bei weißem Licht in dem Auftreten einer Reihe von Brennpunkten für die verschiedenen Farben, bez. in farbigen Säumen um die Bilder. Die „sphärische Abweichung" wird dadurch bedingt, daß an Linsen, deren Durchmesser nicht sehr klein gegen die Brennweite ist, die äußeren Zonen eine merklich kleinere Brennweite haben als die inneren. Auch bildet sich, sobald Strahlen nicht sehr flach gegen die Axe verlaufen, im allgemeinen ein Gegenstand verzerrt, ein ebener Gegenstand gewölbt ab.

Gerade diese Eigenschaften kommen bei der Untersuchung von Linsen zu feineren Zwecken in Betracht, besonders bei Objektiven für Fernrohre, Mikroskope und für Photographie. — Angaben über den Gegenstand und seine umfangreiche Literatur (besonders von Abbe) in den physikalischen und optischen Lehrbüchern. — Neue Meßmethoden für große und kleine Objektive mit Benutzung photographischer Aufnahmen vor und hinter dem Brennpunkt sowie außerhalb der Axe, Untersuchung der einzelnen Zonen usw. bei J. Hartmann, ZS f. Instr. 1904, 1, 33 u. 97.

Zentrierung. Es ist wichtig, daß die Linsenaxe (Verbindungslinie der Krümmungsmittelpunkte) in die Richtung vom Objekt nach dem Bilde gebracht wird, weil andernfalls der Bildabstand zu klein ausfällt. Die Axenrichtung findet man z. B. dadurch, daß man eine kleine Flamme aus geeignetem Abstande in der Linse spiegeln läßt: damit die Flamme in der Axe liegt, müssen ihre beiden, in der Vorder- und Rückfläche gesehenen Spiegel-

1) Das stark vergrößerte virtuelle Bild, welches ein dem Br.-P. einer Sammellinse nahe liegendes Objekt (Teilung eines Thermometers, einer Wage) auch dem entfernten Auge groß erscheinen läßt, kann oft nützlich verwertet werden.

bilder bei jeder Augenstellung in der durch Auge, Flamme und Linsenmittelpunkt gehenden Ebene liegen.

Brennweite einer Sammellinse.

1. Mit der Sonne. Man erzeugt mit der Linse ein Sonnenbild auf einem Stückchen Glas und stellt letzteres so, daß das Bild scharf begrenzt ist; der Abstand gibt die Br.-W.

2. Mit dem Fernrohr. Ein von einem Stativ gehaltenes Fernrohr wird auf Deutlichsehen eines sehr entfernten Gegenstandes eingestellt; hat es ein Fadenkreuz, so verfährt man hierbei nach **60**, 2. Man visiert darauf mit dem Fernrohr durch die vor sein Objektiv gebrachte Linse nach einem ebenen Objekt (z. B. Kartenblatt mit Schrift) und stellt dieses so ein, daß es deutlich erscheint (keine Parallaxe gegen das Fadenkreuz zeigt). Dann befindet es sich in der Brennebene der Linse.

Mit fernsichtigen Augen kann man die Bestimmung genähert ohne Fernrohr ausführen. Man zwingt sich, auf große Entfernung zu akkommodieren dadurch, daß man mit dem einen Auge an der Linse vorüber nach einem fernen Gegenstande sieht, und blickt mit dem anderen durch die Linse nach einem verschiebbaren Gegenstande (Bleistiftspitze). Erscheint der Gegenstand deutlich, so ist sein Abstand von der Linse die Br.-W.

3. Aus Gegenstands- und Bildweite. Im Abstande a von der Linse stellt man ein Licht auf, oder besser einen Blechschirm mit einem Loch und einem Drahtkreuz darin vor einer Flamme, auf der anderen Seite der Linse einen weißen Schirm in einem solchen Abstande b, daß ein deutliches Bild des Lichtes oder des Kreuzes entsteht (obere Fig. S. 311). Über Zentrierung des Lichtes siehe oben. Wenn f die Br.-W., so ist

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad \text{oder} \quad f = \frac{ab}{a+b}.$$

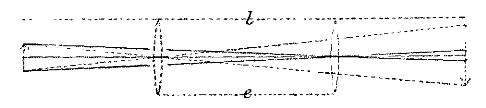
Der Bildabstand einer entfernten Flamme oder Fensterstange gibt, unter Vernachlässigung von $1/a$, für eine stärkere Linse nahe die Br.-W.

Sind die Abstände des Objekts und des Bildes gleich, so gibt ihre Hälfte die Br.-W. Eine dünne Linse kann man z. B. dicht vor einen Spiegel bringen und einen Schirm mit erleuchteter kleiner Öffnung so stellen, daß dicht neben dieser ihr reflektiertes Bild auf dem Schirm deutlich erscheint.

Subjektive Beobachtung. In der Linsenaxe wird eine Nadelspitze befestigt; auf den Ort ihres Bildes stellt man eine zweite Spitze ein, die Koinzidenz aus der Parallaxe beurteilend.

4. Durch Verschiebung (Bessel). Befindet sich ein Gegenstand in einem konstanten, die 4fache Br.-W. übersteigenden

Abstande l von einem Schirm, so gibt es zwei Zwischenstellungen, in denen die Linse ein deutliches Bild entwirft. Die Verschiebung zwischen beiden Stellungen, die sich genauer messen läßt als Abstände von der Linse, betrage die Länge e. Dann ist die Br.-W. der Linse



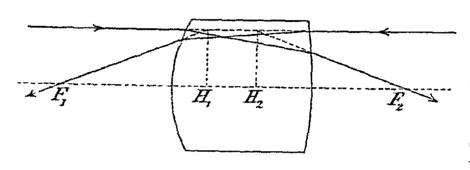
$$f = \tfrac{1}{4}(l - e^2/l).$$

Als Gegenstand kann ein Fadenkreuz dienen und anstatt des Schirmes ein eben solches mit Lupe, wobei das Zusammenfallen von Objekt und Bild aus der Parallaxe beurteilt wird.

Beweis. Die Abstände des Objektes und des Bildes von der Linse sind bei diesen Versuchen offenbar $\frac{1}{2}(l+e)$ und $\frac{1}{2}(l-e)$. Hieraus folgt $1/f = 2/(l+e) + 2/(l-e) = 4l/(l^2 - e^2)$, q. e. d.

5. Aus der Gleichheit von Objekt und Bild. Sind Bild und Gegenstand gleich groß, so ist ihr gegenseitiger Abstand gleich der vierfachen Br.-W.

Hauptpunkte. Kann man nicht, wie bis hierher angenommen wurde, die Dicke einer Linse oder eines Systems gegen die Brennweite und die Bildweiten vernachlässigen, so sind alle Abstände von zwei Ebenen aus zu rechnen, die man die Hauptebenen nennt. Ihre Schnittpunkte H_1 und H_2 mit der Axe heißen die Hauptpunkte. Wir setzen voraus, daß das Eintritts- und das Austritts-Mittel dasselbe ist; dann liegen die Hauptpunkte stets zu den beiden Brennpunkten F_1 und F_2 symmetrisch. In der Figur gehört H_1 zu F_1, H_2 zu F_2. Der Abstand H_1F_1 oder H_2F_2 stellt die Brennweite f vor. Die Konstruktion von Hauptpunkten s. unten.



In Glaslinsen (genau für $n = 1{,}5$) von nicht zu großer Dicke ist H_1H_2 gleich $\frac{1}{3}$ der Dicke; s. Fig. Bei beiderseitig gleicher Krümmung teilen also die Hauptpunkte die Linsendicke d in drei gleiche Teile. — Eine plankonvexe oder plankonkave Linse hat ihren einen Hauptpunkt in der gekrümmten Fläche, der andere liegt von da um $\frac{1}{3}d$ nach innen.

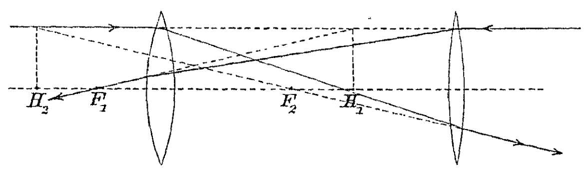
Es gelten u. a. die Sätze:

1) Ein parallel der Axe (z. B. links) einfallender Strahl geht nachher durch F_2 so, wie wenn er geradlinig vom Schnittpunkte des einfallenden Strahles mit der H.-Ebene H_2 käme. Die Hauptpunkte lassen sich hiernach konstruieren; vgl. Fig.

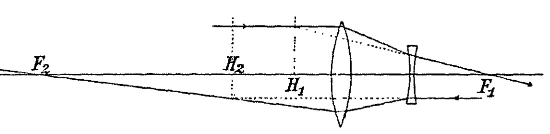
2) Ein von links in der Richtung nach dem H.-P. H_1 einfallender Strahl geht nach dem Durchtritt durch die Linse parallel zu sich selbst weiter, wie wenn er geradlinig vom Punkte H_2 käme, und umgekehrt.

In diesem Sinne nennt man die Hauptpunkte auch Knotenpunkte (Listing). Solche Punkte $K_1\,K_2$ von der Eigenschaft, daß ein in der Richtung nach K_1 einfallender Strahl in der durch K_2 gezogenen parallelen Richtung austritt, hat jedes System; sie sind mit den Hauptpunkten identisch, wenn Eintritts- und Austrittsmittel gleich sind. In jedem Falle sind die Abstände $H_1\,K_1$ und $H_2\,K_2$ gleich.

Linsensysteme. Auch hier bestehen immer zwei Brenn- und zwei Hauptpunkte, die nun aber beliebig innerhalb oder außerhalb verteilt sein können, freilich stets mit der Maßgabe, daß sie symmetrisch zu einander liegen, so daß eine einzige Brennweite $H_1\,F_1 = H_2 F_2$ resultiert. Das Beispiel der 1. Figur stellt eine dem Campanischen Okular ähnliche Verbindung zweier verschiedener Sammellinsen vor.



— Die 2. Figur gibt die Verbindung einer Sammellinse mit einer gleichstarken Zerstreuungslinse in kleinerem gegenseitigen Abstande als die Br.-W. Hier liegen alle vier Kardinalpunkte außerhalb; Variieren des Linsenabstandes gestattet, ihre Orte und die Br.-W. zu ändern. Diese Anordnung ist die Grundlage für das



Teleobjektiv (Taylor 1878), dessen Eigentümlichkeit und praktische Bedeutung darin besteht, daß, vermöge des Hinausrückens von H_1 nach links, trotz großer Br.-W. der Br.-P. F_1 dem System nahe liegt, was u. a. Fernrohre und photogr. Kammern kürzer zu bauen gestattet. Vgl. Rudolph, Gebr.-Anw. für Teleobj. Jena 1896; auch z. B. M. Wien u. Zenneck, Ph. ZS 8, 30. 1907, über Spektralaufnahmen mit T.-O.

Die folgenden Methoden geben die richtigen Brennweiten von Linsen oder Systemen, ohne daß man die Lage der Hauptpunkte zu kennen braucht.

6. Aus der Größe stark vergrößerter oder verkleinerter Bilder. a) Man stelle um ein weniges außerhalb des Brennpunktes einen hell beleuchteten Maßstab auf, am besten von Glas mit durchfallendem Licht, und gegenüber einen weißen Schirm in einem solchen Abstande A von der Linse, daß auf ihm das stark vergrößerte Bild der Teilung deutlich erscheint.

Ist l die Länge eines Skalenteiles, L die Länge seines Bildes, so gilt

$$f = A\frac{l}{L+l}.$$

b) Oder man stellt umgekehrt in größerer Entfernung von der Linse einen scharf begrenzten Gegenstand auf und mißt sein stark verkleinertes Bild. Hierzu dient ein Glasmikrometer mit Lupe, welches so gestellt wird, daß Mikrometerteilung und Bild deutlich (ohne Parallaxe) gesehen werden. In obiger Formel bedeuten jetzt l und L die Längen von Bild und Gegenstand, A des letzteren Abstand von der Linse.

Beweis. Die Abstände A und a des Bildes und des Gegenstandes von den zugehörigen Hauptebenen der Linse hängen durch die Formel $1/A + 1/a = 1/f$ zusammen. Die Größen beider verhalten sich $L:l = A:a$. Durch Einsetzen von $1/a = L/(Al)$ in die erste Gleichung entsteht obiger Ausdruck. Da A gegen die Dicke der Linse groß ist, so kann man anstatt des Abstandes von der Hauptebene merklich den gemessenen Abstand von der Linse setzen.

7. Verfahren von Meyerstein.

a) Linsen größerer Brennweite. Man fixiere auf einer Holzschiene zwei in mm geteilte kleine Glasskalen, die Teilungen einander zugewandt, in einer gegenseitigen Entfernung e, die merklich größer ist als die vierfache Brennweite. Man verschiebe die Linse zwischen den Skalen, bis das (verkleinerte) Bild der ersten gegen die zweite keine Parallaxe zeigt, und bestimme mit einer Lupe das Größenverhältnis Bild : Objekt $= v$; zugleich messe man den Abstand l_1 eines mit der Linse fest verbundenen Punktes — z. B. am Rande der Fassung — von dem Objekte. Nach Umkehrung der Linse wiederhole man die Operationen (aus den beiden v, die sich nur durch Versuchsfehler unterscheiden, wird das Mittel genommen). Der Abstand des mit der Linse fest verbundenen Punktes vom Objekt sei nun l_2, so ist

$$f = \frac{l_1 + l_2 - e}{1/v - v}.$$

Beweis. Vom Mittelpunkt beider Hauptpunkte (S. 314) hat das Objekt den Abstand $A = \frac{1}{2}(l_1 + l_2)$, das Bild also $B = e - \frac{1}{2}(l_1 + l_2)$. Sind a und b die Abstände des Objekts und des Bildes von den Hauptpunkten selbst, so ist offenbar $a - b = A - B = l_1 + l_2 - e$. Nun gilt $v = b/a$, also $1/v - v = a/b - b/a$, wofür man schreiben kann $(a-b)(1/a + 1/b)$ oder $(l_1 + l_2 - e)/f$, q. e. d.

b) Bei Fernrohr- und Mikroskop-Okularen, sowie bei Mikroskop-Objektiven ist das Bild zu klein, um wie oben gemessen zu werden; zudem liegt es oft im Innern des Systems.

Man benutzt daher mit Vorteil ein horizontal gelagertes Mikroskop von langer Sehweite mit Okularmikrometer und als Objekt, in etwa $1/2$ m Entfernung, rechteckige Klötze geeigneter Größe oder farbige Papierscheiben

auf weißem Hintergrund. v folgt sofort aus der Breite des Objektes, der Größe des Bildes und dem Werte eines Skalenteiles. l_1 und l_2 lassen sich leicht direkt abmessen. Um auch e zu erhalten, bringe man nach Entfernung der Linse eine Nadelspitze in die deutliche Sehweite des Mikroskopes und messe ihre Entfernung vom Objekt.

Vgl. Meyerstein, Wied. Ann. 1, 315. 1877.

8. Verfahren von Abbe.

Man bestimme für eine Lage des Objektes die Vergrößerung v (Bildgröße/Objektgröße), verschiebe das Objekt um eine gemessene Strecke Δ und finde nun die Vergrößerung v'. Dann ist

$$f = \frac{\Delta}{1/v' - 1/v}.$$

Denn aus $v = b/a$ und $1/f = 1/a + 1/b$ folgt $a = f(1 + 1/v)$. Ebenso $a + \Delta = f(1 + 1/v')$. Also ist $\Delta = f(1/v' - 1/v)$, q e. d.

Die Hilfsmittel sind die gleichen wie unter 7. Die Methode besitzt den Vorteil, daß die Bestimmung des Bildortes wegfällt.

Über Abbe's Fokometer vgl. Czapski, ZS f. Instr. 1892, 185; Müller-Pfaundler, 10. Aufl., Bd. II 1 (Lummer) S. 564.

9. **Lagenbestimmung des Brennpunkts eines starken Linsensystems.** Die Aufgabe liegt besonders an Okularen oder Mikroskop-Objektiven vor. Wir wollen den Abstand der Brennebene von dem Rande der Fassung messen (vgl. 68 III 2). Man klebt auf das Ende der Fassung eine Glasplatte mit einer Zeichnung, Teilung oder dgl., die Zeichnung nach innen, und legt das Ganze zwischen einerseits einen gut sichtbaren Gegenstand (Fensterrahmen, Flamme), dessen Abstand gegen die Brennweite als unendlich groß angesehen werden darf, und andrerseits ein horizontales, meßbar verschiebbares Mikroskop von mäßiger Vergrößerung, die Glasplatte dem letzteren zugekehrt. Die Verschiebung des Mikroskops zwischen dem Deutlichsehen der Zeichnung auf der Glasplatte und des durch das System entworfenen Bildchens des Objekts, etwa nach dem Ausbleiben der Parallaxe gegen ein Fadenkreuz des Mikroskops beurteilt, gibt direkt die gesuchte Größe (Dorn).

Zerstreuungslinsen.

10. Diese geben kein objektives Bild. Man verbindet sie mit einer stärkeren Sammellinse von bekannter Br.-W. F' und mißt nun die gemeinschaftliche Br.-W. F beider zusammen nach einer der vorhin angegebenen Methoden. Dann findet sich die negative Br.-W. f der Konkavlinse allein aus

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{F'} \qquad f = \frac{FF'}{F' - F}.$$

11. Man mißt die Größe des Zerstreuungsbildes, welches die Linse von der Sonne auf einem Schirm in gegebenem Abstande A

entwirft. Bedeutet d den Durchmesser der Linsenöffnung, D den Durchmesser des Zerstreuungsbildes, so ist

$$f = \frac{A d}{d - D + 0{,}0094 A};$$

0,0094 ist die doppelte Tangente des scheinbaren Halbmessers der Sonne. Bei schärferen, nicht zu kleinen Linsen kann man $0{,}0094 A$ vernachlässigen und hat die einfache Regel: derjenige Abstand des Schirmes, bei welchem das Zerstreuungsbild den doppelten Durchmesser der Linse hat, gibt die Br.-W.

12. **Sehr große Brennweiten.** (Vgl. **66** IV.) a) Ein Fernrohr sei auf einen, vom Objektiv um A abstehenden Gegenstand deutlich (ohne Fadenkreuzparallaxe) eingestellt. Man bringt die Linse dicht vor das Objektiv und sucht den jetzigen Abstand A' deutlichen Sehens. Dann ist $f = AA'/(A - A')$. Negatives f bezeichnet eine Zerstreuungslinse.

b) Ein Fernrohr von der bekannten Objektivbrennweite F sei auf ∞ eingestellt, z. B. auf den, ebenfalls auf ∞ eingestellten Kollimatorspalt eines Spektrometers (**60**, 2 oder 4a sowie 3). Nachdem die Linse dem Objektiv dicht vorgesetzt worden ist, müsse zum Wiedereinstellen auf ∞ das Okular um l eingeschoben werden. Dann ist $f = F(F - l)/l$.

Denn man hat $F - l = Ff/(F + f)$; vgl. S. 311.

13. **Astigmatische Linsen.** Diese haben zwei Hauptbrennweiten für die beiden auf einander senkrechten Hauptkrümmungen. Man erkennt jedes „Bild" eines leuchtenden Punktes daran, daß die Abbildung sich zu einer Geraden zusammenzieht, deren Richtung zugleich die eine Hauptkrümmungs-Richtung gibt. — Schief gehalten wirkt eine sphärische Linse wie eine astigmatische, deren eine Br.-W. kürzer ist, als die der Linse.

68. Vergrößerungszahl usw. eines optischen Instrumentes.

I. Lupe.

V.-Z. nennt man hier das Verhältnis der Winkel, unter denen derselbe Gegenstand unter der Lupe und bei unbewaffnetem Auge in der kleinsten deutlichen Sehweite erscheint.

Die V.-Z. m wird aus der Brennweite und der kleinsten deutlichen Sehweite A des unbewaffneten Auges berechnet:

$$m = 1 + A/f.$$

Man pflegt als einen Mittelwert $A = 25$ cm einzusetzen.

Beweis. Wird ein kleiner Gegenstand von der Länge l in einem Abstande a unter die Lupe gelegt, so daß sein (virtuelles) Bild im Abstande A erscheint, so ist $1/a = 1/A + 1/f$. Das Bild habe die Länge L, so ist die Vergrößerung $L/l = A/a = 1 + A/f$. Vgl. S. 312.

II. Fernrohr.

Vergrößerung heißt das Verhältnis des Winkels, unter welchem ein ferner Gegenstand im Fernrohre erscheint, zu dem Winkel, unter welchem er mit bloßem Auge gesehen wird.

1. Allgemein anwendbar ist folgendes Verfahren. Das Fernrohr wird in einem gegen die eigene Länge großen Abstande vor einem Maßstabe (Papierskale, Ziegeldach, Tapetenmuster) aufgestellt, auf welchem zwei Punkte hinreichend markiert sind, um mit bloßem Auge gesehen zu werden. Das eine Auge sieht durch das Fernrohr, das andere neben diesem vorbei, so daß die mit beiden Augen gesehenen Bilder sich decken. Wenn die direkt gesehene Länge zwischen den Marken N Teile beträgt und n Teile des im Fernrohr gesehenen Maßstabes deckt, so ist die V.-Z. $m = N/n$.

Man zieht dabei das Fernrohr so aus, daß die beiden Bilder sich bei einer Bewegung der Augen tunlichst wenig gegen einander verschieben. — Kurzsichtige Augen müssen natürlich mit der Brille bewaffnet sein.

2. Innerhalb kürzerer Abstände verfährt man so (v. Waltenhofen): Man stellt das Fernrohr auf große Entfernung ein, befestigt dann vor seinem Objektiv eine ganz schwache dünne Konvexlinse (Brillenglas von etwa 2 m Brennweite) und stellt das so vorgerichtete Fernrohr vor einem Maßstabe derart auf, daß dessen Teile deutlich erscheinen. Man beobachtet wie unter Nr. 1 mit beiden Augen. Decken n im Fernrohr gesehene Teile N mit bloßem Auge gesehene Teile und ist der Abstand des Maßstabes vom Objektiv $= a$, vom Auge $= A$, so beträgt die Vergrößerung

$$(N/n) \cdot (a/A).$$

3. Nur für Fernrohre mit konvexem Okular. Nach Einstellung auf unendlich ersetzt man das Objektiv durch eine rechteckige Blende. Durch die übrigen Linsen wird dann ein objektives Bild der Blende entworfen, dessen Größe auf einem Glasmaßstäbchen mit der Lupe gemessen wird und in die wirkliche Größe dividiert die Vergrößerung gibt. — Die Objektivöffnung

selbst kann als Blende dienen, wenn ihre Randstrahlen nicht durch Diaphragmen abgehalten werden, was häufig der Fall ist. Die eckige Gestalt sichert vor Täuschungen.

Beweis für das Kepler'sche Fernrohr. Bei der Einstellung auf unendlich ist der Abstand des Objektivs vom Okular gleich der Summe der Brennweiten $F+f$. Die Blende gibt demnach ein Bild im Abstande $b=(F+f)f/F$ vor dem Okular (S. 312, Gl. 1). Also ist $L/l=(F+f)/b=F/f$. F/f aber gibt bekanntlich die Vergrößerung.

4. Genaueres Verfahren (Gaufs). Ein auf ∞ eingestelltes Fernrohr ergibt bei umgekehrtem Strahlengange eine Verkleinerung gleich der Vergrößerung bei normalem Gange. Man mißt mit einem Theodolit die Winkelgröße eines sehr entfernten Objektes: erstens direkt, zweitens durch das verkehrt gestellte Fernrohr hindurch. Der Quotient der beiden Winkel ergibt die astronomische Vergrößerung.

In beschränktem Raume verfährt man so. Dem Okular gegenüber bringe man in wenigstens 1 m Entfernung einen horizontalen Stab mit zwei (besser mehreren) zur Mitte symmetrischen Marken an; deren gegenseitiger Abstand sei $=a$. In dem vor das Objektiv gesetzten Theodolit mögen diese Marken unter dem Winkel ω erscheinen. Der zugehörige Eintrittswinkel φ ergibt sich daraus, daß die Strahlen von den Marken durch die Okularblende des Fernrohrs (genauer den Okularkreis) gehen müssen. Ist A der Abstand des Stabes von der letzteren, so hat man $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi=\frac{1}{2}a/A$ und die Fernrohrvergrößerung $=\varphi/\omega$. — Statt eines Theodoliten kann ein Spektrometerfernrohr dienen; genauer noch ein mikrometrisch bewegliches Ablesefernrohr mit aufgeklebtem Spiegel, auf den man ein Hilfsfernrohr mit Skale richtet.

5. Aus den Brennweiten und Abständen der Gläser läßt die Vergrößerung sich berechnen. Z. B. ist sie für das Kepler'sche und das Galilei'sche Fernrohr gleich dem Verhältnis der Objektiv- zur Okularbrennweite. Bei der Br.-W.-Bestimmung zusammengesetzter Okulare werden meistens die Methoden 67, 7b oder 8 zur Anwendung kommen müssen.

Größe des Gesichtsfeldes; Gesichtswinkel. Wenn zwei am Rande des Gesichtsfeldes einander gegenüber erscheinende Punkte (z. B. Teilstriche eines Maßstabes) die Abstände a vom Fernrohrobjektiv und l voneinander haben, so beträgt das Gesichtsfeld in Bogengraden $57{,}3\ l/a$. Verfügt man nur über eine kleine Entfernung, so setzt man, wie bei 2., dem auf ∞ eingestellten Fernrohr eine schwache Sammellinse vor und rückt den Maßstab

in die jetzige deutliche Sehweite. a ist dann der Abstand des Maßstabes von der Linse.

III. Mikroskop.

Vergrößerung heißt hier das Verhältnis des Winkels, unter dem ein kleiner Gegenstand im Mikroskop gesehen wird, zu dem Winkel, unter dem er in der Sehweite 25 cm erscheint.

1. Unter das Mikroskop wird ein Objekt von bekannter Länge (Mikrometerteilung) gebracht; 25 cm unter der Okularhöhe legt man einen mm-Maßstab neben das Mikroskop. Während das eine Auge durch das Mikroskop nach dem Objekt sieht, blickt das andere nach dem Maßstab, und nun muß, wie bei II 1, die Projektion des im Mikroskop gesehenen Bildes auf den Maßstab gemessen werden. Bedeckt das Bild N Teile, während der Gegenstand wirklich die Länge von n Teilen hat, so gibt N/n die Vergrößerung.

Bequemer bringt man dicht über dem Okular einen kleinen unter 45° geneigten Spiegel an, dessen Belegung in der Mitte weggenommen ist, und stellt 25 cm entfernt seitlich von ihm den Maßstab vertikal auf, so daß mit demselben Auge durch das Spiegelglas hindurch das Bild des Objektes im Mikroskop, und im Spiegel reflektiert der Maßstab gesehen wird.

Anstatt mit dem Maßstabe zu vergleichen, kann man das Bild auf eine Fläche in 25 cm Abstand vom Auge abzeichnen (projizieren) und nachher ausmessen.

2. Bei sehr starker Vergrößerung, wenn das Verfahren 1. versagt, kann man die Formel benutzen: Vergrößerung $= S \cdot T/(f_1 f_2)$. S ist die deutliche Sehweite (25 cm), f_1 und f_2 sind die Brennweiten (**67**, 6 bis 8) des Objektivs und Okulars. T ist die reduzierte Tubuslänge, d. h. der Abstand des unteren Brennpunktes des Okulars vom oberen des Objektivs. Sie wird aus dem gegenseitigen Abstande der Okular- und Objektivfassung im Rohr, unter Rücksichtnahme auf die Abstände der beiden Brennebenen von den Enden der Fassungen erhalten; vgl. **67**, 9.

3. Über Längenmessung mit dem Mikroskop vgl. **21**, 4.

4. Öffnungswinkel und numerische Apertur eines Mikroskop-Objektives.

Der Öffnungswinkel ($2u$) ist der Winkel zwischen den äußersten Strahlen, welche von einem deutlich gesehenen Axenpunkt aus durch das Mikroskop treten können. Die Begrenzung des Strahlenkegels erfolgt in der Regel an der Unterfläche des Objektivs.

Es bezeichne n das Br.-V. des Mediums, aus welchem die Strahlen in das Objektiv treten, dann heißt $a = n \sin u$ die numerische Apertur des Objektivs. Bei Trockensystemen ist $n = 1$, also $a = \sin u < 1$. Bei Immersionssystemen gilt n für die Flüssigkeit (Wasser, Zedernholzöl, Monobromnaphthalin), und hier kann $a > 1$ werden.

Nach Lister kann man die numerische Apertur eines Trockensystems bestimmen, indem man vor dem horizontal gelegten Mikroskop im Dunkeln eine Kerze bis zur Erhellung des halben Gesichtsfeldes verschiebt und dann symmetrisch zur ersten Kerze eine zweite so aufstellt, daß auch die andere Hälfte gerade erhellt wird. Sind die Kerzen um e voneinander entfernt und ist ihre Ebene um A von dem (mit einer Nadelspitze aufzusuchenden) Punkte entfernt, der im Mikroskop deutlich erscheint, so hat man

$$\operatorname{tg} u = e/2A.$$

Apertometer von Abbe. Dieses mißt auch Aperturen über 1. Einem flachen Halbcylinder aus Glas (9 cm Durchmesser, 1,2 cm Höhe) ist in der Richtung des Durchmessers ein Reflexionsprisma von 45° angeschliffen, während der Mittelpunkt durch eine kleine Öffnung in einem aufgekitteten versilberten Deckgläschen markiert ist. Die obere Fläche trägt 2 Teilungen, dem Öffnungswinkel und der Apertur entsprechend; als Indices dienen 2 rechtwinklig gebogene geschwärzte Messingplättchen.

Das Apertometer wird auf den Tisch des Mikroskopes gesetzt und dieses (ev. nach Einfügung der Immersions-Flüssigkeit) zunächst auf Deutlichsehen der kleinen Öffnung eingestellt. Blickt man nach Herausnahme des Okulars in das Rohr, so sieht man bei schwächeren Objektiven das vom Objektiv entworfene Bildchen der beiden Indices, deren Spitzen man auf den Rand des Gesichtsfeldes einstellt, worauf man an der Teilung abliest.

Bei stärkeren Objektiven wird das Bildchen für Beobachtung mit dem unbewaffneten Auge zu klein. Man benutzt dann ein Hilfsmikroskop, das man bei den Instrumenten von Zeiſs durch Einschrauben eines besonderen schwachen Objektives in das untere Ende des Tubusauszugs und Einsetzen eines Okulares herstellt. Bei andern Instrumenten wird man ein geeignetes Objektiv mit einem Kork im Tubusauszug anbringen können.

Vgl. Czapski, Grundz. d. Theorie d. opt. Instr., 2. Aufl., 456. 1904.

Von der numerischen Apertur a hängt die sog. auflösende Kraft des Mikroskopes ab, d. h. die Größe der kleinsten unterscheidbaren Objekte. Eine Teilung von der Strichweite ε wird bei zentraler Beleuchtung noch aufgelöst, falls $\varepsilon \geqq \lambda/a$; bei günstiger schiefer Beleuchtung, falls $\varepsilon \geqq \frac{1}{2}\lambda/a$, wo λ die Wellenlänge des Lichtes in Luft ist (Abbe).

Über Sichtbarmachen „ultramikroskopischer" Gegenstände durch intensive Beleuchtung vgl. Siedentopf u. Zsigmondy, Ann. der Ph. 10, 1. 1903; Reissig, ib. 27, 186. 1908.

69. Polarisationswinkel eines durchsichtigen Körpers.

Polarisiert (Malus 1808) heißt das Licht, wenn es nicht wie das gewöhnliche ungeordnet (d. h. seine Schwingungsebene merklich unendlich rasch wechselnd) allseitig gleich weit schwingt; wir nehmen nach der Theorie von Fresnel an, daß in die „Polarisationsebene" die kleinste Schw.-Komponente fällt. Fehlt eine Komponente ganz, d. h. schwingt das Licht nur in einer Ebene, so heißt es vollständig, linear oder geradlinig polarisiert[1]. Den einfachsten Zustand unvollständiger Polarisation gibt das elliptisch polarisierte Licht, bei dem die Ätherteilchen Ellipsen beschreiben; im Speziallfall der Kreisbahn heißt das Licht zirkular polarisiert. Vgl. **71 a** I.

Durch schräge Reflexion an durchsichtigen Körpern (vgl. **71 a** II und ebendort auch Metallreflexion) wird das gewöhnliche Licht in teilweise polarisiertes verwandelt, indem vorwiegend, und bei einem bestimmten Einfalls- und Reflexionswinkel („Pol.-Winkel") ausschließlich, die der spiegelnden Fläche parallele Komponente reflektiert wird. Das zurückgeworfene Licht ist also in der Einfallsebene („Pol.-Ebene") polarisiert, und zwar an einem idealen durchsichtigen Körper vollständig bei demjenigen Einfalls- oder Reflexionswinkel, für welchen der eindringende und der zurückgeworfene Strahl auf einander senkrecht stehen; Brewster 1815. Hieraus folgt, wenn ω diesen „Polarisationswinkel" und n das Br.-V. des Spiegels (streng genommen für eine bestimmte Farbe) bedeutet,

$$n = \operatorname{tg} \omega.$$

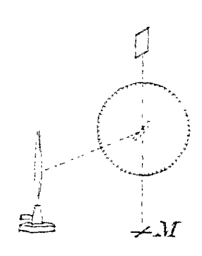
Ist n bekannt, so kann ω hiernach berechnet werden; für Glas vom Br.-V. 1,5 ist $\omega = 56^0$. Umgekehrt ergibt sich n, wenn ω gemessen ist; große Genauigkeit ist dabei aber nicht zu erwarten.

Das eindringende Licht ist senkrecht zur Einf.-Ebene polarisiert, aber niemals vollständig. Man beleuchte den Spiegel mit einer in der Einfallsebene hinreichend ausgedehnten Lichtquelle (etwa durchscheinendem Papier vor einer Flamme, oder mittels eines gestreckten elektrischen Glühfadens; einen horizontalen Spiegel auch wohl mit der Natriumflamme eines Bunsenbrenners oder einer langen Gasflamme eines Spitzbrenners) und beobachte das reflektierte Licht durch einen Nicol, dessen Polarisationsrichtung (größere Diagonale) senkrecht zur Einfallsebene des Lichtes liegt. Bei richtiger Stellung erscheint im Gesichtsfeld ein verwaschener dunkeler Streifen; die der Mitte des letzteren entsprechende Visierrichtung bildet mit der Spiegelnormalen den Polarisationswinkel.

---

1) Nach der Maxwell'schen elektromagnetischen Lichttheorie liegen dann in der Polarisationsebene die magnetischen, senkrecht zu ihr die elektrischen Schwingungen. Wir folgen den Anschauungen und dem Sprachgebrauch der Fresnel'schen Elastizitätstheorie des Lichtäthers.

An einem festen Körper wird ω gemessen, indem man ihn an der Drehaxe eines Goniometers (**60, 61**) oder des Totalreflektometers (**63** II) befestigt, die spiegelnde Fläche mit der Axe zusammenfallend. Durch einen feststehenden Nicol, dessen größere Diagonale der Drehaxe parallel ist, visiert man die Fläche mit dem Fernrohr an oder auch mit bloßem Auge, dessen Sehrichtung durch eine Marke *M* hinter dem (durchsichtigen) Körper fixiert ist, und dreht die Fläche so, daß der dunkele Fleck in die Visierrichtung kommt. Nachdem die Teilung abgelesen ist, stellt man die Lichtquelle symmetrisch auf die andere Seite, dreht die Fläche ebendahin, sucht wieder den dunkelen Fleck und dreht, bis er abermals in der Visierrichtung liegt. Die Drehung zwischen den beiden Stellungen beträgt 2 ω. Die Anordnung mit einem Vertikal-Goniometer s. Fig. Bei der zweiten Einstellung kommt die Flamme rechts zu stehen.



Flüssigkeitsoberflächen werden mittels eines Nicols mit vertikalem Teilkreis untersucht. ω ist der Neigungswinkel der Richtung, in welcher die verdunkelte Stelle erscheint, gegen die Vertikale. Behufs genauer Messung kann man die Flüssigkeit und die Lichtquelle einmal links, das andere Mal rechts stellen und so 2 ω bestimmen.

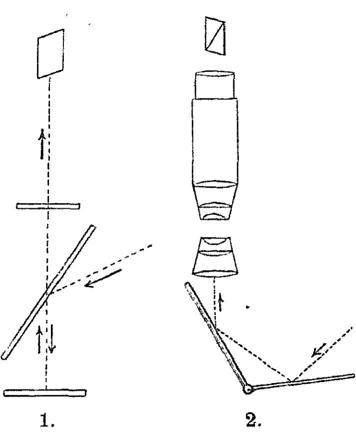
70. Polarisationsapparat. Untersuchung doppelbrechender Körper. Kristalle.

Polarisationsapparat.

So heißt eine Verbindung von zwei das Licht polarisierenden Vorrichtungen. Die dem Auge zugewandte Polarisationsvorrichtung heißt Analysator, die andere wohl Polarisator schlechtweg. Polarisatoren sind Nicol'sche Prismen (ihre Polarisationsrichtung fällt mit ihrer größeren Diagonale zusammen); oder unbelegte Glasplatten oder Sätze aus solchen, auch wohl schwarze Glasplatten, an denen man das Licht unter dem Polarisationswinkel (von etwa 56°) spiegeln läßt; oder Sätze von auf einander gelegten Glasplatten, durch welche das Licht unter dem genannten Neigungswinkel hindurch geht; oder Turmalinplatten, die vorzugsweise eine Schwingungskomponente absorbieren. Die beiden letztgenannten Mittel polarisieren unvollständig. — Doppelbrechende Prismen (Kalkspat, Quarz) zerlegen Licht in zwei senkrecht zu einander schwingende Strahlen; die gleichzeitige Farbenzerstreuung kann durch ein angekittetes Glasprisma,

oder auch Kristallprisma von anders orientierter Axenrichtung (Rochon, Wollaston), aufgehoben sein. — Mannigfaltige Formen von Polarisationsprismen s. z. B. bei Halle, Deut. Mech.-Zeitung 1908, 17.

Der gewöhnliche, durch sein breites Gesichtsfeld angenehme Nörrenberg'sche Pol.-Apparat (Fig. 1) benutzt als Polarisator eine durchsichtige Glasplatte, die um 56° gegen die Horizontale geneigt ist. Schräg einfallendes Tageslicht oder auch Natriumlicht wird polarisiert nach unten auf einen horizontalen Spiegel reflektiert, der es nach oben zurückwirft und nach einem, allerdings mit einer Schwächung verbundenen Durchgange durch die schräge Glasplatte dem, meist über einem Teilkreise drehbaren, Analysator zuführt, in der Figur einem Nicol'schen Prisma. Auf die horizontale Glasplatte kommt der Kristall usw.



Für manche Zwecke bedarf man Lichtes von mannigfaltiger Richtung im Kristall (eines „großen Gesichtsfeldes"). Dann werden zwischen den Kristall und die Polarisatoren Konvexlinsen eingeschaltet (Nörrenberg'sches „Pol.-Mikroskop", Fig. 2). Der unterste, metallbelegte Spiegel dient nur zur Beleuchtung und wird dem Orte der Lichtquelle entsprechend gestellt. Der andere, ein Satz unbelegter Glasplatten, muß die vorgeschriebene Neigung haben. Statt dessen kann auch unten ein Nicol vorhanden sein. — Zur Beobachtung kleiner Körper im polarisierten Lichte unter dem gewöhnlichen Mikroskop bringt man zwischen Beleuchtungsspiegel und Körper ein Nicol'sches Prisma und legt ein zweites auf das Okular des Mikroskops.

Vgl. hierzu Klein, Berl. Sitzber. 1893, 221. — Über Polarisationsinstrumente überhaupt z. B. Groth oder Liebisch, Kristallographie. Eingehende Regeln zur Unterscheidung der Kristalle unter dem Mikroskop s. z. B. Lehmann, Molekularphysik I 295. 1888.

Die Polarisationsebene des Polarisators und die zu ihr senkrechte Ebene sollen Hauptebenen des Apparats heißen. Meistens gebraucht man diesen mit „gekreuzten Polarisationsvorrichtungen", also mit dunklem Gesichtsfeld.

I. Untersuchung doppelbrechender Körper; allgemeines.

Ein Körper bricht das Licht einfach, wenn er amorph oder regulär kristallisiert ist; doppelt, wenn er einem nicht regulären Kristallsysteme angehört oder aus anderen Ursachen, wie Druck, Zug, rasche Kühlung, elektr. Kraftlinien, nach verschiedenen Richtungen ungleich beschaffen, „anisotrop" ist. In diesem Falle hängt die Fortpfl.-Geschw. transversaler Wellen von der Schwingungs-Richtung ab, und zwar gehören zu jeder

Fortpfl.-Richtung zwei, senkrecht auf einander stehende, Schwingungsrichtungen I und II (Fig.) von kleinster und größter Fortpfl.-Geschwindigkeit. Eine einfache Lichtschwingung S (Fig.), die in einen Kristall usw. eintritt, durchsetzt diesen nun in der Form, daß sie in die beiden, diesen Schw.-Richtungen angehörenden Komponenten zerfällt, die sich dann unabhängig von einander, also ungleich rasch fortpflanzen.

Es gibt in jedem Körper — von drehenden (**71**) abgesehen — mindestens eine Richtung, in der eine Lichtwelle unzerlegt fortgepflanzt wird; sie heißt optische Axe. Im amorphen Körper oder einem Kristall des regulären Systems ist in diesem Sinne jede Richtung eine optische Axe. Die anderen Körper haben entweder eine oder zwei optische Axen.

Aus der optischen Anisotropie entstehen folgende Erscheinungsgruppen.

1. **Die Interferenzen polarisierten Lichtes.** Ihre Ursache besteht darin, daß die beiden Komponenten (von denen im Kristall die eine gegen die andere vorausgeeilt ist) bei dem Wiederaustritt in Luft einen anderen gegenseitigen Schwingungszustand haben als zuvor, und daß deswegen der nun aus ihnen resultierenden Welle im allgemeinen ein anderer Polarisationszustand zukommt als der eingetretenen. Das Gesichtsfeld kann somit durch das Einbringen eines doppelbrechenden Körpers in mannigfaltiger Weise geändert werden. Über charakteristische Fälle vgl. **71a** I.

2. **Die Doppelbrechung.** Im kristallinischen Mittel hängt die Lichtgeschwindigkeit und folglich die Lichtbrechung von der Schwingungsrichtung ab. Die beiden Komponenten, in die ein Strahl sich zerlegt, werden daher ungleich gebrochen; aus einem einzigen Strahl entstehen im allgemeinen zwei, senkrecht zu einander polarisierte, Strahlen von verschiedener Richtung.

Bestimmung von Br.-Exponenten. Wie in **60** lassen sich Br.-Verhältnisse aus den Ablenkungen in einem Prisma ableiten, welches aber, damit die Resultate etwas bestimmtes aussagen, in seiner Lage zu der Kristallform bez. zu den optischen Axen definiert sein muß. Ein einaxiger Kristall besitzt ein größtes und ein kleinstes „Hauptbr.-V.", die man am einfachsten beide an einem parallel zur opt. Axe hergestellten Prisma bestimmt; an einem Quarzkristall z. B. werden zwei, einen Winkel von 60° einschließende Säulenflächen eben geschliffen und poliert. — Allgemeinere und insbesondere die an zweiaxigen Kristallen auftretenden Erscheinungen werden dadurch verwickelt, daß die Schwingungen meist zur Strahlenrichtung schräg stehen und daß das Sinusgesetz der Brechung nur auf besondere Fälle Anwendung findet. Näheres in den größeren Lehrbüchern.

Über die bequemere Methode der Totalreflexion vgl. **63** II u. IV.
Über Schleifen und Polieren von Kristallplatten s. 8, 17.

Ob ein durchsichtiger Körper einfach oder doppelt bricht, erkennt man am empfindlichsten mit gekreuzten Polari-

satoren. Einfach brechende Körper lassen das Gesichtsfeld dunkel, mit Ausnahme der, meistens flüssigen, Körper, welche das Licht drehen, ohne Doppelbrechung gewöhnlicher Art zu besitzen (**71**). Ein doppelbrechender Körper erhellt, bez. färbt im allgemeinen das Gesichtsfeld.

Kristallinische Beschaffenheit durch innere Spannungen und aus diesem Grunde ungleichmäßige Erhellungen des Gesichtsfeldes zeigen viele Körper, sogar die bestgekühlten Gläser; über die Benutzung zum Prüfen von Gläsern vgl. z. B. Brodhun u. Schönrock, ZS f. Instr. 1907, 192.

Wird Glas elastisch gedehnt, so schreitet ein zur Dehnungsrichtung parallel polarisierter Strahl am schnellsten fort.

Aufsuchen der Schwingungsrichtungen des Lichtes in einer Platte aus einer doppelbrechenden Substanz. Man bringt die Platte zwischen die gekreuzten Polarisatoren. Wenn die Mitte immer dunkel bleibt, so zeigt dies an, daß die Platte senkrecht zur optischen Axe geschnitten ist. Sonst hat sie stets zwei um 90^0 verschiedene Lagen, bei denen das Gesichtsfeld bez. die Mitte des Feldes dunkel bleibt. In diesen Stellungen fallen die Schwingungsrichtungen der beiden die Platte durchsetzenden Wellenzüge in die Hauptebenen des Apparates. — Vgl. **71 a** I.

Komplementärfarben. In jeder anderen Stellung ist das Gesichtsfeld mehr oder weniger erhellt, bez. es treten in hinreichend dünnen Platten (Gipsblättchen) mit weißem Licht Farben auf, die von der Dicke abhängen und dadurch entstehen, daß die verschiedenen Farben wegen ihrer ungleichen Wellenlängen und Fortpflanzungsgeschwindigkeiten vermöge der Interferenz ungleich stark austreten. Am intensivsten ist die Färbung in der gegen die Dunkelstellung um 45^0 gedrehten Lage der Platte. Stellt man nun durch Drehen einer der Polarisationsvorrichtungen um 90^0 auf helles Gesichtsfeld ein, so wird die ganze Erscheinung, also auch die Farbe, an jeder Stelle genau komplementär. — Ein doppelbrechendes Prisma (S. 324) als Analysator zeigt die komplementären Erscheinungen gleichzeitig neben einander.

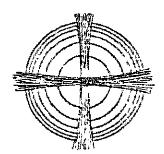
Elektrische Doppelbrechung (Kerr). Im el. Felde (zwischen Kondensatorplatten, Kerr'sche Zelle) haben die $\parallel$ und $\perp$ zu den Kraftlinien pol. Strahlen eine, vom Mittel abhängige, Ungleichheit ihrer Geschwindigkeiten. Ist der $\parallel$ pol. Strahl der raschere, so heißt das Mittel elektrooptisch positiv. Besonders stark (positiv) zeigt sich Schwefelkohlenstoff. Die Wirkung wächst mit dem Quadrate der Feldstärke. Vgl. z. B. Kerr, Phil. Mag. (5) 9, 159. 1880; 13, 153 u. 248. 1882; Röntgen, Wied. Ann. 10, 77. 1880; Quincke, ib. 19, 729. 1883.

II. Einaxige Kristalle.

Zu diesen gehören die Kristalle des hexagonalen und des quadratischen Systems. Die Richtung der optischen Axe fällt mit der kristallographischen Hauptaxe zusammen. Eine Ebene, welche die optische Axenrichtung enthält, heißt ein Hauptschnitt. — Beispiele: Kalkspat, Natronsalpeter, Turmalin, Blutlaugensalz, Eis, Quarz. Über letzteren vgl. aber **71**.

Von den beiden Schwingungen, in welche das einen einaxigen Kristall durchsetzende Licht zerfällt, folgt die eine dem gewöhnlichen Brechungsgesetz (ordentlicher Strahl); sie findet stets zur optischen Axe, also zu dem durch den ord. Strahl gelegten Hauptschnitt senkrecht statt (ist „nach dem Hauptschnitt polarisiert"). Eine der oben festgestellten Schwingungsebenen enthält also die optische Axe des Kristalls. Die andere Schwingung fällt in einen Hauptschnitt.

Ringfiguren. Eine zur optischen Axe senkrecht geschnittene Platte werde zwischen die gekreuzten Polarisationsvorrichtungen gebracht. Die Mitte bleibt stets dunkel. In einem Apparat mit größerem Gesichtsfelde — Turmalinzange, Polarisations-Mikroskop — erstreckt sich diese Dunkelheit von der Mitte in die beiden Hauptebenen des Apparates (dunkeles Kreuz); die vier Quadranten sind von Ringen durchsetzt, welche im einfarbigen Lichte (Natriumlicht; oder rotes Glas vor das Auge halten!) von hell zu dunkel übergehen, im weißen Lichte gefärbt erscheinen. [Lichtdrehende Körper (Quarz) verdunkeln die Mitte nicht.]



Erläuterung. Das Gesichtsfeld behält seinen Zustand (hier Dunkelheit) für jede Richtung des austretenden Strahles, wo dieser sich von dem eingetretenen nicht unterscheidet; also erstens in jeder der beiden Hauptebenen des Apparates, denn hier durchsetzen die Strahlen den Kristall entweder als ordentliche oder als außerordentliche, zerfallen also nicht in Komponenten (dunkeles Kreuz); zweitens für jede Richtung, in welcher die beiden Schwingungskomponenten im Kristall einen Gangunterschied von 1, 2, 3 ... ganzen Wellenlängen erhalten haben, denn der nach dem Austritt aus ihnen resultierende Strahl unterscheidet sich nicht vom eingetretenen. Da nun jede von diesen Richtungen offenbar einen bestimmten Winkel mit der Axe bilden muß, so erscheinen dunkele Kreise.

Je enger bei gleich dicken Platten die Ringe beisammen liegen, desto größer ist die „Doppelbrechung", d. i. der Unterschied der Lichtgeschwindigkeiten des ordentlichen und des außerordentlichen Strahles.

Durch Drehung des Analysators um 90° entsteht an jedem Punkte der komplementäre Zustand; das Kreuz wird hell, rote Ringe werden grün, blaue gelb usw.

Unterscheidung positiver und negativer Kristalle.

Ein Kristall, welcher den außerordentlichen Strahl stärker bricht (langsamer fortpflanzt) als den ordentlichen, heißt positiv und umgekehrt.

Man erkennt das Vorzeichen mit einer sog. Viertelwellen-Glimmerplatte, d. h. einer so dicken Platte, daß die beiden Schwingungen einen Gangunterschied von $\frac{1}{4}$ Wellenlänge erfahren (71a I). Die Glimmerplatte legt oder hält man zwischen die Kristallplatte und den Analysator, und zwar so, daß die, in der Regel durch einen Pfeil bezeichnete Ebene der optischen Axen der Glimmerplatte um 45° gegen die Hauptebenen des Apparates gedreht ist. Dann zeigen sich die Ringe im einen Quadrantenpaar hinaus-, im anderen hineingerückt; Schema beistehend. Die innersten beiden Stückchen erscheinen als verdunkelte Flecke. Liegen diese in der optischen Axenebene der Glimmerplatte (wie in der schematischen Figur), so ist der Kristall negativ (Kalkspat) und umgekehrt.

Das Glimmerblättchen läßt sich leicht in passender Dicke abspalten. Man erkennt seine Brauchbarkeit und die Richtung seiner optischen Axenebene dadurch, daß man es einmal auf einen bekannten Kristall (Kalkspat, negativ) anwendet. Die Axenebene des Glimmers läßt sich auch aus seiner Lemniskatenfigur (S. 330) bestimmen.

Erklärung nach der Fresnel'schen Theorie. Die Kristallplatte sei negativ, also von den den Kristall schräg durchsetzenden Strahlen pflanzen sich die außerordentlichen, d. i. die im Apparate radial schwingenden, rascher fort als die ordentlichen, peripherisch schwingenden Strahlen. In einer gewissen geneigten Richtung, d. h. an der Kristallfigur in einer gewissen Entfernung vom Mittelpunkte, wird der radial schwingende Strahl dem anderen im Kristall um $\frac{1}{4}\lambda$ vorauseilen; diese Entfernung muß innerhalb des ersten dunkelen Ringes liegen, denn diesem Ringe entspricht ja ein Gangunterschied von $\frac{1}{2}\lambda$.

Nun pflanzt eine Glimmerplatte einen sie durchsetzenden Strahl, wenn er in ihrer Axenebene schwingt, am langsamsten fort; unsere Viertelwellenplatte verzögert also die in ihrer Axenebene schwingende Lichtkomponente gegen die andere um $\frac{1}{4}\lambda$. Faßt man nun von den oben genannten Strahlen, deren radiale Komponente im Kristall um $\frac{1}{4}\lambda$ vorausgeeilt war, diejenigen ins Auge, welche in der Axenebene der Glimmerplatte liegen, so sieht man, daß hier der Gangunterschied im Kristall durch die Glimmerplatte aufgehoben wird, das Gesichtsfeld also seine natürliche Beschaffenheit d. h. Dunkelheit haben muß. Daher entstehen die beiden dunkelen Flecke in der Axenebene der Glimmerplatte.

Daß ein positiver Kristall sich umgekehrt verhalten muß, folgt von selbst. — Zugleich übersieht man leicht, daß die Durchmesser der Ringe

in zwei Quadranten um ¼ Ringabstand vergrößert, in den anderen beiden Quadranten um ebensoviel verkleinert sein müssen.

III. Zweiaxige Kristalle. Optischer Axenwinkel.

Ein Kristall aus dem rhombischen oder einem schiefaxigen System hat zwei optische Axen. Der Kristall besitzt, entsprechend der Elastizität des Äthers nach den drei auf einander senkrechten optischen Elastizitätsaxen[1] (die im rhombischen System mit den kristallographischen Axen zusammenfallen) drei Hauptbrechungsverhältnisse, die nach ihrer Größe geordnet n_1, n_2, n_3 heißen mögen. Die optischen Axen liegen in der durch die Axen der größten und der kleinsten Elastizität gehenden Ebene; derjenige von ihren Winkeln, der die Axe der größten Elastizität einschließt[2], heiße innerer optischer Axenwinkel α_0. Er ist gegeben durch die Beziehung

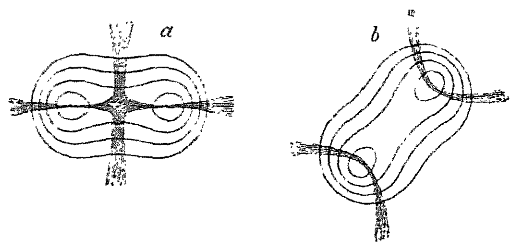
$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha_0 = \frac{n_1^2}{n_2^2}\,\frac{n_2^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_3^2} \quad \text{oder} \quad = \frac{1-(n_3/n_2)^2}{1-(n_3/n_1)^2}.$$

Wenn $\alpha_0 < 90^0$, so heißt der Kristall positiv und umgekehrt.

Der äußere Axenwinkel α, d. h. der Winkel der Strahlen, deren Schwingungen im Kristall sich nach den Richtungen der beiden optischen Axen fortgepflanzt haben, ist gegeben durch $\sin \tfrac{1}{2}\alpha = n_2 \cdot \sin \tfrac{1}{2}\alpha_0$; s. Figur.

Beispiele: Kalisalpeter, Arragonit, Topas, Glimmer, Gips, Baryt, Kupfervitriol. Einige Hauptbr.-V. in Tab. 24.

Ringfiguren. Eine zur Mittellinie der beiden Axen senkrechte Platte zeigt im gekreuzten Pol.-App., wenn das Gesichtsfeld hinreichend groß ist, eine Figur, im homogenen Licht (gefärbte Gläser vorhalten!) aus hellen und dunkelen, im weißen Licht aus gefärbten Lemniskaten; diese werden, wenn die opt. Axenebene mit einer der Hauptebenen des Apparats zusammenfällt, von einem dunkelen Kreuz (Fig. *a*) und sonst von dunkelen hyperbolischen Ästen durchsetzt, die bei 45° Neigung (Fig. *b*) zu den Lemniskaten symmetrisch liegen. Die beiden Punkte in den Ästen, um welche sich die Lemniskaten zusammenziehen, bezeichnen die optischen Axen des Kristalles.



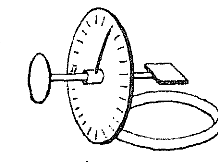
Bei Hauswaldt, Interferenzersch. im polaris. Licht, viele photographische Aufnahmen mannigfaltiger durch Doppelbrechung entstehender Figuren. — Viele Axenwinkel in Landolt-B.-M. Tab., S. 645.[2])

1) In der Sprache der elektromagnetischen Lichttheorie: nach den drei Hauptrichtungen der Dielektrizitätskonstante.

2) Meistens nennt man Axenwinkel den spitzen Winkel beider Axen.

Messung eines optischen Axenwinkels.

Eine kleine Meßvorrichtung (Fig.), an deren Drehungsaxe die Kristallplatte mit Wachs oder mit einem Kork befestigt wird, setzt man auf den unteren Teil des Nörrenberg'schen Apparates Fig. 2, S. 325. — Auch kann man die Platte am Totalreflektometer (**63** II) befestigen und zwischen zwei feststehenden Polarisatoren (Turmalinplatten) drehen. — Besondere Axenwinkelapparate nach v. Lang und nach Groth; auch Kristallpolymeter von Klein (Fuefs'sche Werkstätte).



Man markiert an der Kristallplatte die zur Verbindungslinie der optischen Axenbilder senkrechte Richtung und befestigt die Platte dann so an der Drehaxe, daß diese Richtung in der Drehaxe liegt.

Zur Messung empfiehlt sich Fig. *b*, welche entsteht, wenn die gekreuzten Hauptebenen des Pol.-App. symmetrisch um 45° gegen die Drehaxe geneigt werden. Nun stellt man eins von den optischen Axenbildern (Scheitelpunkt der Hyperbel) in die Visierrichtung des Apparates (Fadenkreuz) ein und dann das andere. Der Winkel α zwischen beiden Einstellungen ist der scheinbare oder äußere Axenwinkel, d. h. der Winkel der Strahlen, deren Wellen den Kristall in der Richtung der Axen durchlaufen haben, nach ihrem Austritt in die Luft.

Den wirklichen Winkel α_0 im Kristall erhält man (vgl. Fig. S. 330) aus dem scheinbaren α und dem mittleren Hauptbrechungsverhältnis n_2 (vgl. vor. S.) mittels der Beziehung

$$\sin \tfrac{1}{2}\alpha_0 = (\sin \tfrac{1}{2}\alpha)/n_2.$$

Bei großem Axenwinkel erscheint nur eine Axe zur Zeit im Gesichtsfeld. Wenn der Winkel den Grenzwinkel der totalen Reflexion im Kristall ($\sin \frac{1}{2}\alpha_0 = 1/n_0$) erreicht oder übersteigt, so werden die Axen in Luft unsichtbar. Dann kann man aber innerhalb einer Flüssigkeit messen, deren eine Grenzfläche zum Analysator senkrecht ist. Das Verfahren ist im übrigen das nämliche wie vorhin. Der hier beobachtete Axenwinkel sei α', so findet man α, wenn N das Brechungsverhältnis der Flüssigkeit ist, aus der Gleichung $\sin \frac{1}{2}\alpha = N \sin \frac{1}{2}\alpha'$.

Da der Axenwinkel von der Farbe abhängt, so verlangt die genaue Messung eine bestimmte Lichtsorte, z. B. das Licht der Natriumflamme oder auch des roten Kupferglases, welches man vor das Auge hält. — Der Unterschied der Axenwinkel in verschiedenen Farben heißt Axendispersion für diese Farben.

Messungen an Dünnschliffen s. z. B. Wright, Sill. Journ. 24, 317. 1907.

Brechungsverhältnis N einer Flüssigkeit. Eins der einfachsten Mittel, dieses zu bestimmen, ist die Messung eines und desselben Axen-

winkels (z. B. Baryt) in der Luft α und in einer Flüssigkeit α'. Es gilt dann die vorige Gleichung.

71. Optisches Drehvermögen; Saccharimetrie (Arago 1811 Quarz; Biot 1815 Zucker).

Ein Körper, welcher das dunkele Gesichtsfeld eines Pol.-Apparates erhellt, ist entweder doppelbrechend (70) oder „zirkularpolarisierend", „optisch aktiv"; das will sagen, er dreht die Polarisationsebene durchgehenden Lichtes. Er heißt „rechts drehend", wenn die Schwingungsebene des Lichtes sich im umgekehrten Sinne des Korkziehers verschiebt, d. h. wenn sie dem empfangenden Auge in der Richtung des Uhrzeigers gedreht erscheint.

Spezifische Drehung $[\alpha]$ nennt man bei festen Körpern (Kristallen) den Drehungswinkel für die Längeneinheit. — Bei Flüssigkeiten, z. B. auch Lösungen aktiver Körper in einem inaktiven Lösungsmittel, bezieht man die Drehung auf die Masseneinheit des drehenden Körpers. Enthält 1 ccm k gr des Körpers und gibt die Länge l den Drehwinkel α, so ist die spez. Drehung also $[\alpha] = \alpha/(lk)$. Bedeutet s das spez. Gewicht und p den Prozentgehalt, so ist $k = \frac{1}{100} ps$, also $[\alpha] = 100\,\alpha/(lps)$. Als Normaltemperatur wird gewöhnlich 20° gewählt. — Molekulares Drehvermögen nennt man $[\alpha] \times$ Molekulargewicht.

Die spez. Drehung pflegt sich mit der Konzentration der Lösung ein wenig zu ändern, was man in zugefügten Korrektionsgliedern darstellt.

Die Drehung hängt stark von der Farbe ab; brechbareres Licht wird stärker gedreht; „Dispersion" der Drehung. — Über Beobachtung mit spektral zerlegtem Licht vgl. den Schluß. Einfarbige Lichtquellen in **59**.

Zuckerlösungen. Die sp. Drehung des in Wasser gelösten Rohrzuckers ist für Natriumgelb $[\alpha] = 66{,}5^\circ/\mathrm{dm}$, d. h. der Drehwinkel α durch eine l dm lange Schicht einer Lösung, die in 100 ccm z gr Zucker enthält, beträgt in Bogengraden

$$\alpha = 0{,}665^\circ \cdot zl, \quad \text{woraus} \quad z = 1{,}504\,\alpha/l.$$

Für das weiße Licht im Mittel pflegt gesetzt zu werden

$$\alpha = 0{,}71^\circ \cdot zl, \quad \text{woraus} \quad z = 1{,}41\,\alpha/l.$$

Streng genommen wächst die Drehung mit dem Zuckergehalte der Lösung ein wenig verzögert an. Genauer ist für Natriumlicht bei 20° (Schmitz und Tollens) nach der Berechnung von Landolt

$$\alpha = (0{,}6667\,z - 0{,}000095\,z^2)\,l \quad \text{oder} \quad z = 1{,}500\,\frac{\alpha}{l} + 0{,}00032\left(\frac{\alpha}{l}\right)^2.$$

Von der Temperatur hängt die Drehung in Rohrzuckerlösungen sehr wenig ab. Gilt $[\alpha_{20}]$ für 20°, so gilt für t (Schönrock)

$$[\alpha_t] = [\alpha_{20}]\,[1 - 0{,}000217\,(t - 20)].$$

Quarz. Es gibt, an sekundären kleinen Kristallflächen unterscheidbar, rechts und links drehende Quarze. Bei beiden ist in der Richtung der Axe (in geneigter Richtung sehr rasch Null werdend) für Natriumgelb $[\alpha] = 21{,}72\,[1 + 0{,}00015\,(t - 20)]$ (Gumlich); für die grüne Quecksilberlinie $= 25{,}52\,[1 + 0{,}00018\,(t - 15)]^\circ/\mathrm{mm}$ (Macé de Lépinay).

Dispersion. Das Verhältnis der Drehung zu derjenigen des Natriumlichtes beträgt, bei Quarz und Zucker fast genau gleich:

mittleres	Rot	Gelb (Na)	Grün	Blau	Violett
Drehung =	$^7/_9$	1	$^4/_3$	$^5/_3$	$^9/_4$

Hiernach kann man mit Hilfe der für Natriumgelb gegebenen Zahlen die Färbungen übersehen. Genauere Angaben für Quarz s. Tab. 24.

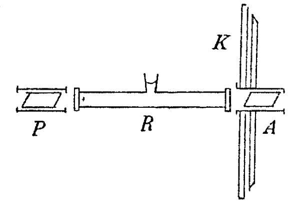
Das Drehvermögen d kann als Funktion der Wellenlänge λ (Tab. 23) durch den Ausdruck $d = a/\lambda^2 + b/\lambda^4$ dargestellt werden.

Die eingehendste Behandlung der drehenden Körper, der Methoden und Apparate bei Landolt, Optisches Drehungsvermögen, 2. Aufl. 1898; Zahlenmaterial ferner in Landolt-Börnstein-Meyerhoffer, Tabellen.

I. Polarimeter mit drehbarem Nicol.

Die Drehung läßt sich messen, indem man den Körper auf das Tischchen des Nörrenberg'schen Pol.-Apparats (S. 325 Fig. 1) bringt. Die folgenden Instrumente sind bequemer und genauer.

1. Biot-Mitscherlich. Das Instrument besteht aus dem festen polarisierenden Nicol P und dem auf dem Teilkreise K drehbaren analysierenden Okular-Nicol A. Ein weitsichtiges Auge verlangt außerdem eine schwache Lupe vor A oder die Brille. Man stellt eine Natriumflamme hinter dem Instrument vor einem schwarzen Schirm auf. Das von dem Leuchtgase herrührende bläuliche Licht wird durch gelbes Glas oder eine Lösung von Kaliumbichromat beseitigt.



Man bringt eine mit Wasser gefüllte Röhre R zwischen die Nicol'schen Prismen und dreht den Okular-Nicol so, daß die Mitte des Gesichtsfeldes dunkel erscheint. Darauf wird die mit der Flüssigkeit bez. der Lösung gefüllte Röhre eingeschoben, wodurch das Gesichtsfeld in der früheren Kreisstellung hell wird. Die Anzahl Grade, um welche man den Okular-Nicol drehen muß, damit wieder die Mitte dunkel wird, ist der Winkel α; Drehung im Sinne des Uhrzeigers bedeutet Rechtsdrehung.

Die Deckplatten der Röhren darf man nicht zu fest anschrauben, weil die sonst entstehende Doppelbrechung des Glases die Einstellung stört. — Die Lösung soll klar, ev. filtriert, und sehr gleichmäßig gemischt und temperiert sein.

Der Nullpunkt der Drehung läßt sich dadurch auf den Nullpunkt der Teilung bringen, daß man einen der Nicol in seiner Fassung dreht.

Einen festen Körper, z. B. einen zur Axe senkrecht geschnittenen Quarz, mißt man wie oben, indem man ihn zwischen die beiden Nicol bringt (wobei die Röhre seitliches Licht abblendet). Die optische Axe eines Quarzes muß genau in der Visierrichtung liegen, wenn man nicht großen Täuschungen ausgesetzt sein will. Man orientiert die Platte nach dem Spiegelbilde des eigenen Auges oder einer kleinen vor das Auge gehaltenen Flamme; die Axenrichtung sei mit dem Polarisationsmikroskop (S. 325) kontroliert.

Genaueres bei Brodhun u. Schönrock, ZS f. Instr. 1902, 353.

Weißes Licht. Weil die einzelnen Farben verschieden stark gedreht werden, so entsteht hier nach Einbringen des drehenden Körpers kein Dunkel mehr, sondern ein Wechsel von Farben. Man stellt auf die „empfindliche Farbe“ ein, in welcher das Gelb ausgelöscht ist, d. h. auf ein Violett, welches den ziemlich schroffen Übergang von Blau in Rot bildet. Für Zuckerlösungen gilt nahe die Konstante 1,41 (S. 332).

Sollte man unsicher sein, ob der Winkel größer oder kleiner als 180° ist, so beobachte man mit rotem Lichte (Kupferglas) und mit Natrongelb. Die beiden Drehungen verhalten sich durchschnittlich etwa gelb : rot = 5 : 4.

Einen Zweifelfall, ob ein Körper links oder rechts dreht, entscheidet man mit weißem Lichte, nämlich danach, daß in dem richtigen Sinne der Drehung des Okulars der empfindliche Farbenwechsel von blau nach rot stattfinden muß.

Verschärfung des einfachen Polarimeters.

Man beachte, daß ein Fernrohrauszug zum Deutlichsehen verstellt werden muß, wenn Flüssigkeiten mit Luftschichten wechseln.

2. Doppelquarz; Soleil 1845. Zwei neben einander stehende, gleich dicke, links und rechts drehende Quarzplatten, am günstigsten 3,75 mm dick, werden zwischen *P* und *R* (Fig. vor. S.) eingesetzt, genau senkrecht zur Sehlinie.

Bei gekreuzten wie bei parallelen Nicol erscheinen beide Platten im Natriumlicht gleich hell, im weißen Licht gleich gefärbt. Platten von 3,75 mm zwischen parallelen Nicol geben die violette sog. empfindliche Farbe und sind auch im Natriumlicht, welches sie um etwa 80° drehen, sehr empfindlich.

Nach dem Einbringen einer drehenden Substanz erscheinen beide Hälften ungleich. Den Drehwinkel α der Substanz findet man aus dem Winkel, um den man nachdrehen muß, um die Gleichheit wieder herzustellen. Ist die Drehung beträchtlich, so verhindert im weißen Licht die Farbenzerstreuung eine vollständige Gleichheit der Doppelplatte, so daß man auf Natriumlicht usw. angewiesen ist.

3. *Polaristrobometer* (Wild). Hier entstehen vermöge einer eingeschobenen Savart'schen Platte (zwei Quarze oder Kalkspate unter 45° gegen die Axe geschnitten, mit rechtwinklig gekreuzten Hauptschnitten) Streifen im Gesichtsfeld, welche bei homogenem Licht hell und dunkel, bei weißem Licht farbig sind. Das Okular wird zunächst so weit herausgezogen, daß diese Streifen möglichst scharf erscheinen.

Zur Einstellung dient das *Verschwinden der Streifung* in der Mitte, welches in vier je um 90° verschiedenen Stellungen eintritt, und zwar mit gleicher Empfindlichkeit, falls die Hauptschnitte des Polarisators und der Savart'schen Platte auf die gegenseitige Neigung von 45° fixiert sind. An neueren Instrumenten kann man durch Ändern dieser Neigung die Empfindlichkeit im einen Quadrantenpaare — auf Kosten des anderen — steigern; man benutzt das empfindlichere (dunklere) Paar.

Die Instrumente haben häufig eine zweite Kreisteilung, die für eine 200 mm lange Röhre direkt den Gehalt von 1 Liter der Lösung an gr Zucker angibt.

Halbschattenapparate. Das Gesichtsfeld ist in zwei Hälften geteilt, in denen beiden sich polarisiertes Licht, aber von verschiedenen Schwingrichtungen s_1 und s_2 (Fig.) befindet. Als Nullpunkt des Analysators dient diejenige Stellung, in welcher die beiden Hälften gleich hell erscheinen, d. h. in welcher die Schwingungsebene A des Analysators gleiche Winkel mit den Schwingungsebenen in den beiden Hälften des Gesichtsfeldes bildet.

Die größte Empfindlichkeit des relativen Helligkeitswechsels entsteht, wenn die Richtungen s_1 und s_2 sich wenig von einander unterscheiden und die Richtung A den stumpfen Winkel zwischen ihnen halbiert; vgl. Fig. Doch ist der Kleinheit der Neigung $s_1 s_2$ durch die abnehmende Lichtstärke eine Grenze gesetzt. Man

probiert die für die Lichtstärke und für die Durchsichtigkeit des Körpers, dessen Drehung gemessen werden soll, günstigste Stellung aus. — Der Nullpunkt ist erst nach dieser Regulierung zu bestimmen.

Gemessen wird dann der Winkel, um welchen nach Einschieben des drehenden Körpers gedreht werden muß, um die gleiche Helligkeit der beiden Hälften wieder herzustellen.

Es gibt auch Instrumente mit mehr als zweiteiligem Gesichtsfelde, bei denen der Kontrast der Helligkeiten die Genauigkeit vergrößert.

4. Halbschattenapparat nach Laurent. Man beleuchtet mit Natriumlicht. Die Hälfte des Gesichtsfeldes ist vor dem Polarisator von einer Kristallplatte bedeckt (Glimmer- oder Quarzplatte parallel zur Axe geschnitten), welche die beiden Schwingungskomponenten, in die der Strahl bei dem Eintritt in die Kristallplatte zerfällt (Fig. *a*), um eine halbe Wellenlänge gegen einander verschiebt. Bei dem Austritt (Fig. *b*) setzen sich beide Komponenten wieder zu einer einzigen Welle zusammen, deren Schwingungsebene also gegen die des eintretenden Strahles gedreht ist, so daß aus der belegten und der unbelegten Hälfte, ähnlich wie bei dem Doppelquarz, Strahlen von verschiedener Schwingungsrichtung heraustreten. Vgl. 71a I.

a *b*

5. Halbschattenapparat nach Lippich. Das Licht durchläuft zuerst ein größeres Polarisationsprisma mit geraden Endflächen (Glan'sches Prisma), dann ein zweites ähnliches, welches nur das halbe Gesichtsfeld einnimmt. Ersteres ist mit Hilfe eines Hebelarms um seine Längsaxe drehbar, so daß der Winkel zwischen den beiden Polarisationsebenen verändert und dadurch die größte Empfindlichkeit bewirkt werden kann. Erst dann wird der Nullpunkt bestimmt.

Anwendbar ist homogenes Licht von beliebiger Wellenlänge.

6. Ein Cornu-Jellet'sches Prisma, d. h. ein Kalkspat, der nach einer Richtung, die von der Normalen auf dem Hauptschnitt ein wenig abweicht, zerschnitten und in entgegengesetzter Lage wieder verkittet ist, gibt gleichfalls zwei Hälften des Gesichtsfeldes, auf deren gleiche Helligkeit man einstellt.

Ausführlicheres und andere Anordnungen (Landolt, Lummer) in Landolt, S. 274ff. Über Ultraviolett auch Lowry, Proc. R. S. (A) 81, 472. 1908.

II. Bestimmung eines Drehvermögens im Spektrum.

Beleuchtet man das Polarimeter Biot-Mitscherlich mit gemischtem Licht (Sonne), so kann man das durchgegangene Licht mit einem Spektralapparat zerlegen. Die gekreuzte Stellung der Nicol zeigt sich darin, daß das ganze Spektrum dunkel ist. Das Einschalten einer drehenden Substanz erhellt das Spektrum. Dreht man den Analysator nach, so tritt im Spektrum

ein dunkeles Band auf, welches vom roten nach dem violetten Ende wandert und dessen Mitte der vollkommen ausgelöschten, den Fraunhofer'schen Linien zu entnehmenden Wellenlänge (S. 302; Tab. 23) entspricht. Durch die Stellung des Analysators wird also der Drehwinkel dieser Wellenlänge gemessen.

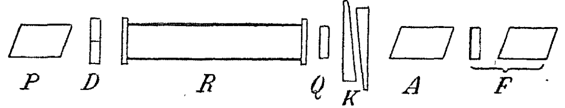
Genaue Methoden von Broch, v. Lang, Lommel u. Landolt, S. 278.

III. Polarimeter mit Quarzkeilkompensator (Soleil).

Die Drehung der Polarisationsebene läßt sich durch eine entgegengesetzt drehende Quarzplatte kompensieren, im allgemeinen nur für einfarbiges, bei einer Zuckerlösung jedoch für beliebiges Licht, weil die Farbenzerstreuung im Quarz derjenigen in der Zuckerlösung sehr nahe proportional ist (S. 333). Man kann also die Drehung in Zuckerlösungen zwischen den bisher beschriebenen Vorrichtungen, anstatt sie durch Nachdrehen des Nicol zu messen, aus der Größe der Verschiebung von Quarzkeilen ableiten, welche zur Kompensation notwendig ist.

Soleil'sches Saccharimeter.

Das Licht tritt durch den polarisierenden Nicol P ein und geht von da durch die Doppelquarzplatte D (vgl. I 2). Hierauf folgt das Rohr R,



welches mit der Lösung gefüllt werden kann. Dann der Kompensator, bestehend aus einer rechtsdrehenden Quarzplatte Q und den beiden linksdrehenden Quarzkeilen K, die sich mittels eines Triebes gegen einander verstellen lassen, also zusammen einen Linksquarz von veränderlicher Dicke vorstellen. In einer mittleren Stellung ist die Gesamtdicke derjenigen des Rechtsquarzes Q gleich, so daß Q und K zusammen keine Wirkung haben. Diese Stellung soll der Einstellung Null auf der mit dem Trieb verbundenen Teilung entsprechen. Es folgt dann der analysierende Nicol A, dessen Polarisationsebene derjenigen von P parallel sein soll.

Da Zuckerlösungen usw. gefärbt sein können und da nicht alle Augen für den gleichen Farbenwechsel empfindlich sind, so ist die violette Übergangsfarbe nicht immer die empfindlichste. Deswegen hat man, in der Regel dem Auge zugewandt (bei manchen Instrumenten auch wohl umgekehrt auf der Seite der Flamme), noch einen Farbenregulator F. Dieser besteht wieder aus einer Quarzplatte und einem drehbaren Nicol, mit dessen Drehung die Farbe des Gesichtsfeldes sich ändert. Auf den Nullpunkt des Instrumentes hat diese Drehung keinen Einfluß.

Es ist zu beachten, daß zum Beurteilen gleicher Färbung nicht alle Augen geeignet sind, so daß im Handelsverkehr die Anwendung weißen Lichtes beanstandet wird. — Mit einfarbigem, z. B. Natrium- oder mittels Kaliumchromatlösung gereinigtem Auerlicht, stellt man statt auf gleiche